Ju. O. GURVIC da R. V. GANGNUS

GEOMETRIJALƏN

ŞIŞŢEMAŢIÇESKƏJ KURS

8ƏR 8KOLAЬN
VELƏDÇAN KŅIGA

PERVOJJA ÇAŞŢ

Plaņimetrija

KOMI GOSIZDAT
SЬKTЬVKAR 1934

Ju. O. GURVIC da R. V. GANGNUS

GEOMETRIJALƏN

ŞIŞŢEMAŢIÇESKƏJ KURS

SƏR SKOLAЬN
VELƏDÇAN KŅIGA

PERVOJJA ÇAŞŢ

Plaņimetrija

6—8 *VELƏDÇAN VOJAS*

VЬNŞƏDƏMA RSFSR-sa NKP KOĻĻEGIJAƏN
KOMIƏDƏMSƏ VЬNŞƏDIS KOMI OBLONO-sa JURALЬŞ
KOMIƏDIS Ņ. I. ŞEDJAKOV

KOMI GOSIZDAT
SЬKTЬVKAR 1934

Ю. О. ГУРВИЦ и Р. В. ГАНГНУС

СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ КУРС ГЕОМЕТРИИ

УЧЕБНИК
ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Планиметрия

6 — 8 *ГОДЫ ОБУЧЕНИЯ*

Утверждено коллегией НКП РСФСР
Перевод утвержден зав. Коми ОблОНО

Отв. редактор Г. Федоров. Тех. редактор М. Шестаков.
Чертежники П. В. Албычев и Д. Ф. Паршин.

Упол. Облита № 1275. Коми ГИЗ № 45. Заказ № 900. Тираж 3000 экз. Стат формат 62×94, $^{1}/_{16}$, 11,5 п. л. 52000 зн. в п л. Сдано в набор 27/VI-34 г. Подписано к печати 8-VII-34 г.

Типография Коми ГИЗ-а, Сыктывкар, Коммунистическая, 2

PЬRTƏD.

OSNOVNƏJ GEOMETRIÇESĶƏJ VEŽƏRTASJAS.

1 §. Fiziçeskəj da geometriçeskəj ţelə.

Stav mi gəgərsa predmetjaslən, ļiвə ţeləjaslən, em əţi seeəm ətuvja aslьsşikaslun, mьj najə prostranstvoьş воştənь opredeļonnəj jukən. Takəd əteəe вьd predmetlən em aslьspələs una fiziçeskəj svojstvojas, kodjas şerţi sijə jansədçə mukəd predmetjasьş. Seeəm fiziçeskəj svojstvojasən loənь: ţelələn şəkta, sьlən massa, ņeproņicajemoşt, uprugoşt, rəm (cvet) da mukəd svojstvojas, kodjas zaviş'itənь ţelə veseestvoьş. Fiziçeskəj svojstvojasьş ətdor, вьd ţelələn eməş xarakţernəj ortsьs svojstvojas: forma, ьзda (razmer) da položeņņə; tajə svojstvojas suşənь ţeləsa geometriçeskəj svojstvojasən.

Ţeləlьş fiziçeskəj svojstvojassə velədənь jeşţestvennəj naukajas: fizika, ximija da s. v. Ţeləlьş geometriçeskəj svojstvojassə,—formasə, ьзdasə da položeņņəsə,—kodjas xarakţernəjəş вьd predmetlь da kodjas şerţi predmetjas torjədçənь məda-mədьş, velədə geometrija; ta dьrji geometrija вokə vestə ţeləjaslьş fiziçeskəj svojstvojassə; ta vəsna geometrija velədьşlь, kor sijə tədmalə ţeləjaslьş forma da mukəd geometriçeskəj svojstvojas, зik ətkod воştnь kərtьş kuв ļiвə moļьda sьļədəm graņitьş kuв, režinaьş sar ļiвə lььş təçitəm sar, şţekləьş prizma ļiвə puьş prizma da s. v.

Med вurзьka tədmavnь mijan gəgərsa ţeləjaslьş formajas, geometrija velədьşlь kolə kuznь asşьs vņimaņņə kežədnь ţeləjassa fiziçeskəj svojstvojasьş da velavnь stav vņimaņņəsə çukərtnь səmьn əţi svojstvo vьlə—ţeləjas forma vьlə.

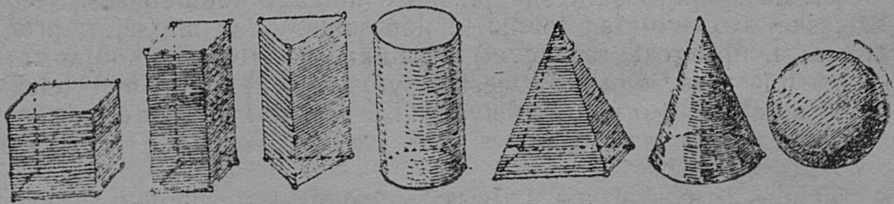
Oz kov vunədnь, mьj zвьļьssə (dejstviteļnoştьn) ţelələn formaьs jansədtəmtor sijə svojstvojasьş da mьj ţeləlьş forma velədigən geometrija torjədə tajə formasə, vestə sijəs tajə prostranstvosa zвьlьşsa ţeləьş. Səmьn zev una şo voşa opьtən mort velalis məvpavnь otvļeçonnəj (jansədan) formajasən, tədmalis nalьş aslьsşikaslunjassə, kutis kuznь torja formajaslьş svojstvojas ispoļzujtnь zвьļ oləmas—ţexņikaьn, proizvodstvoьn.

Siз-kə, geometrija oz velәd fiziçeskəj ţeləsə stav fiziçeskəj svojstvojasnas, a velədə stav fiziçeskəj svojstvojasşьs jansədəm ţeləəs, kodlən koļəma səmьn formaьs, siз-kə i ьзdaьs tajə zвьlьşsa fiziçeskəj ţeləьslən, kodlьş məvpən jansədəma, torjədəma fiziçeskəj svojstvojassə. Taeəm ţeləjas suşənь geometriçeskəj ţeləjasən. Sь vəsna, mьj вьd fiziçeskəj telə prostranstvoьş boştə вureea (opredelonnəj) jukən, taş petə, mьj **geometriçeskəj telə loə fiziçeskəj teləən prostranstvoьş boştan jukən**, məd kьvjasən-kə вunь: **geometriçeskəj telə em prostranstvolən gəgərвok ograniçitəm jukən.**

Geometriçeskəj teləlǝn siз zə, kьз вьd fiziçeskəj teləlǝn, em kujim murtas: kuzta, paşta da sudta libə kьzta. Teləьş-kə jukam mьjkəьзda tor, sijə torjьs вara loə telə. Sijə, mьjən telə torjədçə as gəgərsa prostranstvoьş da mukəd teləjasьş, suşə sijə teləsa verkəsən; **teləlǝn granicaьs—verkəsьs.**

As gəgərsa oвstanovkaьş mi adзьvlam вьdşama noga verkəsjas, kodjaslən formaьs opredelajtçə telə formaən. Siз, klassa dəskalən, pьzanlən, vedralən, maçlən, sarlən, cilindrlən, konuslən verkəsjasnьs aslьs şikasaəş da zaviʂitənь telə formaьş.

Teləlьş verkəssə pozə torjədnь jukənjasə: вьd jukənьs sьlən siз-zə loə verkəsən.



1-d şerpas.

1 şerpas vьlьn petkədləma razliçnəj formaa teləjasəs: kuв, veşkьdpeləsa parallelepiped, prizma, cilindr, piramida, konus, sar. Na kostьn ətikjaslən,—kuвlən, eruslən, prizmalən, piramidalən, —ploskəj verkəsnьs; mukədlən,—suam, sarlən, nukьla verkəs; kojməd şikasjaslən—cilindrlən da konuslən figurajasьs—ograniçitəma ploskəj da nukьla verkəsjasən.

Verkəslən em kьk murtas: kuzta da paşta. Verkəslən granica, məd nogən, sijə mesta, kən teləsa verkəslən əti jukən vomənaşşə mədkəd, suşə viz ən. **Verkəslən granicaьs viz.** Vizlən em səmьn əti murtas—kuzta. 1 şerpas vьlьş vidlalam kuв. Kuвlən dorьs loə kuвsa kьk granlən məda-mədkəd vomənaşşan mesta; вьd əti gran loə kuвsa stav verkəslən jukən.

Viz pozə torjədlьnь jukənjasə; ta dьrji вьd seeəm jukən вara loə viz.

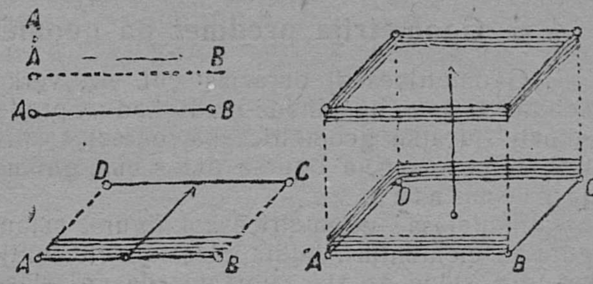
Vizlən granicaьs—çut. Çutlən nekueəm murtas aвu. Çut loə seeəm mesta, kən voməna şşənь kьk libə nekьmьn viz. Siз, kuвlən jьv (1 şerpas) loə kujim vizlən voməna şanin mesta. Verkəsjas, vizjas da çutjas pozə adзьnь səmьn teləjas vьlьş; torjən najə ovnь oz vermьnь; geometrijaьn-kə mi şornitam verkəsjas, vizjas da çutjas jьlьş, kьз torjən olьsjas jьlьş, tajə səmьn sь vəsna, mьj mi məvpalam najəs teləjasьş jukəmən, kьз вьttə boştəmən.

Telə, verkəs, viz da çut suşənь geometriçeskəj oвrazjasən.

2 §. Geometriçeskəj obrazjaslən dvizeŋŋəən artməm.

Çuťən pasjьşşə prostranstvoьn opreḑelonnəj mesta, kəţ med kən sijə ez vəv: ţelə verkəs vьlьn ļivə ţelə pьekьn, verkəs vьvti nuədəm viẓ vьlьn ļivə ţeləьş janasən məvpalan viẓ vьlьn.

Çut, kor sijə veslaşə (dvigajtçə) prostranstvoьn (2-d şerp.), dugdьvtəg vezlalə asşьs polozeŋŋə, da kьз вьţţə as munəmnas giztə kueəmkə viẓ, ta vəsna suənь: v i ẓ l o ə m u n ь ş ç u t l ə n t u j. Bija əgьrəs-kə, ƙodi jugjalan çut koḑ, ədjə vestavnь, seki şetə predstavļeŋŋə viẓ jьlьş, kodi artmə kьзi stav torja polozeŋŋəjaslən tuj, kənjas vəlalə s om, kor sijə munə prostranstvoьn.



2-əd şerpas.

Siз-ƶə vermam predstavitnь, mьj verkəs artmə prostranstvoьn viẓ munəmən (2-d şerp.), oz-kə viẓьs mun voзза as napravļeŋŋə kuẓaьs. Kor ədjə vergalə ţelega gəgьl, sьlən kəļəsa paļiçjasьs вьţţə ətlaaşənь da вьţţə artmədənь poverxnoşţ.

Verkəs munəmьş artmə ţelə, ta dьrji med səmьn verkəs ez mun voзза as sulalannog napravļeŋŋə kuẓaьs (2-d şerpas).

Kruglən ḑiametr gəgər vergaləm şetə sar jьlьş predstavļeŋŋə.

3 §. Viẓjaslən da verkəsjaslən şikasjas.

1. Ţeləjas vьlьn verməнь lonь veşkьd da ŋukьļa viẓjas.

Siз, kuвsa kьk graŋlən voməнaşşan in loə sьlən dorьs—veşkьd viẓ; ciļindrlən вoksa da poduvtassa verkəsjaslən voməнaşşan inьs krugkьe—ŋukьļa viẓ.

Veşkьd viẓ jьlьş urçitəm şetnь oz poẓ. Veşkьd viẓ jьlьş vezərtas kolə lьḑḑьnь osnovnəjən, tajə vezərtassə mort boştə veşkьda вьdlunja opьtьş.

Veşkьd viẓ napravļeŋŋələn osoвəj sluçajjas loənь—gorizontaļnəj da verţikaļnəj veşkьdjas. Gorizontaļnəj veşkьd viẓlьş napravļeŋŋə ində вeḑ, kodi kujlə ŋeьзьd va verkəs vьlьn; verţikaļnəj veşkьdlьş napravļeŋŋə korşənь siз suana otvesən, mədnogkə, snurən, kod pomə kərtaləma içəţik gira. Verţikaļnəj veşkьd viẓ loə seeəm veşkьd, kodlən napravļeŋŋə munə mu sərçutlaŋ.

2. Ţeləjaslən verkəsjas jukşənь kьk şikasə: ploskəj verkəsjas da ŋukьļa verkəsjas.

P l o s k ə j v e r k ə s ə n, ļivə prəsta p l o s k o ş ţ ə n mi suam seeəm verkəs, kodkəd veşkьd viẓ vermə ətlaaşnь ļubəj napravļeŋņə kuz̧a. Primerən ploskoşţlь vermas lonь вura 8ьļədəm pьzan pəv; ļuвəj napravļeņņə kuz̧a sь vьlə puktəm ļiņejkalən doгь8 topьda şivalə, veşigtə jugьd oz pişt na kostəd.

Kuвlən graņjas, ciļindrlən da konuslən poduvtasjas—ploskoşţjas. 8arlən verkəs, ciļindrlən da konuslən вoksa verkəsjas — ņ u k ь ļ a v e r k ə s j a s; 8ar verkəs vьlə puktəm ļiņejkalən doгь8 ņekueəm napravļeņņəьn sькəd oz ətlaaş; ļiņejka doгь8-kə puktьnь ciļindr ļiвə konus verkəs vьlə, adзam, mьj sijə nakəd ətlaaşə oz вьd napravļeņņə kuz̧a.

Gorizontaļnəj verkəs pьdḑi воşţənь içəţik doz pьesa va verkəs.

4 §. Geometrija predmet da geometrijaəs jukəm.

1. Geometriçeskəj oвrazjas: çut, viz̧, verkəs, ţelə poz̧ə vidlavnь вьdənəs torjən ļiвə məda-mədьskəd opreḑeļonnəj soçetaņņəьn. Kькnan sluçajьn geometriçeskəj oвrazjas 8uşənь g e o m e t r i ç e s k ə j f i g u r a ə n, a figuraə pьгь8 вьd geometriçeskəj oвraz 8uşə sijə e ļ e m e n t ə n.

Kujimpeļəsa—geometriçeskəj figura, sьlən dorjas da peļəsjas—figuralən eļementjas, kujimpeļəsalən eļementjas; kuв—geometriçeskəj ţelə, sьlən graņjas, doгь8jas da peļəsjas—kuвlən eļementjas.

2. *M ь j s i j ə l o ə g e o m e t r i j a?* Geometrija—seeəm nauka, kodi velədə ploskəj da prostranstvennəj geometriçeskəj figurajaslь8 priznakjas da svojstvojas.

Ploskəj figurajasən 8uşənь seeəm figurajas, kodjas stav as eļementjasnas raspoloz̧itçənь səmьn ə ţ i ploskoşţ şerţi; si3, kujimpeļəsa, vomənaşşan kьk veşkьd viz̧, kьeviz̧—ploskəj figurajas.

Prostranstvennəj figurajasən 8uşənь seeəm figurajas, kodjas stav as eļementjasnas əţi ploskoşţ vьlə o z v e r m ь n ь tərnь. Prostranstvennəj figurajaslь, ļiвə ţeləjaslь, primerjasən vermasnь lonь kьk vomənaşşan ploskoşţ, kuв, prizma, ciļindr, 8ar da s. v.

Geometrija jukşə kьk jukənə: p l a ņ i m e t r i j a ə, kodi velədə ploskəj figurajaslь8 svojstvojas da ş ţ e r e o m e t r i j a ə, kodi velədə prostranstvennəj figurajaslь8, ļiвə ţeləjaslь8 svojstvojas. Geometrija, kьзi-i вьd nauka, artmis naвļuḑeņņəь8 da opьtь8 da вьdmis mort xoz̧ajstvennəj potreвnoşţjaskəd çoгьda jitçəmən. Kьv g e o m e t r i j a—greçeskəj kьv, komiən loə „m u m u r t a l ə m".

3. Una şo vo sajьn mijan eraəз çuz̧is geometrija. Aвьvvьv kuļturnəj jəzjas, vaviloņana da jegipţana, dəza-ņin tədlisnь geometrijatə, sь vəsna, mьj nalь kovmьlis murtavnь mu uçastokjas, vəçavnь вьdşama postrojkajas da velədnь ņeвesasa şveţiləjaslь8 vetlədləm. Vozə geometrija, kьзi nauka, kutis paşkavnь Grecijaьn. Grecijasa vozza maţemaţikjas, jegipetsa maţemaţikjaslən velədçь8jas, 6 şo vo voз mijan eraəз tədisnь-ņin geometriçeskəj figurajaslь8 una svojstvojas; medprəstəj geometriçeskəj oвrazjas jьlь8 opьtşьnь8 вoşţan tədəmlun poduvtas vьlьn urçitisnь sloz̧nəjзьk geometriçeskəj oвrazjaslь8 svojstvojas. Evkļidəз, kodi olis mijan eraəз 3 şo vo voз, geometriçeskəj oвrazjas jьlь8 çukərmisnь zev una

tədəmjas; Evkļidlən zev ьзьd zasluga, mьj sijə as soçiņeņņəas („Naçala“) çukərtis əţi şiştemaə stavsə, mьj sijə tədə vəli figurajas da ţeləjas svojstvojas jьlьş.

I. VEŞKЬD VIZ̧.

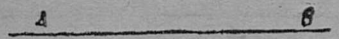
1 §. Veşkьd viz̧. Luç. Vundəg. Çeglaşəm viz̧. Ņukьļa viz̧.

V e ş k ь d v i z̧ stav viz̧jasьş medşa prəstəj viz̧. Veşkьd viz̧ jьlьş gəgərvoəm vermasnь mijanlь şetnь zelьda ņuzədəm suņis, vьveritəm ļiņejkalən dorьs; pemьd komnataə içəţik roz̧əd pьrьş sondi luçjas munənь veşkьd viz̧ kuz̧a.

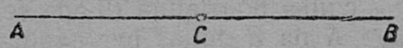
V e ş k ь d v i z̧ t ə p o z̧ ə m ə v p ə n p o m t ə g ņ u z ə d n ь k ь k n a n l a d o r a s.

Veşkьd viz̧ unзьkьş pasjənь laţinskəj alfavitsa kьk ьзьd sьpasən; sьpasjassə puktənь məda-mədşaņ ņekьmьn kost koļəmən veşkьd viz̧ьş vьləзьk ļivə uləзьk. 3-d şerp. vьlьn giztəma AB veşkьd viz̧.

Kənkə AB veşkьd vьlьn-kə boştam C çut, sijə C çutьs AB veşkьd viz̧əs jukas kьk luçə: CA da CB (4-d şerp.).



3-əd şerpas.



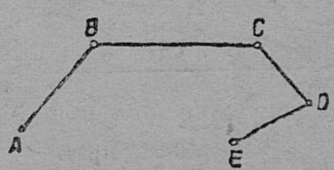
4-əd şerpas.

C çut loə luçlən z a v o d i t ç a n ļivə p e t a n çut, giz̧igən sijə puktьşşə voзза mestaə. Luç vermə pomtəg ņuzavnь səmьn ətarlaņə. Siз, CA luç poz̧ə ņuzədnь C çutşaņ səmьn sujgalaņə; CB luçəs—veşkьdlaņəə. Siз-k:

CA da CB kьk luç, kodjas petənь əţi C çutьş da kodjaslən napravļeņņəjasьs məda-mədьslь mədaraəş, vəçənь əţi veşkьd viz̧.

Veşkьd viz̧ vьlьn-kə-boştnь kьk çut A da B, tajə çutjas kostsa veşkьdlən jukən suşə v u n d ə g ə n. Vundəg pasjьşşə kьk ьзьd sьpasən, kodjasəs puktənь viz̧tor

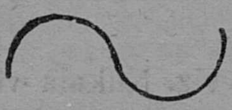
5-əd şerpas.



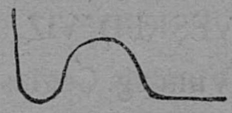
6-əd şerpas.

pomjasə: AB (5-d şerp.)—veşkьd viz̧lən vundəg. Veļ unaьş viz̧torsə pasjənь əţi içət sьpasən, suam *a*-ən, kodəs puktənь səraskьmьn vundəg ulə ļivə vьlə; ta dьrji „*a*“ unзьkьşsə petkədlə vundəglьş masstab jeḑiņicajasən boştəm kuz̧tasə.

Seєəm viʐ, kodi artməma veşkьd vundəgjasьş, no kodjas oz kuj-lьпь əţi veşkьd viʐ vьlьn, suşə ç e g l a ş ə m v i ʐ ə n (5-əd şerp.). Vundəgjasьs, kodjasьş artməma çeglaşəm viʐ, suşənь sь вokjasən, ļiвə ʐ v e n o j a s ə n. Çeglaşəm viʐ pasjьşşə ьзьd зьpasjasən, kodjasəs puktalənь sijə вokjasьs pomjasə, suam, şetəma çeglaşəm viʐ ABCDE.



7-əd şerpas.



8-əd şerpas.

Ŋ u k ь ļ a viʐən suənь seєəm viʐ, kodlən aвu ŋiəţi veşkьd viʐtor (7 şerp.).

S o r a viʐən suənь seєəm viʐ, kodi artməma veşkьd vundəgjasьş da ŋukьļa viʐ jukənjasьş (8 şerp.).

2 §. Veşkьd viʐlən akşiomajas.

1. Veşkьd viʐəs poʐə pomtəg ŋuƶədnь kьknanla ɗoras.

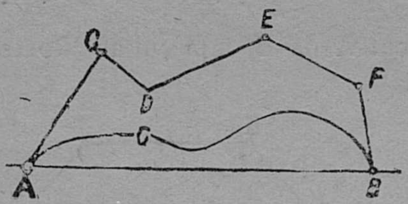
Tajə svojstvoьş ətdor, veşkьd viʐlən eməş mukəd svojstvojas.

Ploskoşţ vьlьn pasjam A da B kьk çutlьş poloƶeŋŋə (9-əd şerpas). Tajə A da B çutjas pьr nuədam vьveritəm ļiŋejkaən veşkьd viʐ. Tajəƶə A da B çutjas pьr pondam-kə nuədnь məd veşkьd viʐ, adзam, mьj sijə voззaьskəd vevşaaşas; tatьş petə mьj:

9-əd şerpas.

2. Kьk şetəm çut pьr poʐə nuədnь veşkьd viʐ i səmьn əţiəs.

Tajə loə veşkьd viʐlən məd svojstvo, sijə petkədlə, mьj вьd v e ş k ь d v i ʐ l ə n p o l o ƶ e ŋ ŋ ə ь s s p o l n ə j a o p r e ɗ e-ļ a j t ç ə k ь k ç u t ə n; ta vəsna, kьk veşkьd viʐ-kə ətlaavnь siз, med əţik veşkьd viʐьslən kьk çut ətlaaşisnь məd veşkьd viʐ kьk çutkəd, seki kьknan veşkьd viʐьs ətveşţaşasnь stav çutjasnanьs. Kьk veşkьd viʐlən-kə em səmьn əţi ətuvja çut, najə vomənaşənь.



10-əd şerpas.

Vomənaşan kьk veşkьd viʐlən AB da CD ətuvja çut suşə v o-m ə n a ş a n i n ç u t ə n.

Əţi çut pьr poʐə nuədnь pomtəm una veşkьd viʐ. Stav seєəm veşkьdjaslən sovokupnoşţ suşə v e ş k ь d v i ʐ j a s p o z t ь r ə n.

Poztьrsa stav veşkьdjaslən ətuvja çut suşə p o z t ь r s a s ə r ç u-t ə n (centrən).

Ploskoşţ vьlьn-kə вoşţnь kьk çut A da B da na pьr nuədnь veşkьd, ŋukьļa da şmeзannəj viʐjas, A da B çutjas kutasnь graŋiçitnь AB veşkьd vundəg, ŋukьļa viʐlьş *AGB* jukən da loənь

ACDEFB şmesannəjlən pomjasən (10-d şerp.). Tьdalə, mьj AB vundəg zeņьdzьk ņukьļasa AGB jukənьş dı ACDEFB sora viźьş, tatьş:

3. Veşkьdlən vundəg kьk çut kostьn medşa zeņьı rasstojaņņə.

Veşkьd viz tajə svojstvo şerţi kьk çut kostsa rasstojaņņə vek murtalənь na pьr munьş veşkьd viz kuza.

Vundəglən kuzta opredeļajtə pom çutjas kostьş rasstojaņņə.

4. Veşkьd vizlən, kьz geometriçeskəj figuralən, eməş una svojstvojas. Tajə svojstvojaslьş veşkьdlunsə ustanovitəma opьtən, kodəs vojtьr çukərtisnь as gəgərsa mirlьş javļeņņəjas вьdlun vizədəmən da praktiçeskəj mogjas resitaləmən.

Geometriçeskəj figura svojstvojas jьlьş taeəm suzdeņņəjas, kodjasəs ustanovitəma opьtən da kodjasəs boştənь dokazittəg, suşənь **aksiomajasən.** Veşkьd viz jьlьş eməş so kueəm suzdeņņəjas— akşiomajas:

1) **veşkьd vizəs pozə pomtəg ņuzədnь kьknanla dorə;**

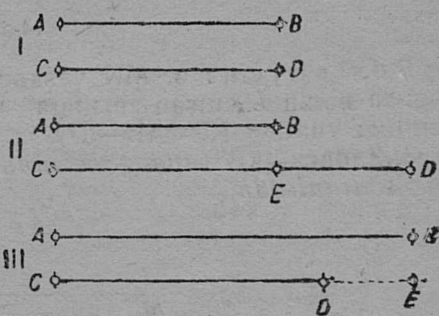
2) **şetəm kьk çut pьr pozə nuədnь veşkьd viz i səmьn əţləs;**

3) **veşkьd vundəg—medşa zeņьd rasstojaņņə kьk çut kostьn.**

3 §. Vundəgjasəs ətlaşţitəm.

Veşkьd vizjaslьş kuztajas ətlaşţitnь oz poz; tassə sь vəsna, mьj veşkьd vizjasəs pozə ņuzədnь ətarə i mədarə pomtəg. Ətlaşţitavnь məda-mədkəd pozə səmьn veşkьd vundəgjasəs.

Ə t l a ş ţ i t n ь   k ь k   v u n d ə g — *t ə d m a v n ь,   ə t ь z d a ə ş   n a j ə   a ļ i   a в u;   a в u-k ə   ə t ь z d a ə ş,   k o d ь s   n a   p i ь ş   ь z ь d z ь k.* Vundəgjasəs ətlaşţitəm vəçşə əţi vundəgəs mədьs vьlə puktəmən.



11-əd şerpas.

Zadaça. *Ətlaşţitnь məda-mədkəd kьk vundəg* AB *da* CD (11-d şerp.).

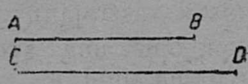
R e s i t ə m. AB vundəg puktam CD vundəg vьlə siз, med A çut ətlaaşas C çutkəd da AB vundəg med munas CD vundəg kuza. Sijə sluçajьn, kor B çut ətlaaşas D çutkəd—CD vundəg pomkəd, AB da CD vundəgjas ətьzdaəş. Vundəgjaslьş ravenstvo gizənь taз: AB=CD.

B çut-kə uşə CD vundəgsa E çutə, kodi kujlə C da D çutjas kostьn, AB vundəg CD vundəgьş içətzьk. Gizəd: AB<CD.

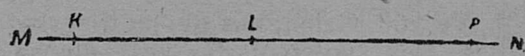
B çut-kə uşə ņuzədəm CD vundəgьs vьlə kueəmkə E çutə, AB vundəg CD vundəgьş ьzьdzьk. Gizəd: AB>CD.

4 §. Vundəgjas vьlьn ḑejstvijejas.

1. **Zadaça.** *Sodtьnь* AB da CD *vundəgjas;* vundəgjaslьş kuẓtajassə şetəma 12 şerpas vьlьn.



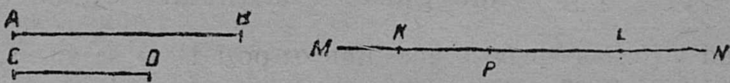
12-əd şerpas.



13-əd şerpas.

P o s t r o j e ꞑ ꞑ ə. Nuədam MN veşkьd viẓ (13 şerp.). Tajə veşkьd vьvsa K çutşaꞑ cirkuļ otsəgən puktam KL = AB vundəg; sь ʙərьn L çutşaꞑ puktam LP = CD vundəg siʒ, med voʒʒa vundəglən L pom çut vəli məd vundəglən naçaļnəj çutən. KP vundəg şetə AB da CD vundəgjaslьş summa. Gizəd: AB+CD = KL+LP = KP.

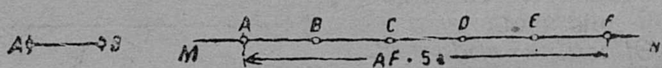
2. **Zadaça.** AB *vundəgьş çintьnь* CD *vundəg*; vundəgjaslьş kuẓtajassə şetəma 14 şerpas vьlьn.



14-əd şerpas.

P o s t r o j e ꞑ ꞑ ə. MN veşkьd viẓ kuẓa puktam KL = AB vundəg; ta ʙərьn *L* çutşaꞑ mədara napravļeꞑꞑəlaꞑ puktam *LP=CD* vundəg; vundəg KP=AB—*CD*.

3. **Zadaça.** AB *vundəg ьʒdədnь 5 pəv, mədnog-kə, ʙoştnь sijəs 5-ьş sodtanlьdən.*



15-əd şerpas.

P o s t r o j e ꞑ ꞑ ə. MN veşkьd viẓ kuẓa şetəm AB vundəg puktam məda-mədkəd ortçən 5 pəv. A*F* vundəg = 5AB (15 şerp.).

4. **Zadaça.** Şetəma vundəgjas: *a*, *ъ* da *c*. Postroitnь vundəg: *x* = 3*a* + 2*ь*—4*c*.

Proizvoļnəja ʙoştəm veşkьd viẓ vьlə puktam 3*a* ьʒda vundəg, sь dinə sodtam vundəg 2*ь* = *b*+*b*, seşşa ꞑoļьş çintam *c* vundəg. Zadaça vermas lonь səmьn sek, kor 3*a*+2*ь*> 4*c* ļivə 3*a*+2*ь*=4*c*. Bərja sluçajьn *x*=0.

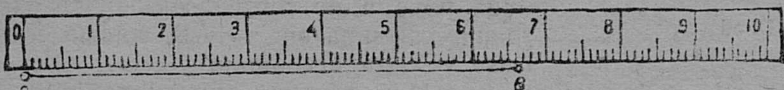
5. Vundəgəs vundəg vьlə jukəm, ɛəɛ i ətgьrşa da aʙu ətgьrşa pajjasə jukəm loə torjən vidlaləma.

5 §. Vundәgjasәs murtalәm.

Vundәg murtalәmьd loә—tәdmavnь, kьmьn pәv setçә tәrә mәd vundәg, kodәs воştәma jeḑiņica pьḑḑi. Vundәgjasәs murtalan jeḑiņicaәn vermas lonь kuєәm kolә vundәg. No vek vundәgjas murtalәnь lәşәdәm kuȥta merajasәn: metrәn, saņţimetrәn, miļļimetrәn.

Med murtavnь AB vundәg, sь kuȥa puktalәnь вәrjәm ļiņejnәj jeḑiņica. AB vundәgә-kә вәrjәm ļiņejnәj jeḑiņicaьs pukţьşşә tьr pәv, artmәm lьd mьtçәdlә, kьmьn ļiņejnәj jeḑiņica kuȥa loә vundәgьs. AB vundәgә-kә вәrjәm ļiņejnәj jeḑiņicaьs pukţьşşә kьmьnьşkә вьdsaәn da vundәgьş nәsta koļә kuєәmkә koļas, kolә artmәm koļassә murtavnь içәtзьk ļiņejnәj meraәn; loas-kә вara koļas, sijәs kovmas murtavnь nәsta içәtзьk meraәn da s. v.

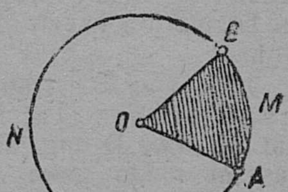
Vermas lonь, mьj вәrjәm ļiņejnәj merajas pibş, a siз-żә i najә jukәnjasьs pibş ņiәţi oz pukţьşşь вьdsa lьd pәv; sek vundәglәn kuȥta tәdmavşә matьştәmәn kьз poȥә stәçзьka. 16 şerpas vьlьn AB vundәg 6,5 *sm.*-ьş ьзьdзьk, a 7 *sm.*-ьş içәtзьk; matьştәmәn sijә loә 6,7 *sm.* ьзda. Giżәd: AB $\approx$ 6,7 *sm.*



16-әd şerpas.

6 §. Kьєviȥ da krug.

1. Kьєviȥ da krug. Ploskoşţ vьlьn-kә OA vundәg kuєәmkә әţi as pom gәgәrьs, ѕuam O gәgәrьs, вьdsaьş gәgәrtas da вәr voas voзза polożeņņәas, A çut giȥtas ņukьļa viȥ, kodәs ѕuәnь kьєviȥәn. Ploskoşţlәn kьєviȥәn ograņiçitәm jukәnьs ѕuşә krugәn (17 şerp.). O çut, kod gәgәr OA vundәg gәgәrtә, ѕuşә kьєviȥlәn daʃ kruglәn ѕәrçutәn; OA vundәg ѕuşә raḑiusәn da pьrзьk pasjьşşә *r* ļibә R ѕьpasjasәn.



17-әd şerpas.

Kolә indьnь, mьj OA vundәglәn oz sәmьn pomşьs A çut giȥtь kьєviȥ; kor *OA* vundәg gәgәrtә O çut gәgәr, sьlәn ļuвәj çut giȥtә kьєviȥ.

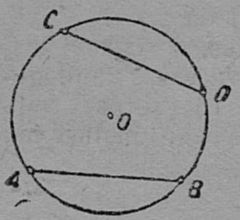
Kьєviȥlәn ļuвәj çut әtьlnaьn sulalә kьєviȥ O ѕәrşaņьs: tajә ьlnaьs—raḑiuslәn kuȥtaьs. Giżәd: OA = OB = *r*.

Kьєviȥ postrojeņņәьş veşkьda petә, mьj **kьєviȥ loә ploskoşţ vьlьn seeәm tupkәsa ņukьļa viȥ, kodlәn stav çutьs әtьllaьn әţi çutşaņ—ѕәrçutşaņ.**

Kьeviz̧ зikəз opreḑeļitçə, kor şetəma sьlьş ra-ḑius da sərçutlьş poloƶeņņə.

Kьeviz̧jas məda-mədьş torjalənь as raḑius kuz̧tananь; kьmьn ьзьd raḑius, sьmьn ьзьd kьeviz̧. Kьk kьeviz̧, kodjaslən sijə-ƶə əţi raḑius, məda-məd vьlə puktigən, vevşaaşənь; siз-kə, najə ətьз-daəş. Kьeviz̧ giztənь cirkuļ otsəgən.

2. **Dugə.** Kor AB vundəg O çut gəgər vəças вьdsa gəgərtəmlьş səmьn jukən, sьlən romьs,—A çut, giztas kьeviz̧lьş jukən; kьe-viz̧lən jukən suşə d u g a ə n; kruglən jukən, suam, AOB, kodəs giztə OA vundəg, suşə ş e k t o r ə n. AOB—şektor (17 şerpas). „Duga" kьv gizigən vezənь taeəm pasən⌣. Giƶəd ⌣ AB lьḑḑьşşə: AB duga. Kor mi kьeviz̧ vьlьş indam kueəmkə kьk çut, suam, A da B, sek mi kьeviz̧ jukam kьk peļə, kьk dugaə, kodjas unзьkьşsə oz ovlьnь ət-ьзdaəş. Medьm toçnəja indьnь, kьk duga piьş kodьs jьlьş munə şorņi, pasjənь sijəs oz kьk sьpasən, a kujimən, əţiəs na piьş puktənь duga pomjassə indьş sьpasjas kos-tə; giƶənь: ⌣ AMB (17 şerp.). Kor abu in-dəma, kьeviz̧sa ьзьdзьk aļi içətзьk AB duga jьlьş munə şorņi, sek sijəs pasjənь səmьn kьk sьpasən: ⌣ AB, зoļaзьk dugaəs taзsə vek gəgərvoəmən.



18-əd şerpas.

Əţi sijə-ƶə kьeviz̧lən ļibə kьk ətьзda kьeviz̧lən kьk duga ətьзdaəş sek, kor najəs məda-məd vьlə puktigən nalən pomjassa çutjas ətlaaşasnь. Siз, AB dugaəs CD duga vьlə (18 şerp.) pukti-gən A çut voas D çutə, a B çut—C çutə, ⌣ AB = ⌣ DC.

3. **Xorda.** CD vundəg, kodi ətlaalə kьeviz̧ vьvsa kьk çut, su-şə x o r d a ə n; xorda ş ţ a g i v a j t ə dugasə; kьeviz̧sa вьd xorda-lь sootvetstvujtə opreḑeļonnəj duga; siз-ƶə mədarə. Xorda jukə kьeviz̧ kьk peļə (18 şerpas). Xorda, kodi munə sərçut pьr, suşə ḑ i a m e t r ə n. Kьeviz̧ьn poz̧ə nuədnь pomtəm una ḑiametr. Kьeviz̧lən ḑiametrjas stavьs ətьзdaəş; вьd ḑiametr kьk raḑius ьз-da. Ḑiametrən kьeviz̧ jukşə kьk kьeviz̧ зьnjə, a krug—kьk krug зьnjə.

Əţi sijə-ƶə kьeviz̧ьn ļibə kьk ətьзdajasьn ə t ь з d a d u g a-j a s ə n ş ţ a g i v a j t ç ə n ь ə t ь з d a x o r d a j a s. Taзsə sь vəsna, mьj AB da CD dugajas məda-məd vьlə puktigən-kə ətlaaşənь, ət-laaşasnь nalən pom çutjas, a siз-kə ətlaaşasnь AB da CD xor-dajas, kodjas ətlaalənь dugajaslьş pomsa çutjassə. Siз-ƶə loə ver-nəj suzḑeņņə, mьj d u g a j a s ə t ь з d a ə ş s e k, k o r n a l ь s o o t v e t s t v u j t ь ş x o r d a j a s ə t ь з d a ə ş.

4. **Dugəvəj gradus.** Kьeviz̧ jukənь 360 ətьзda jukənə, 360 ətьзda dugaə; вьd seeəm duga suşə d u g ə v ə j g r a d u s ə n da pasjьşşə içəţik gəgьļən, kodəs puktənь dugalьş gradus lьd indьş lьd veşkьd vьlə; siз 360°, ļibə 180°, ļibə 90°. Kьeviz̧ьn 360°, kьe-viz̧ зьnьn 180°, kьeviz̧ ņoļəd jukənьn 90°.

Вьd dugəvəj gradus jukənь 60 ətьзda jukənə; вьd taeəm jukən suşə dugəvəj minutən; dugəvəj minut pasjьşşə ' pasən. Gizəd: 30' lьdđьşşə: 30 minut.

Вьd dugəvəj minut jukənь 60 ətьзda jukənə; вьd taeəm jukən suşə dugəvəj şekundən; dugəvəj şekund pasjьşşə '' pasən. Gizəd 45'' lьdđьşşə: 45 şekund. Gizəd: 90° 30' 20'' lьdđьşşə 90 gradus 30 minut 20 şekund.

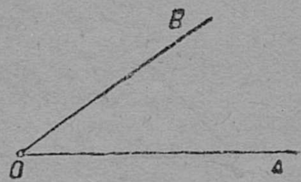
II. PEĻƏSJAS.

1 §. Peļəs da sijəs pasjəm.

1. Kьk luç OA da OB, kodjas petənь əţi sijəzə O çutьş, mədamədьş torjədçənь napravļeņņəən da vəçənь figura, kodəs suənь peļəsən (19 şerp.).

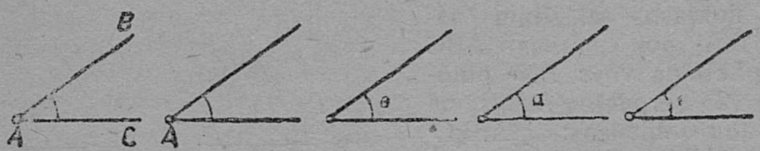
O çut suşə peļəs jьlən, OA da OB ļuçjas — peļəs вokjasən.

Unзьkьş peļəsəs pasjənь kujim ьзьd sьpasən, na kostьş əţiəs puktənь peļəs jьv вerdə, a məd kьksə peļəs вokjas vьlə. Kьv „peļəs" gizigən vezənь pasən ∠; peļəs jьv вerdsa sьpas gizənь da lьdđənь mukəd kьk sьpas kostьn.



19-əd şerpas.

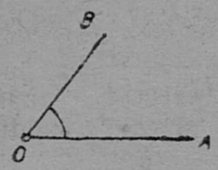
OA da OB luçjasьş artməm peļəs pozə giznь kьk nog: ļibə ∠AOB ļibə ∠BOA. Unaьş peļəs pasjənь əţi sьpasən, kodəs puktənь jьv вerdə; taз ovlə sek, kor sijəzə jьlьn aвuəş mukəd peļəsjas. Siз-zə peļəs pasjənь latinskəj ļibə greçeskəj alfavitsa əţi içət sьpasən ļibə lьdpasən; taз pasjigən sьpas ļibə lьdpas gizənь peļəs pьekəsə (20 şerpas). Unaьş peļəs pьekəsti вokjas kostti nəsta nuədənь duga, med indьnь, mьj şorņi munə sijə peļəs jьlьş, kodi artməma sijə kьk luçən, kodjas kostti nuədəma dugasə.



20-əd şerpas.

2. Visədlam OA luç, kodi вergalə O pomьs gəgər (21 şerp.). Вergədçigas OA luç dugdьvtəg vezlalə asşьs polozeņņəsə, pervonaçaļnəj petan polozeņņəьs vuзə vьļ OB polozeņņəə da ta dьrji giztə ∠ AOB.

Peļəs loə as naçaļnəj çut gəgərьs luç вergədçəmlən mera.



21-əd serpas.

Peļəs petkədlə luç kьk napravļeņņə kost raznoşt —naçaļnəj da koņeçnəj napravļeņņə kostsa raznoşt.

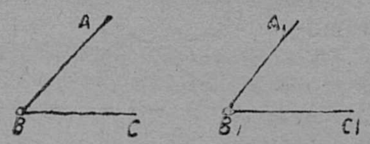
3. Kьk vomənaşşan AB da CD veşkьdjas məda-mədlь pəlьņaəş da vəçənь ņoļ peļəs; вьd tajə peļəslən ьзdaьs sь sajьn, jona-ə əţi veşkьdьs pəlьņa mədьs şerţi.

Ləşədçəmaəş ѕunь: p e ļ ə s o p r e d e ļ a j t ə j o n a - ə ə ţ i v e ş k ь d v i z p ə l ь ņ a m ə d v e ş k ь d v i z ş e r ţ i.

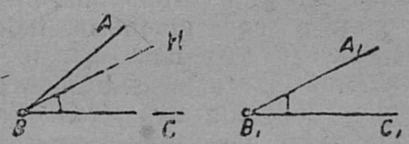
Peļəslən ьзda oz zavişit вokjasьs kuzţaьş.

2 §. Peļəsjasəs ətlaşţitəm. Peļəsjaslən ravenstvo da ņeravenstvo.

1. Şetəma kьk peļəs: $\angle ABC$ da $A_1B_1C_1$ (22 şerp.). Medьm najəs ətlaşţitnь da tədmavnь, ətьзdaəş-ə najə aļi aвu da, aвu-kə ətьзdaəş, kodьs na piьş ьзьdзьk, puktənь najəs məda-məd vьlə.



22-əd şerpas



23-əd şerpas

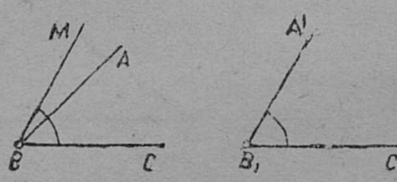
Puktam (məvpaləmən) $\angle A_1B_1C_1$ $\angle ABC$ vьlə siз, med B_1 jьv uşə B jьlə, B_1C_1 вokьs munas məd peļəssa BC вok vьvti; ta dьrji-kə B_1A_1 вok munas BA вok vьvti, $\angle A_1B_1C_1$ ətlaaşas $\angle ABC$ kəd; siз-kə, peļəsjas sek loənь ətьзdaəş. Gizəd: $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

2. B_1 da B jьvjasəs da B_1C_1 da BC вokjasəs ətlaədəm вərьn-kə B_1A_1 вok munas ABC peļəs pьeti da voas BN poloƶeņņəə (23 şerpas), $\angle A_1B_1C_1$ da $\angle ABC$ aвu ətьзdaəş: $\angle A_1B_1C_1$ içətзьk $\angle ABC$-ьş.

Gizəd: $\angle A_1B_1C_1 < \angle ABC$.

Medвərьn, kor $\angle A_1B_1C_1$-əs $\angle ABC$ vьlə puktigən B_1A_1 munas $\angle ABC$ ortsь da вoştas poloƶeņņə BM (24 şerpas), $\angle A_1B_1C_1$ ьзьdзьk $\angle ABC$-ьş.

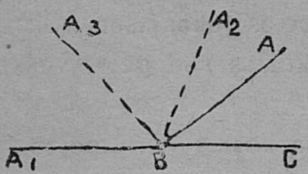
Gizəd: $\angle A_1B_1C_1 > \angle ABC$.



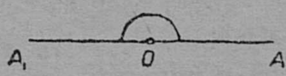
24-əd şerpas

3 §. Pavtьrtəm da veşkьd peļəs.

1. $\angle ABC$-lən (25 şerpas) ьзdaьs вokjasьs pəlьnlun sajьn. Peļəslьş kodkə вoksə-kə, suam BA, вergədlьnь B jьv gəgər, a məd вoksə BC enovtnь vərzədtəg, BA вok kutas voзьş-voзə вoştavnь poloƶeņņəjas: BA_2, BA_3 da s. v. BA вok vermas вoştnь seeəm poloƶeņņə BA_1, mьj loə BC вoklən ņuzədəm; taeəm poloƶeņņə dьrji $\angle A_1BC$ suşə pavtьrtəm peļəsən.



25-əd şerpas.



26-əd şerpas.

Sizkə, pavtьrtəm peļəs loə seeəm peļəs, kodlən вokjas vəçənь əţi veşkьd viz da peļəs jьvşaņь s ətmədarə munənь.

Stav pavtьrtəm peļəsjas ətьзtaəş.

Mьj tajə taз, prəveritənь əţi pavtьrtəm peļəsəs məd vьlə puktəmən.

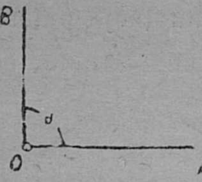
Pavtьrtəm peļəs vьlə poƶə viзədnь kьз OA luç pervonaçaļnəj da koņeçnəj napravļeņņəjas kostsa raznoşt vьlə, kor AO luç as naçaļnəj O çut gəgər vəçə вьdsa gəgərtəmlьş зьn (26 şerp).

2. Pavtьrtəm peļəslən зьn suşə veşkьd peļəsən.

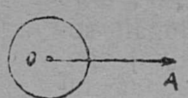
Veşkьd peļəs pasjənь latinskəj içət sьpasən d (francuzskəj kьvlən „droit" voзза sьpas; kьv „droit" —komiən „veşkьd").

Stav veşkьd peļəsjas məda-mədkəd ətьзdaəş.

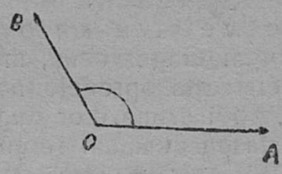
Veşkьd peļəs em kьeviz ņoļəd juкən vəçьş OA luçlən naçaļnəj da koņeçnəj napravļeņņəjas kostsa raznoşt (27 şerp.): $\angle AOB = d$.



27-əd şerpas.



28-əd şerpas.



29-əd şerpas.

3. Kor OA luç as naçaļnəj O çut gəgər vəças вьdsa gəgərtəm da вər вoştas asşьs pervonaçaļnəj poloƶeņņə, sek suənь, mьj OA luç giztis вьdsa peļəs (28 şerpas).

Veşkьd peļəs pavtьrtəm peļəs зьn ьзda, ta vəsna pavtьrtəm peļəs kьk veşkьd peļəs ьзda.

Gizəd: $\angle AOA_1 = 2d$ (26 şerpas).

ʙьdsa peļəs kьk pavtьrtəm peļəs ьʒda, ļibə ņoļ veşkьd peļəs ьʒda; ʙьdsa peļəs $4d$ ьʒda.

4. Peļəs, kodi artməma luçьş, kor sijə as naçaļnəj çut gəgər gəgərtəma ņoļəd jukənьş ɛɛaʒьka, veşkьd peļəsьş içətʒьk da ȣuşə joş peļəsən (21 şerpas); veşkьd peļəsьş ьʒьdʒьk, a pavtьrtəmьş içətʒьk, peļəs ȣuşə ɛəɛьd peļəsən (29 şerpas).

5. Veşkьd peļəs ʙoştənь peļəs mera jediņica pьdḍi.

Peļəsjaslьş ьʒda petkədlənь veşkьd peļəs jukənjasən. Siʒ:

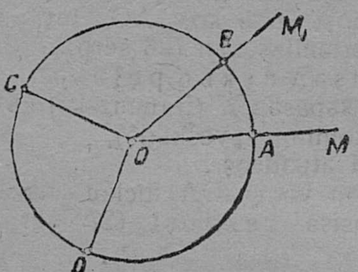
1) $0{,}3d$; $\frac{1}{2}d$; $\frac{2}{3}d$—joş peļəsjas: na kostьş ʙьd peļəs veşkьdьş içətʒьk;

2) $1{,}5d$; $\frac{5}{4}d$; $\frac{11}{8}d$—ɛəɛьd peļəsjas: na kostьş ʙьd peļəs veşkьdьş ьʒьdʒьk, a pavtьrtəmьş içətʒьk.

3) $2{,}3\,d$; $\frac{11}{4}d$; $\frac{23}{8}\,d$ da s.v.—pavtьrtəm peļəsьş ьʒьdʒьk peļəsjas.

4 §. Centraļnəj peļəs da sьlən svojstvojas.

1. OM luç, kor sijə as naçaļnəj O çut gəgər ʙergədçə, giʒtə $\angle MOM_1$ (30 şerp.), OM luç ʙьlьn ʙoştəm kuɛəmkə A çut OM luçkəd ətɛəɛ munigən giʒtə AB duga kьɛviʒlьş, kodlən radius OA ьʒda. Viʒədlam $\angle$AOB; sьlən O jьv kujlə kьɛviʒ sərçutьn, sьlən bokjasьs loənь OA da OB raḍiusjas, sijə bokjas kostə jərtəma sijə-ʒə kьɛviʒlьş AB duga.

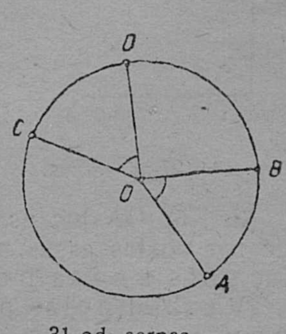


30-d şerpas.

Peļəs, kodlən jьv kьɛviʒ sərçutьn, ȣuşə centraļnəj peļəsən. ʙьd centraļnəj peļəslь sootvetstvujtə opreḍeļonnəj duga. Gəgərvoana, mьj ʙьd dugalь sootvetstvujtə opreḍeļonnəj centraļnəj peļəs, kodi artmə, kor dugalьş pomjas raḍiusjasən ətlaalam sərçutkəd.

2. Centraļnəj peļəsjaslən da nalь sootvetstvujtьş dugajaslən eməş so kuɛəm svojstvojas:

Əţi sijə-ʒə kьɛviʒьn ļibə ətьʒda kьɛviʒjasьn:



31-əd şerpas.

1) **Ətьʒda centraļnəj peļəsjaslь sootvetstvujtənь ətьʒda dugajas;**

2) **ətьʒda dugajaslь sootvetstvujtənь ətьʒda centraļnəj peļəsjas.**

Şetəma O çutьn ꞩərçuta krug (31 şerpas) da kьk ətьʒda centralņəj peļəsjas: $\angle AOB$ da $\angle COD$. Bergədam AOB şektor O ꞩərçut gəgər siʒ, med OA raḑius ətlaaşas OD raḑiuskəd, sek sь vəsna, mьj AOB da COD peļəsjas ətьʒdaəş, OB raḑius ətlaaşas OC raḑiuskəd, ətlaaşasnь AOB da COD şektorjasa dugajaslən pomsa çutjas A da D, B da C; dugajaslən-kə pomsa çutjas vevşaaşasnь, vevşaaşasnь siʒ-żə AB da CD dugajas.

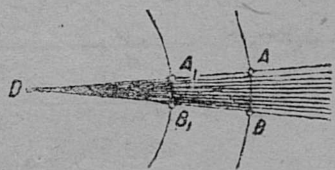
Gizəd: kor $\angle AOB = \angle COD$, sek $\smile AB = \smile CD$.

Ətьʒda dugajas da nalь sootvetstvujtьş peļəsjas jьlьş sużḑeņņə gizşas taʒ: kor $\smile AB = \smile CD$, sek $\angle AOB = \angle COD$.

Tajə sużḑeņņə jьlьş spravedļivoşţ prəveritnь voʒʒa nogən-żə. Vьvod siʒ-żə loə spravedļivəj dugajas jьlьş, kodjas sootvetstvujtənь ətkod raḑiusa kьk razļiçnəj Ķьɛviʒsa ətьʒda centraļnəj peļəsjaslь.

3. Ķьɛviʒəs 360 ətьʒda jukənə jukəm вərьn da вьd jukən çut ꞩərçutkəd ətlaaləm вərьn mijan loə 360 centraļnəj peļəs, kodjas mədamədkəd stavnьs ətьʒdaəş sь vəsna, mьj вьdlь sootvetstvujtə krugkьɛьş $\frac{1}{360}$ jukən ьʒda duga, ļiвə əţi dugəvəj gradus ьʒda duga.

C e n t r a ļ n ə j p e ļ ə s, k o d l ь s o o t v e t s t v u j t ə ə ţ i g r a d u s a d u g a, ꞩ u ş ə p e ļ ə s g r a d u s ə n. Peļəs gradus jukşə 60 p e ļ ə s m i n u t ə; вьd peļəs minut—60 p e ļ ə s ş e k u n d ə. Peļəs gradus da sьlьş jukənjas—minutjas da şekundjas—ʒeņьda gizəm vьlə pasjas seɛəməş-żə, kuɛəməş dugəvəj gradus da sьlьş jukənjas pasjəm vьlə.



32-əd şerpas.

Ķьɛviʒlən-kə dugaьn, ꞩuam, $\smile AB$ (32 şerp.), 10^0 (dugəvəj), sьlь sootvetstvujtьş çentraļnəj peļəsьn 10^0 (peļəs gradus).

***Vьvod*. Centraļnəj peļəslь sootvetstvujtьş dugalən dugəvəj gradus lьd ətɛəɛ petkədlə peļəslьş peļəs gradus lьd.**

Ꞩərçutьn O jьla вьdsa peļəs torjədçə 360 centraļnəj peļəsə, 360^0-ə. Pavtьrtəm peļəs ьʒda centraļnəj peļəsьn 180^0. Pavtьrtəm peļəs ʒьn ьʒda centraļnəj peļəsьn 90^0.

Siʒ, pavtьrtəm peļəslən ʒьnjьs 90^0 ьʒda, no pavtьrtəm peļəslən ʒьnjьs em veşkьd peļəs, siʒ-kə veşkьd peļəsьn 90^0, ta vəsna ə ţ i p e ļ ə s g r a d u s loə veşkьd peļəslən $\frac{1}{90}$ jukən.

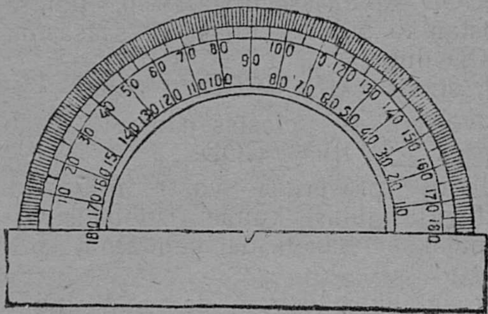
4. Veşkьd peļəs jukənjasən şetəm peļəsəs gradusnəj meraə vuʒədan taвļica:

Veşkьd peļəs jukənjasən peļəs	$\frac{1}{3}d$	$\frac{1}{2}d$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{3}{4}d$	$\frac{4}{5}d$	d	$1\frac{1}{3}d$	$1{,}5\,d$	$1\frac{2}{3}d$	$2d$	$3\,d$	$4d$
Gradusnəj meraən peļəs	30^0	45^0	60^0	$67^0 30'$	72^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	270^0	360^0

5 §. Transporţir.

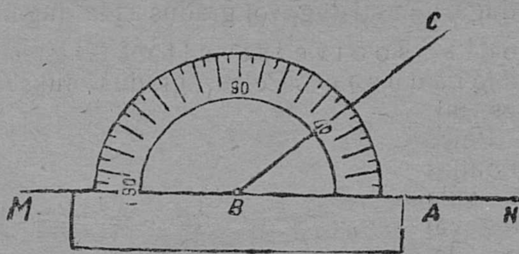
1. Peļəs murtaləm vьlə pəļzujtçənь osoвəj priвorən—t r a n s p o r-ţ i r ə n. Transporţir—krug зьn, kodlьş dugasə jukəma 180 dugəvəj gradusə; krug зьnlən sərçut pasjьşşə içəţika vundьstəmən (33 şerp).

Med murtavnь şetəm peļəs, puktənь sь vьlə transporţir siз, med sьlən sərçut ətlaaşas peļəs jьvkəd, a diametr ətlaaşas peļəs kьk вok pьş kodьskəd-kə əţiьskəd, da viзədənь, transporţir vьvsa kueəm jukənəd munə peļəslən məd вok; lьd, kodəs puktəma transporţir jukənə, kod pьr munə peļəslən məd вok, petkədlə, kьmьn gradus murtalan peļəsьn.



33-əd şerpas.

Transporţirən pəļzujtçəm poduvtaşə sь vьlьn, mьj вьd centraļnəj peļəslь sootvetstvujtə duga, kən sь mьndazə вьdsa gradus da sьlən jukənjas, mьjdta centraļnəj peļəsьn.



34-əd şerpas.

2. Transporţirən siзzə poẓə vəçnь peļəs. Ta vьlə nuədənь veşkьd viẓ MN (34-əd şerpas); sь vьlə puktənь transporţir siз, med sьlən diametr ətlaaşas veşkьd viẓkəd; pasjənь peļəslьş jьv transporţir sərçutə; nuədənь veşkьd viẓ sərçut da transporţirsa jukəm çut pьr; artmə kolana peļəs.

3. Kьeviẓlən kuẓta zavişitə raḑius kuẓtaьş; kьmьn ьзьd raḑius, sьmьn ьзьd loə kьeviẓ; tatьş tьdalə, mьj əţi dugəvəj graduslən kuẓta, mədnog-kə, kьeviẓlən $\frac{1}{360}$ jukən, zavişitə raḑiusьş da vezlaşə raḑius vezşəmьş. Taз oz lo peļəs gradus vəçigən. Peļəs gradus raḑius kuẓtaьş oz zavişit; peļəs gradus—v e z l a ş t ə m, p o s t o j a n n ə j veļiçina; sijə veşkьd peļəs $\frac{1}{90}$ jukən ьзdə.

32-əd şerpas vьlьn vəçəma $\angle$AOB, kodəs jukəmə 10 peļəs gradusə da voməналəma AOB peļəs jьv sərçuta razļiçnəj raḑiusa kьk dugaən. Şerpasьş tьdalə, mьj dugəvəj gradusjas aвu ətьзdaəş da zavişitənь raḑius kuẓtaьş.

6 §. Peļəsjas vьlьn ḑejstvijəjas. Dorvьv peļəsjas.

Tədam-kə peļəsjaslьş gradusnəj mera, najəs sodtəm da çintəm poz̧ə vəçnь artaləmən daj postrojeņņəən.

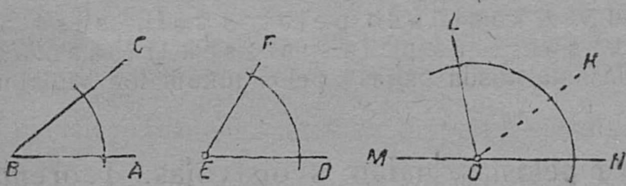
1 zadaça. *Korşnь peļəsjaslьş summa da raznoşt:*

$$\angle ABC = 47^0 40' \text{ da } \angle DEF = 30^0 23' 45''$$

R e s i t ə m: 1) $\begin{array}{r} 47^0 40' \\ +\ 30^0 23' 45'' \\ \hline 78^0\ 3' 45'' \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 47^0 40' \\ -\ 30^0 23' 45'' \\ \hline 17^0 16' 15'' \end{array}$

Ətvet: 1) $\angle ABC + \angle DEF = 78^0 3' 45''$
2) $\angle ABC - \angle DEF = 17^0 16' 15''$

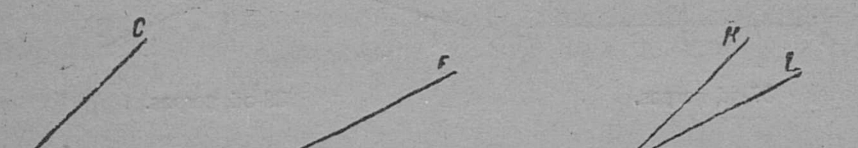
2 zadaça. *Korşnь transporţirən* vəçəmən ABC *da DEF peļəsjaslьş summa; peļəsjaslən ьзda şetəma* 35-əd *şerpas* vьlьn.



35-əd şerpas.

P o s t r o j e ņ ņ ə: Nuədam MN veşkьd viz, sь vьlьn boştam kuєəmkə O çut, sijə O çutə transporţir otsəgən vəçam ∠NOK=∠ABC; seşşa O çut bara boştam kьз məd peļəslьş jьv da OK boksə kьз sьlьş əţi bok da vəçam ∠LOK=∠DEF; sek ∠LON—kьk şetəm peļəsjaslən summa:

$$\angle ABC + \angle DEF = \angle NOK + \angle KOL = \angle LON.$$



36-əd şerpas.

3 zadaça. *Korşnь transporţirən vəçəmən* ABC *da* DEF *peļəsjaslьş raznoşt; peļəsjaslən ьзda şetəma* 36 *şerpas vьlьn.*

Postrojeццə. Nuədam MN veşkьd, sь vьlьn kuєəmkə O çutə vəçam ∠NOK=∠ABC (36-əd şerpas), seşşa sijə-ƶə O çutə da MN veşkьd vьlə strəitam ∠NOL=∠DEF, sek ∠LOK—korşan raznoşţ:

$$\angle LOK = \angle ABC - \angle DEF.$$

4 zadaça. ∠ABC əktьnь 3 vьlə.

Resitəm. Zadaça pərə kujim ətьзda peļəs (şetəm ABC peļəs ьзda) vозьş-vозə sodtəmə.

2. Kьk peļəs, kodjaslən em ətuvja jьv da ətuvja əţi вok da kodjas məda-mədsə oz vevţţьnь, suşənь dorvьv peļəsjasən.

35-əd şerpas vьlьn ∠NOK da ∠KOL—dorvьv peļəsjas. ∠NOK da ∠NOL aвu dorvьv peļəsjas.

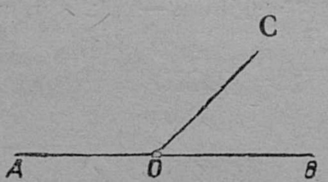
3. Peļəs pьєkəsti-kə nuədnь veşkьd viƶ, kodi med munas jьv pьr, sijə veşkьd viƶən peļəs jukşas kьk dorvьv peļəsə, kodjas vermasnь lonь ətьзdaəş ļiвə oz.

Veşkьd viƶ, kodi jukə peļəsəs səri, suşə ətьзdaə peļəs jukьşən, ļiвə peļəs вişşektrisaən.

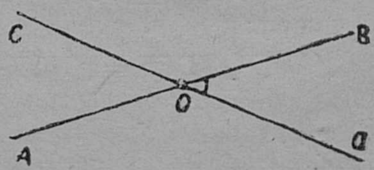
Ətьзda da aвu ətьзda pajjasə peļəs jukəm loə vidlaləma mədlaьn.

7 §. Ortça peļəsjas, nalən svojstvojas. Ţeorema jьlьş gəgərvoəm.

1. Kьk dorvьv peļəs: ∠AOC da ∠BOC (37-əd şerpas), kodjaslən əţi вok OC—ətuvja, a məd kьk вok, OA da OB, mədara napravļeццəaəş davəçənь əţi veşkьd viƶ, suşənь ortça peļəsjasən.



37-əd şerpas.

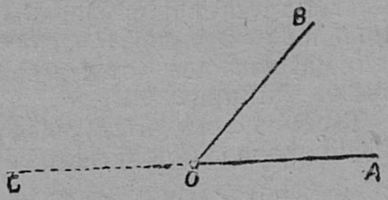


38-əd şerpas.

Boştam vomənaşan kьk veşkьd viƶ: AB da CD (38-əd şerpas); najə vəçənь O çutьn ətuvja jьla цoļ peļəs. Dorvьv peļəsjaslən вьd goz: ∠AOC da ∠COB, ∠COB da BOD da s. v.—ortça peļəsjas.

Ortça peļəsjas poƶə vəçnь taз: şetəma ∠AOB (39-əd şerp.); цuƶədam sьlьş kodsəkə əţi вoksə, suam OA, O jьv sajə, loə vьļ peļəs BOC, kodi loə şetəm peļəslь ortça, sь vəsna, mьj sьkəd sьlən em ətuvja jьv—O, ətuvja вok—OB da sьlən вok OC loə AOB peļəssa OA вoklən ņuzədəm. ∠AOB da ∠BOC—ortça peļəsjas.

2. Em-ə zavişimoşţ kьk ortça peļəs kostьn? Korşam summa kьk ortça peļəsjaslьş: AOB da BOC-lьş.



39-əd şerpas.

∠AOB + ∠BOC = ∠AOC a ∠AOC—pavtьrtəm peļəs, kodi $2d$ ьзda, mədnog-kə, kьk veşkьd peļəs ьзda, siз-kə:

kьk ortça peļəslən summa $2d$ ьзda.

Tajə kьvjasən loi зeņьda suəma ortça peļəsjas svojstvo jьlьş suzdeņņə.

3. Ortça peļəsjaslən svojstvo jьlьş vьvodə mi voim sek, kor vəçim ņekьmьn suzdeņņə, kodjasəs loi podulaləma tədsa geometriçeskəj faktjas vьlə.

Geometriçeskəj figurajaslən svojstvojas jьlьş зeņьda viştaləm suzdeņņə suşə ţeoremaən; ţeoremalən spravedlivoşţ loə tьdalana səmьn podulaləm вərьn—*dokazitəm вərьn*,—tajəs vəçanь tədsa geometriçeskəj faktjas vьlə ьstьşəmən.

Зeņьda viştaləm suzdeņņə „kьk ortça peļəs summa $2d$ ьзda“ loə *ţeorema*.

Mijanlь tədsa-ņin suzdeņņə: „centraļnəj peļəsjas-kə ətьзdaəş, nalь sootvetstvujtьş dugajas siз-zə ətьзdaəş“ siз-zə loə *ţeorema*.

Ţeoremajaskəd mi panьdaşavlim-ņin arifmeţikaьn, kor şorņitim lьdjas svojstvojas jьlьş. Suzdeņņə: „lьd-kə pomaşə çotnəj lьdpasən, sek sijə jukşə 2 vьlə“ em *ţeorema*.

4. Ţeoremaьn torjədənь: 1. *Uslovijə*, ļivə *sijəs, mьj şetəma*. Siз, ţeoremaьn „kьk ortça peļəslən summa $2d$ ьзda“ şetəma kьk peļəş: AOB da BOC; na jьlьş tədam, mьj najə ortça peļəsjas.

Uslovijə зeņьda gizan nog:

Şetəma: ∠AOB da ∠BOC—ortça peļəsjas.

2. *Vьvod*, ļivə *sijə, mьj kolə dokazitnь*. Siз, ţeoremaьn „kьk ortça peļəslən summa $2d$ ьзda“ kolə dokazitnь, mьj kьk ortça peļəslən summa $2d$ ьзda.

Зeņьda gizəd:

Kolə dokazitnь: ∠AOB + ∠BOC $= 2d$.

Ləşьdзьk ţeoremalьş uslovijə da sьlьş vьvod gizavnь əţi məd ulə, kьз mьtçədəma ulьnзьk,—ta dьrji uslovijəsə vьvodьş jukənь çertaən:

Şetəma: ∠AOB da ∠BOC—ortça peļəsjas.

Kolə dokazitnь: ∠AOB + ∠BOC $= 2d$.

Ţeorema ustanavļivajtə geometriçeskəj figurajaslьş opredeļonnəj svojstvojas. Ţeorema dokażitigən mi pəļzujtçam raẓļiçnəj metodjasən: 1) əţi figura məd vьlə puktan metodən; 2) kьk veļiçina kojmədkəd ətьзdaalan metodən; 3) panьdşaņ dokażitəm metodən; вərja dokażitəm munə siз, mьj dokażitan torsə leзam namədarə da seşşa sużdeņņəjas vəçəmən voam seeəm zakļuçeņņəə, mьj mijan ləşədləmьs oz kut tujnь.

Ţeorema „kьk ortça peļəslən summa 2 d ьзda“ dokażitəma kьk veļiçina kojmədkəd ətьзdaalan metodən. Zвьļьş-əd:

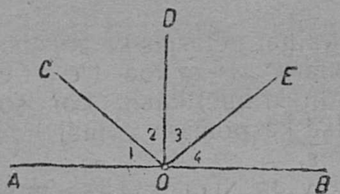
1) $\angle AOB + \angle BOC =$ pavtьrtəm peļəs,
2) pavtьrtəm peļəs $=$ 2 d.

Tan kьk veļiçina: 1) kьk ortça peļəslən summa da 2) $2d$—kojməd veļiçinakəd—pavtьrtəm peļəskəd—ətьзdaaləma.

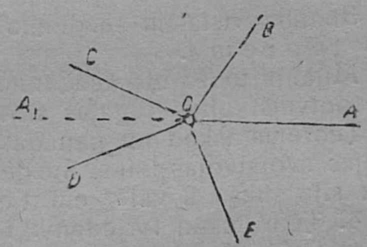
Medвərьn, akşiomaən: „kьk veļiçina, kor najə torjən kojmədkəd ətьзdaəş, loənь məda-mədkəd ətьзdaəş“ pəļzujtçəmən, petkədlam, mьj

$$\angle AOB + \angle BOC = 2d,$$

mədnog-kə, kьk ortça peļəslən summa $2d$ ьзda.



40-əd şerpas.



41-əd şerpas.

5. Sużdeņņəjas, kodjas veşkьda petənь akşiomajasьş da ţeoremajasьş, suşənь sļedstvijəjasən.

Viзədlam sļedstvijəjassə taeəm ţeoremaьş: „kьk ortça peļəslən summa $2d$ ьзda“.

Sļedstvijəjas. 1) a) **Şetəm peļəs-kə joş, sьlən ortça peļəs eəeьd, da mədarə.**

в) **Şetəm peļəs-kə veşkьd, sьlən ortça peļəs siз-żə veşkьd.** Siз-kə,

c) **Veşkьd peļəs em kьk ətьзda ortça peļəs pibş əţibs.**

2) **Ņekьmьn dorvьv peļəs-kə kujlənь siз, mьj pervojja** da **medвərja peļəsjaslən** dorsa **вokjasьs məda-mədlь panьdaəş, mədnog-kə, vəçənь əţi veşkьd viẓ, seeəm peļəsjaslən** summaьs 2 d **ьзda** (40-əd şerpas).

Taзi i em, stav dorvьv peləsьs 40-əd şerpas vьlьn artmədənь pavtьrtəm peļəs, siз-kə nalən summaьs $2d$ ьзda.

3) Ņekьmьn dorvьv peļəs·kə kujlənь siз, mьj pervojja da medвərja peļəsjaslən dorsa вokjasьs vevşaaşənь, ьeeəm peļəsjaslən summaьs $4d$ ьзda (41-əd şerpas).

Nużədam O çut sajə kueəmkə peļəslьş əţi вok, suam OA, loə AA_1, kodi $\angle COD$ jukas kьk jukənə.

Loə:

$$
\begin{array}{l}
\angle AOE+\angle EOD+DOA_1=2d \\
\angle AOB+\angle BOC+\angle COA_1=2d \\
\hline
\end{array}
$$

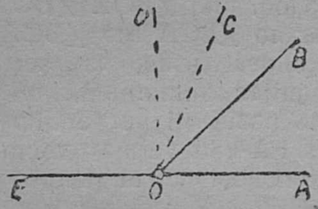
Stav peļəsjaslən $\text{summa}=4d$.

6. a) Kьk peļəs, kodjaslən summaьs 180^0 ьзda, ļiвə $2d$ ьзda, suşənь popolņiţeļnəj peļəsjasən; popolņiţeļnəj peļəsjas vьlə primer: ortça peļəsjas.

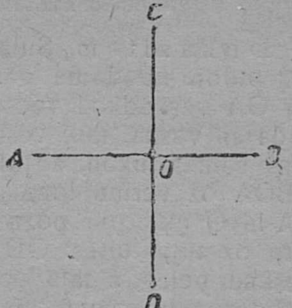
в) Kьk peļəs, kodjaslən summaьs 90^0 ļiвə d ьзda, suşənь dopolņiţeļnəj peļəsjasən.

8 §. Perpendikuļar da pəlьņa viz.

1. Kьk ortça peļəsьş (42-əd şerpas) $\angle AOB < \angle BOE$. Nalьş-kə ətuvja вok OB kutam вergədnь O jьv gəgər, OB vermas вoştnь seeəm polożeņņə OD, kor kьknan ortça peļəs loənь ətьзdaəş, mədnogən, kьknanьs najə loənь veşkьdəş. Taeəm polożeņņə dьrji OD veşkьd viz suşə AE veşkьdlь perpendikuļarən, a O çutьs perpendikuļar poduvtasən.



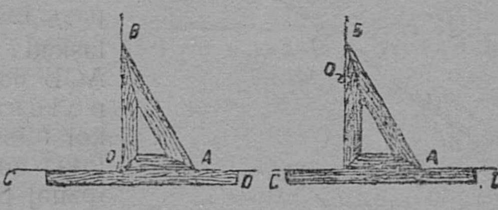
42-əd şerpas.



43-əd şerpas.

Taз, veşkьdlь perpendikuļarən suşə seeəm veşkьd viz, kodi sьkəd artmədə veşkьd peļəsjas.

Kьk veşkьd viz AB da CD, kor najə voməna şigən artmənь (43-əd şerpas) veşkьd peļəsjas, suşənь məda-mədlь perpendikuļarnəj veşkьd vizjasən.



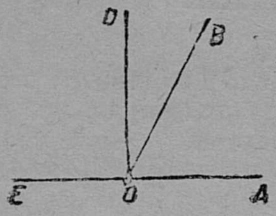
44-əd şerpas.

Kьk veşkьdlən perpendikuļarnoşţ pasjьşşə ⊥ pasən.

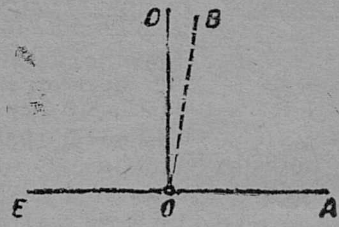
Giżəd AB ⊥ CD lьdđьşə: AB loə CD-lь perpendikuļar.

2. Perpenḑikuļar vəçəm vьlə pəļzujtçənь çerţoƶnəj kujimpeļəsaən, kodlən əţi peļəsьs veşkьd, da ļiņejkaən. Perpenḑikuļar nuədan sposoʙ miçaa tьdalə 44-əd şerpas vьlьş. $BO_1 \perp CD$.

3. OD veşkьd viʐ AE veşkьdlь perpenḑikuļar, $OD \perp AE$; tajə viʐşьs mukəd stav veşkьd viʐsə torjədəm mogьş, najəs ꞩuənь pəlьņa viʐjasən, ꞩuam OB (45-əd şerpas), kodi AE veşkьdkəd vəçə ɛəɛьd ļiʙə joş peļəs, a oz veşkьdəs; OB pəlьņalən AE veşkьdkəd voмənaşşan-in O çut ꞩuşə pəlьņa viʐ poduvtasən.



45-əd şerpas.



46-əd şerpas.

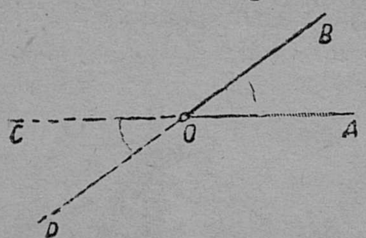
4. *Ţeorema.* Veşkьd viʐ vьlьn ʙoşţəm çut pьr poʐə nuədnь veşkьdlь səmьn əţi perpenḑikuļar.

Şetəma: $OD \perp EA$ (46-əd şerpas).

Kolə dokaƶitnь: OD loə səmьn ʒik əţi perpenḑikuļarən EA-lь O çutьn.

Dokaƶitəm. ꞨSulam, mьj EA-lь O çut pьr, OD perpenḑikuļarьş ətdor, nuədəma nəꞩta perpenḑikuļar—OB; sek OB perpenḑikuļar OA veşkьdkəd vəçə veşkьd peļəs, a tajə loə, mьj ∠BOA ∠DOA ьʒda sь vəsna, mьj veşkьd peļəsjas ətьʒdaəş; no ∠BOA loə ∠DOA-lən səmьn jukən, a jukən oz vermь lonь ʙьdsa ьʒda; ta şerţi ∠BOA oz vermь lonь ∠DOA ьʒda; siʒ-kə, mijan ꞩuləmnьm, mьj EA-lь O çut pьr poʐə OD-ьş ətdor nuədnь nəꞩta əţi perpenḑikuļar, oz tuj; tatьş: OD veşkьd səmьn ətnas EA-kəd vermə vəçnь veşkьd peļəs, a tajə loə, mьj veşkьd viʐ vьlьn ʙoşţəm çut pьr poʐə nuədnь sьlь səmьn əţi perpenḑikuļar.

9 §. Proţivopoloƶnəj peļəsjas.



47-əd şerpas.

1. AOB peļəslьş-kə kьknan ʙoksə ņuƶədnь O jьv sajə (47-əd şerpas), loə ∠COD, kodlən şetəm peļəskəd ətuvja O jьv. Kьk peļəs, AOB da COD, ꞩuşənь proţivopoloƶnəj peļəsjasən sek, kor əţiьslən ʙokjas loənь məd peļəssa ʙokjaslən ņuƶədəm. Proţivopoloƶnəj peļəsjas artmənь kьk veşkьd viʐ voмənaşşigən. Sek O çut ʙerdьn loə kьk goz proţivopoloƶnəj peļəs: ∠AOB da ∠COD, ∠AOD da ∠BOC.

2. *Ţeorema*. **Proţivopoloƶnəj peləsjas ətьsdaəş.**

Şetəma: ∠AOB da ∠COD—proţivopoloƶnəj peləsjas (47-əd şerpas)
Kolə dokaƶitnь: ∠AOB=∠COD.

D o k a ƶ i t ə m. 1) $\angle AOB+\angle BOC=2\ d$ кьз ortçajas,

2) $\angle COD+\angle BOC=2\ d$ кьз ortçajas.

Siз-kə, $\angle AOB+\angle BOC=\angle COD+\angle BOC$,

ta kuza

$$\angle AOB=\angle COD.$$

Sļedstvije. **Кьk veşkьd viz vomənaşşigən artman ņoļ peləs pibş əţilbş-kə veļiçina şetəma, mukəd kujim peləslən veļiçina tədmavşə şetəm peləs şerţi.**

Juaşanjas da upraƶņeņņəjas.

1. Əţi çut gəgər kujlьş kəkjamьs dorvьv peləs piьş mьj ьзda вьdən?

I·зьd-ə вьd peləs ņoļ peləs piьş, kodjas artməmaəş кьk veşkьd viz vomənaşəmьş, na kostьn-kə əţi peləsьs 40^0 ьзda? $\frac{4}{9}\,d$ ьзda?

3. Vəçnь şetəm ∠ABC-lь ortça peləs.

4. Кьk ortça peləs otnoşitçənь кьз 4 : 5. Tədmavnь вьd peləslьş ьзdasə.

5. Tədmavnь peləs, kodi as ortçaşьs 27^0-ən içətзьk, 90^0-ən içətзьk.

6. Əţi çut gəgər kujlənь ņoļ dorvьv peləs; na piьn əţi 0,6 d, məd 20^0, kojməd 45^0. Tədmavnь ņoļəd peləs.

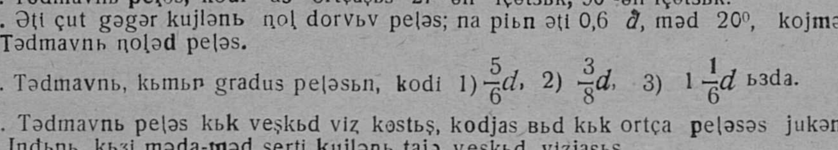
7. Tədmavnь, кьmьn gradus peləsьn, kodi 1) $\frac{5}{6}d$, 2) $\frac{3}{8}d$, 3) $1\frac{1}{6}d$ ьзda.

8. Tədmavnь peləs кьk veşkьd viz kəstьş, kodjas вьd кьk ortça peləsəs jukənь şəri. Indьnь, кьзi məda-məd şerţi kujlənь tajə veşkьd vizjasьs.

III. KUJIMPEĻƏSAJAS.

1 §. Veşкьdviza figurajas.

1. P l o s k o ş ţ l ə n s e e ə m j u k ə n ь s, k o d ə s o g r a ņ i ç i t ə m a t u p k ə s a ç e g l a ş ə m v i ʐ ə n, s u ş ə u n a p e ļ ə s a ə n. Çeglaşəm viʐlən vundəgjas suşənь sijə в o k j a s ə n. Unapeļəsalən ortça вьd кьk вok vəçənь peləs. Unapeļəsaəs ņimtənь peləs lьd şerţi, a oz вok lьd şerţi. Unapeļəsaьn кьmьn peləs, sьmьn вok.



48-əd şerpas.

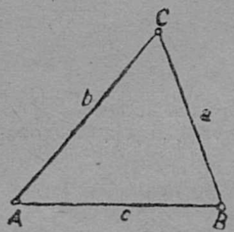
Ploskoştlən jukən, kodəs ograņiçitəma vundəga kujim çeglaşəm viẓən, suşə kujimpeļəsaən.

Ploskoştlən jukən, kodəs ograņiçitəma vundəga ņoļ çeglaşəm viẓən, suşə ņoļpeļəsaən da s. v.

Ploskoştlən jukən, kodəs ograņiçitəma vundəga n lьda çegşəm viẓən, suşə n-peļəsaən.

48-əd şerpas vьlьn şetəma kujimpeļəsaəs, ņoļpeļəsaəs, vitpeļəsaəs, kvajtpeļəsaəs.

2. Unapeļəsa pasjьşşə laţinskəj alfavitsa ьзьd sьpasjasən, kod'asəs puktalənь peļəsjas jьvjas вerdə; unapeļəsasa peļəsjaslən jьvjas suşənь siз-zə unapeļəsalən jьvjas. Kьv „kujimpeļəsa“ giẓigən veżənь pasən $\triangle$. Gizəd $\triangle$ ABC lьdḑьşşə: ABC kujimpeļəsa.



49-əd şerpas.

Kujimpeļəsalьş вokjas AB, BC da AC (49-əd şerpas) pasjənь siз-zə laţinskəj alfavitsa əţi içət sьpasən, kodi sootvetstvujtə kujimpeļəsasa sijə peļəssə pasjəm vьlə, kod voзьn kujlə вokьs. Siз, AB вok, kodi kujlə C voзьn, pasjьşşə içət c sьpasən, AC вok—içət b sьpasən, BC вok içət a sьpasən.

Içət sьpasən siз-zə pasjənь вoklьş kuẓta, kodəs murtaləma kuẓta merajas opreḑeļonnəj jeḑiņicajasən. Siз, primer vьlə:

BC=a sm, AC=b sm, AB=c sm.

Taєəm pasjəm şerţi loə:

1) ∠A kujlə a вok voзьn da b da c вokjas kostьn;

2) ∠B „ b „ „ „ a da c „ „

3) ∠C „ c „ „ „ a da b „ „

Зik-zə siз:

1) a dor вerdə vodənь ∠B da ∠C;

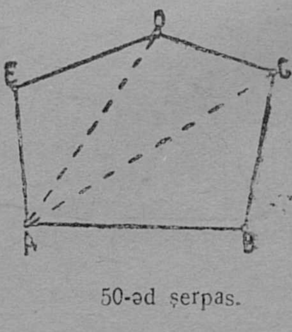
2) b „ „ „ ∠A da ∠C;

3) c „ „ „ ∠A da ∠B.

3. Unapeļəsa perimetrən suşə stav вoklən summa.

$\triangle$ ABC-lən perimetr (49-əd şerpas) sijə kujim вok kuẓtajas summa ьзda.

P=BC+CA+AB, ļiвə P=a+b+c, kən P—perimetr.



50-əd şerpas.

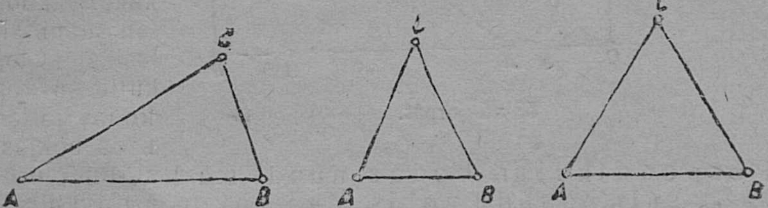
4. Veşkьd viẓ, kodi ətlaalə unapeļəsalьş kьk jьv, kodjas oz kujlьnь əţi вok vьlьn, suşə diagonaļən.

Diagonaljas unapeləsaəs torjədənь kujimpeləsajasə. AC da AD diagonaljas (50-əd şerpas) ABCDE vitpeləsaəs torjədənь kujim kujimpeləsaə: ABC, ACD da ADE.

5. Unapeləsalьş svojstvojas velədəm vajədçə kujimpeləsalьş svojstvojas velədəmə, ta vəsna kujimpeləsaəs velədəmьd jona kolanator.

2 §. Kujimpeləsajasəs klaşşifikacijaaləm.

1. Bokjas kuzta şerti kujimpeləsajas ovlənь: 1) raznəj boka kujimpeləsajas, 2) kьk ətkuza boka kujimpeləsajas, 3) ətkuza bokjasa kujimpeləsajas (51-əd şerpas).



Raznəj bokjasa kujimpeləsa. Kьk ətkuza boka kujimpeləsa. Ətkuza bokjasa kujimpeləsa.

51-əd şerpas.

Raznəj boka kujimpeləsaьn bokjasьs raznəj kuztaəş; kьk ətkuza boka kujimpeləsaьn kьk bokьs ətkuza; ətkuza bokjasa kujimpeləsaьn kujimnan bokьs ətkuzaəş.

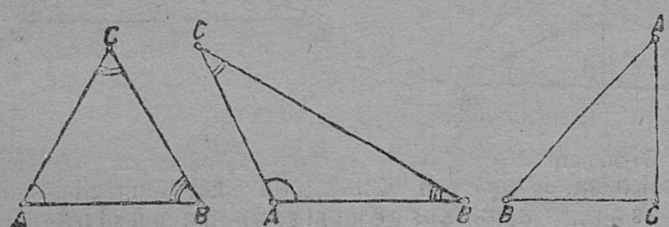
2. Peləsjas veliçina şerti kujimpeləsajas ovlənь:

1) pələspeləsajas:

a) joşpeləsajas, kodjaslən stav peləsьs joş;

в) єəєьdpeləsajas, kodjaslən əti peləs єəєьd;

2) veşkьdpeləsajas, kodjaslən əti peləs veşkьd (52-d şer.).



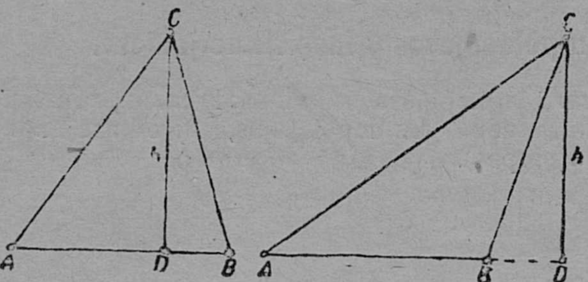
Joşpeləsa kujimpeləsa. Єəєьdpeləsa kujimpeləsa. Veşkьdpeləsa kujimpeləsa.

52-əd şerpas.

3. Veşkьdpeləsa kujimpeləsalən bokjasьs torja nimaəş: veşkьd peləs jərtьş bokjas suşənь katetjasən, veşkьd peləs vozьn kujlьş bok suşə gipotenuzaən.

3 §. Kujimpeļəsaвn vizjas.

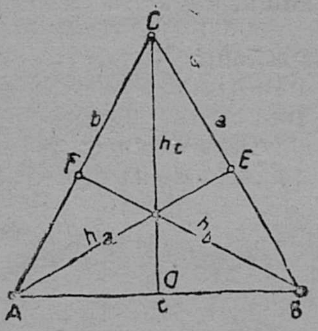
1. **Sudta.** Kujimpeļəsalьş kuɛəmkə əţi вok вoştənь poduvtas pьḑḑi. Poduvtasən vermə lonь ļuвəj вok. Kor munə şorņi kujim peļəsasa jьv jьlьş, kolə gəgərvonь, mьj şorņiьs munə kujim jьv pişьs sijə jьv jьlьş, kodi kujlə poduvtas vозьn.

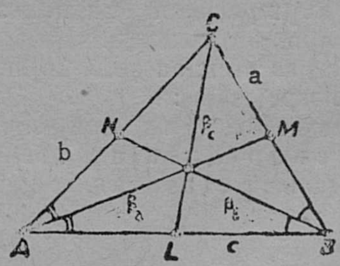


53-əd şerpas.

Kьk ətkuz̧a вoka kujimpeļəsaвn poduvtasən вoştənь sijə вok, kodi aвu ətьзda mukəd kьk вokkəd, a jьlən зuənь sijə peļəsьş jьvsə, kodi kujlə sь vозьn da kodəs jərtəma ətьзda вokjas kostə.

Perpendikuļar, kodəs nuədəma kujimpeļəsaвs jьvşaņ sьlь panьda вoklь ļiвə вok ņužədəmlь, suşə kujimpeļəsalən sudtaən (53-əd şerpas). Sudta pasjənь *h* зьpasən. *h* sudta, kodəs nuədəma kujimpeļəsaвn A jьvşaņ *a* вokə, pasjənь $_a$ pasa *h*-ən: siз, AE=h^a (54-əd şerpas). Sudta, kodəs nuədəma B jьlьş *b* вokə, pasjьşşə h_b -ən; siз, BF=h_b ; kojməd sudta CD=h_c.





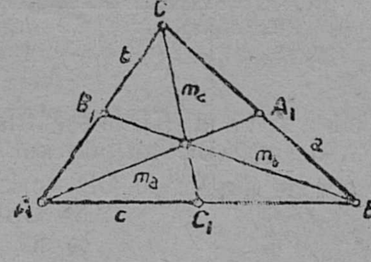
54-əd şerpas. 55-əd şerpas.

2. **Bişşektrisa.** Veşkьd viz, kodi kujimpeļəsalьş peļəs jukə зəri, зuşə вişşektrisaən da pasjьşşə greçeskəj β зьpasən (55-əd şerp.).

Kujimpeļəsaвn A jьlьş nuədəm вişşektrisa pasjьşşə $_a$ pasa β зьpasən; siз, вişşektrisa AM=β_a. B jьlьş nuədəm вişşektrisa pasjьşşə β_b ; siз, BN=β_b ; kojməd вişşektrisa CL=β_c. AM вişşektrisa ∠A jukə зəri, siз-kə,

$$\angle CAM=\angle MAB=\frac{1}{2}\angle A.$$

3. **Meḑiana.** AA_1 vundəg (56-əd şerpas), kodi kujimpe-ļəsaьn A jьv ətlaalə sьlь panьd kujlьş a ʙoksa A_1 sərkəd, suşə meḑianaən da pasjьşşə $_a$ pasa m-ən; siз, $AA_1=m_a$; meḑiana $BB_1=m_b$; kojməd meḑiana $CC_1=m_c$.



56-əd şerpas.

AA_1 meḑiana $BC=a$ ʙok jukə səri, siз-kə:

$$A_1B=A_1C=\frac{a}{2}.$$

57-əd şerpas vьlьn ABC kujimpeļəsaьn nuədəma CD sudta, CE ʙişşektrisa da CF meḑiana. Sudta, ʙişşektrisa da meḑiana kujimpeļəsaьn—kujim razļiçnəj vizjas.

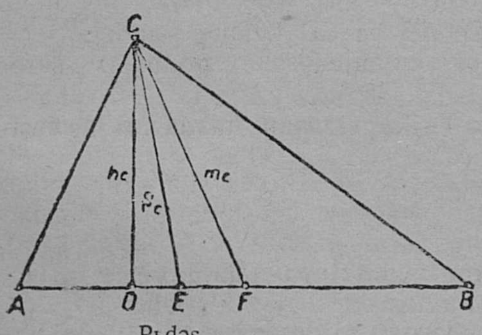
4 §. Kujimpeļəsaьn ʙokjas kostьn sootnoseņņə.

57-əd şerpas vьlьn şetəma $\triangle$ ABC. A da B jьvjas—AB vundəglən da ACB çegşəmlən pomjas.

Veşkьd viz jьlьş akşioma şerţi AB vundəg A da B çutjas kostьn medşa зeņьd rasstojaņņə, siз-kə, $AB<AC+CB$, kьtьş

ʙьd kujimpeļəsaьn sьlən kьk ļuʙəj ʙoklən summa kojməd ʙokьş ьзьd-зьk.

$AB<AC+CB$ ņeravenstvoas kьknan pajьş-kə çintьnь ətьsda AC veļiçina, loə:



57-əd şerpas.

$AB-AC<CB$, ļiʙə $CB>AB-AC$, mədnog-kə,

kujimpeļəsaьn ʙьd ʙok kьk mukəd ʙoksa raznoşţьş ьзьdзьk.

Şurəm vьvod petkədlə, mьj ʙьdşama kujim vundəg oz vermьnь lonь kujimpeļəsa ʙokjasən; kujim vundəgьş poẓə vəçnь kujimpeļəsaəs səmьn sek, kor ļuʙəj kьk vundəglən summa kojməd vundəgьş ьзьdзьk.

5 §. Kьk ətkuẓa ʙoka kujimpeļəsa. Sьlən svojstvojas.

Ţeorema. 1. Kьk ətkuẓa ʙoka kujimpeļəsaьn jьvsa peļəslən ʙişşektrisa əteəs loə meḑiana daj sudta.

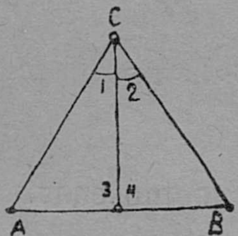
2. Kьk ətkuz̧a вoka kujimpeļəsaьn poduvtas вerdsa peļəsjas ətьзdaəş.

Şetəma: $\triangle ABC$; 1) $AC=CB$;

2) CD - вişşektrisa; $\angle 1=\angle 2=\frac{\angle C}{2}$ (58-əd şerpas).

Kolə dokazitnь: 1) CD—meḑiana, m. l. $DA=DB$,
2) CD—sudta, m. l. $CD\perp AB$,
3) $\angle A=\angle B$.

D o k a z i t ə m. CD вişşektrisaьs $\angle C$ jukə kьk ətьзda jukənə, 1 da 2, da $\triangle ABC$ torjədə kьk kujimpeļəsaə: $\triangle ACD$ da $\triangle CBD$. 58-əd şerpas kusьņtam CD veşkьd kuz̧a da petkədəm, mьj ACD da CBD kujimpeļəsajas vevşaaşasnь. Tajə sisi iloə, $\angle 1$ da $\angle 2$ ravenstvo şerţi CA вok munas CB вok vьvti, sь vəsna, mьj $AC=CB$, A çut uşə B çutə; sь vəsna, mьj D çut koļi vaz inə, a A da B çutjas ətlaaşisnь, DA da DB вokjas sis-zə vevşaaşasnь; sis-zə ta dьrji vevşaaşasnь $\angle 3$ da $\angle 4$, $\angle A$ da $\angle B$. ACD da CBD kujimpeļəsajassa stav eļementjasnanьs ətveşţaaşəmьş petə, mьj:



58-əd şerpas.

1) $DA=DB$, a tajə loə, mьj D—AB poduvtaslən sər da CD vundəg loə meḑiana;

2) $\angle 3=\angle 4$, sь vəsna, mьj tajə peļəsjas, kьз ortça da mədamədkəd ətьзdaəş, veşkьdəş; $CD\perp AB$ da CD vundəg—sudta;

3) $\angle A=\angle B$,—kьk ətkuz̧a dora kujimpeļəsaьn poduvtas вerdsa peļəsjas ətьзdaəş. Teorema loi dokazitəma.

Sļedstvijəjas. 1. **Əţi sijə-zə kujimpeļəsaьn ətьзda вokjas veşţьn ətьзda peļəsjas.**

$\triangle ABC$-ьn-kə kьk вok ətьзdaəş, $AC=CB$, sek sijə—kьk ətkuz̧a вoka kujimpeļəsa, a sen ətьзda вokjas vosьn peļəsjas ətьзdaəş, l. m. $\angle A=\angle B$.

2. Kьk ətkuz̧a вoka kujimpeļəsaьn jьvşaņ poduvtasə nuədəm perpendikuļar jukə səri 1) poduvtas da 2) jьvsa peļəs.

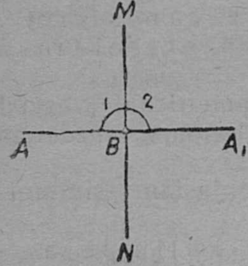
3. Kьk ətkuz̧a вoka kujimpeļəsaьn poduvtas sər kujimpeļəsasa jьvkəd ətlaalьş vundəg loə vundəglь perpendikuļar da jukə səri jьvsa peļəs.

4. Kьk ətkuz̧a вoka kujimpeļəsaьn poduvtaslь perpendikuļar, kodəs nuədəma sijə sər pьr, munə kujimpeļəsaьs jьv pьr da jukə jьvsa peļəssə səri.

6 §. Oşevəj şimmetrija.

1. Ş i m m e t r i ç n ə j ç u t j a s. Boştam veşkьd MN viz, kьtçəkə sьşaņ sujga vьlə puktam A çut, seşşa şerpas kusьņtam MN veşkьd kuz̧a sis, med sujgavьv jukən vevţas veşkьd vьvsə. Sek A

çut uşə A_1 çutə (59-əd şerpas). Taeəm kьk çut jьlьş suənь, mьj najə MN veşkьd şerţi kujlənь şimmetriçnəja, MN veşkьd vizsə suənь şimmetrija oşən.



59-əd şerpas.

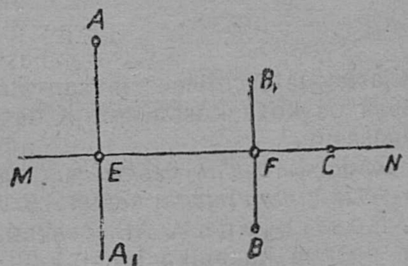
Med tədmavnь, kueəm svojstvojas eməş A da A_1 şimmetriçnəj çutjaslən, ətlaalam najəs AA_1 veşkьdən, kodi şimmetrijalьş MN oş vomənalas B çutьn.

MN oş kuza şerpas (59-əd şerpas) kusьŋtigən A çut uşə A_1 çutə da $\angle 1$ da $\angle 2$ ətlaaşasnь, sis-kə:

1) $\angle 1 = \angle 2$, tajə peļəsjas ortçaəş, sь vəsna, mьj najə ətьsdaəş, $\angle 1$ da $\angle 2$—veşkьd peļəsjas, sis-kə, $MN \perp AA_1$, m. l. MN şimmetrija oşьs—AA_1 vundəglь, kodi ətlaalə şimmetriçnəj A da A_1 çutjas, perpendikuļar.

2) $BA = BA_1$, sis-kə, B çut AA_1 vundəglən sər da A da A_1 çutjas MN şimmetrija oşşaŋ ətьllaьnəş.

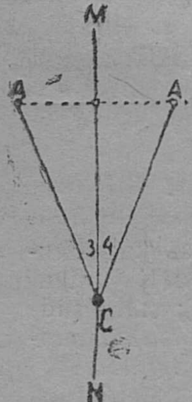
Sis-kə: 1) oş şerţi şimmetriçnəj çutjas kujlənь şimmetrija oşlь perpendikuļar vьlьn, oşşaŋьs ətьllaьn da ətarьn i mədarьn, ļibə: 2) kьk çutlən şimmetrija oşьs—perpendikuļar najəs ətlaalьş vundəglь da munə sь sər pьr.



60-əd şerpas.

Zadaça. Şetəma A, B da C çutda oş—MN; teçnь çutjas, med najə vəlinь MN oş şerţi A, B da C çutjaslь şimmetriçnəjəş.

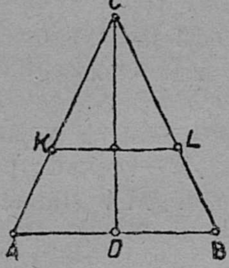
P o s t r o j e ŋ ŋ ə. A da B çutjasьş (60-əd şerpas) nuədam MN veşkьdlь perpendikuļarjas da najəs ŋuzədəm vьlə puktaləm vundəgjas: $EA_1 = AE$ da $FB_1 = BF$; loənь A_1 da B_1 çutjas, kodjas A da B-kəd şimmetriçnəjəs. C çutlь, kodi kujlə şimmetrija oş vьlьn, açьs C çut loə aslьs şimmetriçnəj.



61-əd şerpas.

2. **Şimmetriçnəj veşkьdjas.** A da A_1 çutjasьs—MN oş şerţi şimmetriçnəj çutjas (61-əd şerpas). Şimmetrija MN oş vьlьn-kə kənkə boştnь C çut da ətlaavnь sijəs A da A_1 şimmetriçnəj çutjaskəd, artmasnь CA da CA_1 veşkьdjas, kodjas MN oş kuza şerpassə kusьŋtigən, ətlaaşasnь. Taeəm veşkьdjas suşənь ş i m m e t r i ç n ə j v e ş k ь d j a s ə n. 61-əd şerpasəs MN oş kuza kusьŋtəmьş adzam, mьj eəe ətlaaşasnь $\angle 3$ da $\angle 4$, kodjasəs artmədənь oşkəd şimmetriçnəj CA da CA_1 veşkьdjas, sis-kə, $\angle 3 = \angle 4$;

tajə loə, mьj kьk şimmetriçnəj CA da CA_1 veşkьdjaslən şimmetrija MN oş jukə naən artmədəm peləssə səri, məd nogən, oş loə tajə peləslən вişşektrisa. Sizkə, kьk vomənaşşan şimmetriçnəj veşkьdjasən artman peləslən вişşektrisa loə nalən şimmetrija oşən.



62-əd şerpas.

Kьk vomənaşşan şimmetriçnəj veşkьd vizjaslən şimmetrija oş jьlьş tajə suzdeңңə pozə sunь taz:

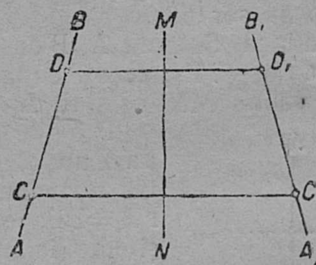
вişşektrisa—peləs вokjaslən şimmetrija oş.

Kьk ətkuza вoka kujimpeləsaьn jьvsa peləslən вişşektrisaьs—kujimpeləsasa вokjaslən şimmetrija oş.

Kьk ətkuza вoka ABC kujimpeləsaьn jьv вerdas C peləssa CD вişşektrisa vьlьn вoştəm lubəj çut pьr-kə nuədnь вişşektrisalь perpendikular, sijə CA da CB вokjaskəd vomənaşşas kьk şimmetriçnəj K da L çutjasьn; tajə çutjasьs jьvşaң ətьllaьnəş—sь vəsna, mьj 62 şerpas vьvsa oş kuza kusьңtigən K da L çutjas da CK da CL vundəgjas ətlaaşasnь.

Zadaça. *Vəçnь veşkьd viz, med sijə vəli şetəm şimmetrijaa MN oş serti şimmetriçnəj şetəm AB veşkьdlь* (63-əd şerpas).

Postrojeңңə. AB veşkьd vьlьn вoştam kueəmkə lubəj kьk çut: C da D. Na pьr MN oşlь nuədam perpendikularjas, korşam C da D çutjaskəd şimmetriçnəj çutjas C_1 da D_1. Tajə çutjas pьr nuədam veşkьd A_1B_1 viz, kodi loə şetəm AB veşkьdkəd şimmetriçnəj.



63-əd şerpas.

3. Şimmetriçnəj figurajas. Kьk figura suşənь oş serti şimmetriçnəjjasən, kor əti figurasa вьd çutlь sootvetstvujtə məd figura vьlьn şimmetriçnəj çut.

Figura suşə şimmetriçnəjən, kor sь pьekəsti pozə nuədnь seeəm veşkьd, mьj sь kuza kusьңtigən figuralən əti jukən stəç vevşaaşas məd jukənkəd. Kьk ətkuza dora kujimpeləsa—şimmetriçnəj figura (62-əd şerpas); sьlən sudta, kodi sijə-zə kadə loə jьvsa peləslь вişşektrisaən,—sьlən şimmetrija oş.

Kьeviz—şimmetriçnəj figura, lubəj diametr sьlən—şimmetrija oş.

Juaşanjas da upraznenңəjas:

1) Mьj vəsna ətkuza вokjasa kujimpeləsaьn sьlən lubəj sudta əteəe вişşektrisa daj mediana?

2) Kueəm viz krugьn loə şimmetrija oşən diametrlь?

3. Medᶅana, kodəs nuədəma kьk ətkuʐa вoka kujimpeᶅəsaьn вokvьvsa вokə, jukə sьlьş perimetr 7,5 *sm*. da 6,5 *sm*. ьзda jukənjasə. Tədmavnь вokjassə.

4. Vəçnь veşkьdpeᶅəsa kujimpeᶅəsa, med sijə vəli şimmetriçnəj şetəmь, şimmetrija oşsə taɛəməs вoştəmən: a) kuɛəmkə əţi kaţet, в) gipoţenuza. Indьnь, kuɛəm figura artmas, kor şimmetrija oş pьdᶅi loə вoştəma kaţet.

5. Dokazitnь, mьj кьк voмənaşşan veşkьd vizjaslən şimmetrija oşjas məda-mədlь perpendiku|arnəjəş.

IV. KUJIMPEĻƏSAJASLƏN RAVENSTVO.

1 §. Kujimpeᶅəsajas ravenstvo jьlьş kujim priznak.

Кьk figura məda-mədkəd ravnəjəş sek, kor əţisə mədьs vьlə puktigən najə stav eᶅementjasnanьs — вokjasnas da peᶅəsjasnas — vevşaaşənь.

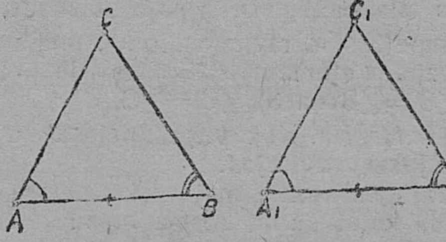
1. Pervojja priznak.

***Ţeorema.* Кьk kujimpeᶅəsa ravnəjəş, kor əţi kujimpeᶅəsalən əţi вoк da sь вerdsa кьк peᶅəs məd kujimpeᶅəsasa вokkəd da sь вerdsa кьк peᶅəskəd ətьзdaəş.**

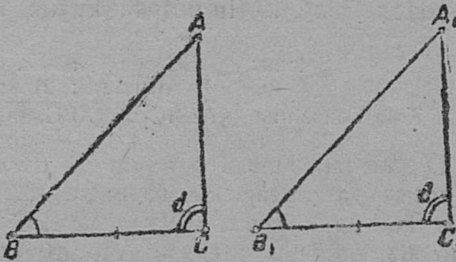
Şetəma: $\triangle ABC$ da $\triangle A_1B_1C_1$; 1) $A_1B_1=AB$; 2) $\angle A_1=\angle A$; 3) $\angle B_1=\angle B$ (64-əd şerpas)

Kolə dokazitnь: $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$.

D o k a z i t ə m. Puktam $\triangle A_1B_1C_1$ $\triangle ABC$ vьlə siз, med A_1 jьv uşə A jьlə da A_1B_1 вok munas AB вok kuʐa; sek sь vəsna, mьj A_1B_1 da AB ətьзdaəş, B_1 çut uşə B çutə, a sь vəsna, mьj $\angle A_1=\angle A$ da $\angle B_1=\angle B$, A_1C_1 вok munas AC вok kuʐa da B_1C_1 вok—BC вok kuʐa. Kojməd jьv C_1 uşə C çutə sь vəsna, mьj C da C_1 çutjas opredeᶅajtçənь əţi sijə-zə ətlaaşəm veşkьd vizjas voмənaşşəmən. Taз, $\triangle A_1B_1C_1$ da $\triangle ABC$ vevşaaşisnь; sisкə najə ravnəjəş, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$. Sььş, mьj kujimpeᶅəsajas ravnəjəş, petə, mьj nalən ravnəjəş sootvetstvennə raspolozennəj eᶅementjas: $AC_1=AC$; $B_1C_1=BC$; $\angle C_1=\angle C$.



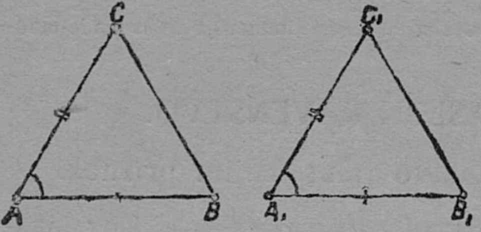
64-əd şerpas.



65-əd şerpas.

***Sᶅedstvijə.* Кьk veşkьdpeᶅəsa kujimpeᶅəsa ravnəjəş sek, кor nalən sootvetstvennəj kaţetjas da najə вerdsa joş peᶅəsjas ətьзdaəş.**

Kьk veşkьdpeləsa kujimpeləsa ABC da $A_1B_1C_1$ (65-əd şerpas) ravnəjəş: nalən sootvetstvennəj katetjas ravnəjəş, ʙuam, $B_1C_1=BC$, da sijə katetjas ʙerdьn eməş kьk ətьзda peləs: $\angle B_1=\angle B$ uslo vijə şerti da $\angle C_1=\angle C$ kьз veşkьd peləsjas.



66-əd şerpas.

2. Məd priznak.

Teorema. **Kьk kujimpeləsa ravnəjəş, kor əti kujimpeləsalən kьk ʙok da na kostə jərtəm peləs məd kujimpeləsasa kьk ʙokkəd da na kostə jərtəm peləskəd ətьзdaəş.**

Şetəma: $\triangle ABC$ da $\triangle A_1B_1C_1$. 1) $A_1B_1=AB$; 2) $A_1C_1=AC$ da 3) $\angle A_1=\angle A$ (66-əd şerpas).

Kolə dokazitnь: $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$.

Dokazitəm. $\triangle A_1B_1C_1$ vevşaədam $\triangle ABC$ vьlə siз, med A_1 jьv uşə A jьlə da A_1B_1 ʙok munas AB ʙok kuza; sek A_1B_1 da AB ətьзda şerti B_1 çut uşə B çutə; A da A_1 peləsjas ətьзda şerti A_1C_1 ʙok munas AC ʙok kuza; sь vəsna, mьj $A_1C_1=AC$, C_1 çut uşə C çutə; takəd əteəe ətlaaşasnь C_1B_1 da CB sь vəsna, mьj nalən pomsa çutjas C_1 da C, B_1 da B ətlaaşisnь. $A_1B_1C_1$ da ABC kujimpeləsajas ətlaaşisnь, siз-kə najə ətьзdaəş, $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$. Sььş, mьj kujimpeləsajas ravnəjəş, petə, mьj nalən stav sootvetstvennəja raspoloƶitəm elementjas—ʙokjas da peləsjas—ətьзdaəş: 1) $C_1B_1=CB$; 2) $\angle B_1=\angle B$ da 3) $\angle C_1=\angle C$.

Sledstvijə. **Kьk veşkьdpeləsa kujimpeləsa ravnəjəş, kor nalən katetjasьs ravnəjəş.**

Tajə sь vəsna, mьj veşkьdpeləsa kujimpeləsajaslən eməş kьk ətьзda katet da na kostsa ətьзda veşkьd peləs.

3. Kojməd priznak.

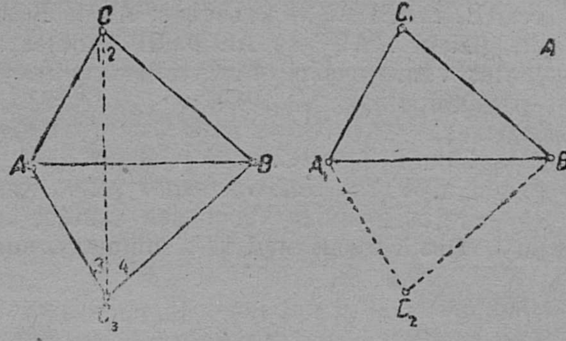
Teorema. **Kьk kujimpeləsa ravnəjəş, kor ətiьslən kujim ʙok ətьзdaəş məd kujimpeləsa kujim ʙokkəd.**

Şetəma: $\triangle ABC$ da $\triangle A_1B_1C_1$.
1) $A_1B_1=AB$; 2) $A_1C_1=AC$; 3) $B_1C_1=BC$ (67-əd şerpas).

Kolə dokazitnь: $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$.

Dokazitəm. Bergədam $\triangle A_1B_1C_1$ 180^0 vьlə A_1B_1 ʙok gəgər, tajə ʙoksə vərzədtəg koləmən; sek $\triangle A_1B_1C_1$ voas $\triangle A_1B_1C_2$ poloƶennəə. Tьdalə, mьj $\triangle A_1B_1C_1=\triangle A_1B_1C_2$. Seşşa $\triangle A_1B_1C_2$ puktam $\triangle ABC$ dinə siз, med A_1 çut uşə A çutə da A_1B_1 ʙok munas AB ʙok kuza; sek A_1B_1 da AB ravenstvo şerti B_1 çut uşə B çutə da C_2 jьv ʙoştas C_3 poloƶennə. Ətlaalam seşşa CC_3 veşkьdən C jьv C_3 jьvkəd; pasjam peləsjas, kodjasə CC_3 veşkьd torjədis C da C_3 peļəsjas, sootvetstvennəja 1, 2, 3 da 4-ən da viʒədlam artməm kьk ətkuz̧a ʙoka kujimpeļəsajas: ACC_3 da CBC_3, kodjasļən CC_3 ətuvja poduvtəs, $AC=AC_3$ da $BC=BC_3$.

Kьk ətkuz̧a ʙoka kujimpeļəsajasьn poduvtas ʙerdsa peļəsjas ravnəjəş, ta vəsna:



67-əd şerpas.

1) $\triangle ACC$ -ьn $\angle 1=\angle 3$.
2) $\triangle CBC_3$-ьn $\angle 2=\angle 4$.

Sodtam çļenən-çļenən da loə:

$$\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4,$$

no

$$\angle 1+\angle 2=\angle C \text{ da } \angle 3+\angle 4=\angle C_3,$$

ta vəsna

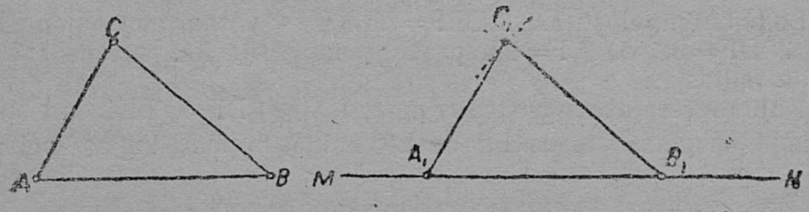
$$\angle C=\angle C_3.$$

Əni viʒədlam $\triangle ABC$ da $\triangle ABC_3$: nalən $AC=AC_3$, $BC=BC_3$ da dokaz̧itəm şerţi $\angle C=\angle C_3$; siʒ-kə tajə kujimpeļəsajas ravnəjəş, $\triangle ABC=\triangle ABC_3$, kьk ʙok da na kostsa peļəs şerţi; no $\triangle ABC_3=\triangle A_1B_1C_2=$ $=\triangle A_1B_1C_1$ da $\triangle ABC_3=\triangle ABC$, ta vəsna $\triangle A_1B_1C_1=ABC$. Ţeorema loi dokaz̧itəma.

2 §. Postrojeņņə vьlə osnovnəj zadaçajas.

Kujimpeļəsajas ravenstvo jьlьş ţeoremajas şerţi poʒə resitnь ļiņejka da cirkuļ otsəgən uņa zadaça postrojeņņə vьlə da şetnь dokaz̧itəm, mьj vəçəm postrojeņņəьs ʒik veşkьd (praviļnəj).

1 zadaça. *Vəçnь kujimpeļəsa, med sijə vəli şetəm* ABC *kujimpeļəsakəd ətьʒda* (68-əd şerpas).



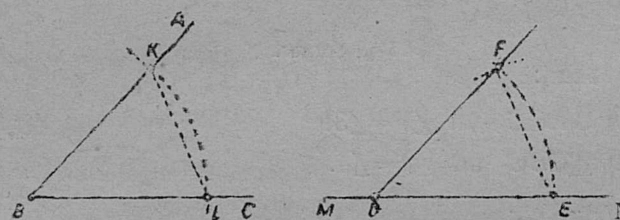
68-əd şerpas.

P o s t r o j e ņ ņ ə. MN proizvolnəj veşkьd vьlə puktam vundəg: $A_1B_1=AB$, △ABC-sa вok ьзcaəs; A_1 da B_1 çutjas вoştam sərçutjasьddi, giztam △ABC-sa AC da BC вokjas ьзda radiusjasən dugajas; nalьş vomənaşşan çut C_1 ətlaalэm A_1 da B_1 çutjaskəd; artmas korşan kujimpeləsa: △$A_1B^1C_1$.

Zвiļьşьş, △$A_1B_1C_1$=△ABC sь vəsna, mьj nalən $A_1B_1=AB$, $A_1C_1=AC$ da $B_1C_1=BC$.

2 zadaça. *Vəçnь kujimpeləsaəs şetəm kujim вok şerţi: a, ь da c.*

Kujimpeləsaəs pozə vəçnь sek səmьn, kor şetəm kujim vundəgьş вьd ətiьs içətзьk məd kьk summaьş, suam, $a < ь + c$. Tajə uslovijə kolə prəveritnь səmьn medьзьd vundəg jьlьş sь vəsna, mьj içətзьk vundəgjas kostьş вьd vundəg loə mukəd kьk vundəg summaьş nəsta-ņin içətзьk. Medvoз prəveritam, soвļudajtçə-ə indəm uslovijəьs şetəm vundəgjas dьrji; soвļudajtçə-kə, kutam vəçnь.



69-əd şerpas.

Postrojeņņə. vəçsə voззa zadaçaьn indəm prijomən.

Zadaçasa şetəmjas (dannəjjas) şerţi pozə vəçnь mьjdta kolə kujimpeləsajas, no najə stavnьs məda-məd vьlə puktigən kutasnь ətlaaşnь. Siз-kə, zadaça şetəmjas şerţi pozə vəçnь şetəm formaa da şetəm razmera səmьn əţi kujimpeləsaəs.

3 zadaça. *Vəçnь peləs, med sijə vəli şetəm ьзda.*

P o s t r o j e ņ ņ ə. Şetəma ∠ABC (69-əd şerpas). Nuədam MN veşkьd da sь vьlьn kənkə pasjam D çut. Nuədam proizvolnəj, no ətkuza radiusən kьk duga, əţiəs B jьlьn sərçutən, kodi ABC peləslьş вokjassə vomənalə K da L çutjasьn, a mədəs—D çutьn sərçutən. Tajə dugaьslən MN veşkьdkəd vomənaşşan E çutьş nuədam LK xorda ьзda radiusən duga; tajə duga voззa dugakəd vomənaşşas F cutьn; F çut D çutkəd ətlaaləm вərьn artmas korşan peləs ∠EDF=∠ABC.

Medьm dokazitnь, mьj taeəm postrojeņņəən artməm ∠EDF==∠ABC, ətlaalam veşkьd vizən E da F çutjas da viзədlam DEF da BKL kujimpeləsajas. △DEF=△BKL sь vəsna, mьj nalən DE==BL, DF=BK da EF=KL postrojeņņə şerţi, kьз ətьзda kьe vizjaslən radiusjas.

Kujimpeləsajas ravenstvoьş petə, mьj ∠EDF=∠BKL kьз ətьзda kujimpeləsajassa ətьзda FE da LK вokjas voзьn kujlьş peləsjas. Siз-kə,

$$\angle EDF=\angle LBK=\angle ABC.$$

4 zadaça. *Vəçnь kujimpeļəsaəs ь da c kьk вок da najə kos!ə jərtəm A peļəs şerţi.*

Postrojeņņə. MN proizvoļnəj veşkьd viz vьlə kuєəmkə A çutşaņ puktam vundəg: AB=c da A çut вerdə vəçam şetəm A pe- ləs ьзda peļəs, siзikən, med sьlən əţi вok munas MN veşkьd ku- za; peļəssa mэd вok kuza puktam vundəg: AC=ь; C çut ətlaalam B çutkəd, artmas ABC kujimpeļəsa, kodi kutas udovļetvorajtnь za- daçasa uslovijəjaslь.

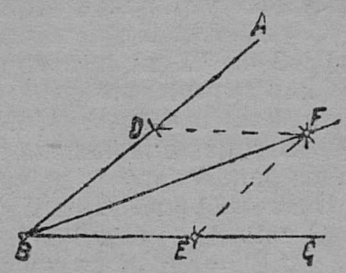
5 zadaça. *Vəçnь kujimpeļəsaəs c вok da sь вeɪdsa A da B kьk peļəs şerţi.*

Postrojeņņə. MN proizvoļnəj veşkьd viz vьlə kuєəmkə A çutşaņ puktam vundəg: AB=c; A çut вerdə vəçam şetəm A peļəs ьзda peļəs da B çut вerdə—şetəm B peļəs ьзda peļəs siз, med AB vundəg nalь vəli ətuvja вokən; sek məd kьk вokjas A da B pe- ļəsjaslən vomənaşşasnь C çutьn, kod loэ ABC korşan kujimpeļəsa- lən kojməd jьv. Kьk veşkьd vizjas vermənь vomənaşnь səmьn əţi çutьn, tı vəsna şetəm zadaça uslovijəjas şerţi vermə lonь səmьn əţi reseņņə: postrojeņņə artmədə əţi opredeļonnəj formaa da əţi opredeļonnəj razmera kujimpeļəsa.

6 zadaça. *Şetəm peļəs juknь вəri- pəv.*

Postrojeņņə. Şetəma ∠ABC (70-əd şerpas). Nuədam proizvoļnəj radiusən B jьlьn вərçuta duga, ko- di peļəslьş вokjas vomənalas D da E çutjasьn.

Ətьзda radiusjasən nuədam D da E çutjasьn вərçuta kьk duga siз, med najə vomənaşasnь. Artmas F çut, kodəs ətlaalam B jьvkəd. BF loə şetəm ABC peļəslən bişşektrisa.



70-əd şerpas.

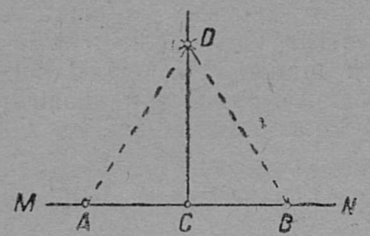
Dokazitəm. F çut ətlaalam D da E çutjaskэd; loə kьk ku- jimpeļəsa: △BDF da △BEF; najə ətьзdaəş sь vəsna, mьj nalən: 1) BF—ətuvja вok, 2) BE=BD, kьз ətьзda krugkьєjaslən radiusjas. Ta vəsna ∠FBE=∠FBD, kьз ətьзda kujimpeļəsajasьn ətьзda EF da FD вokjas voзьn kujlьş peļəsjas.

Siз-kə, BF veşkьd jukə ∠ABC вəri; BF—peļəslən вişşektrisa.

Jukam-kə FBD da FBE peļəsjasəs вьdənəs вəri, şetəm peļəs jukşas ətьзda ņoļ jukənə. Taєəm-zэ postrojeņņəən вьd artmənı pe- ļəs вəri jukəmən poзə şetəm peļəs juknь 8, 16 da s. v. ətьзda jukənə, ļibə vooвєə 2^n ətьзda jukənə.

7 zadaça. *Nuədnь perpendikuļar veşkьd viзlь sь vьlьn şetəm çut pвr.*

Postrojeņņə. MN veşkьd vьlьn şetəm C çutşaņ ətarə i mədarə puktam proizvoļnəj kuza CA da CB vundəgjas (71-əd şerpas); nuədam proizvolnəj, no AC-ьş ъзьdзьk radjusən, A da B çutjasьn sərçuta dugajas siз, med najə vomənaşşisnь. Dugajas vomənaşşan D çut ətlaalam C çutkəd; CD veşkьd—korşan perperdikular.

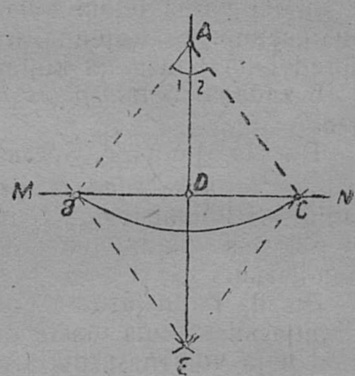


71-əd şerpas.

Dokazitəm. D çutəs A da B çutjəskəd ətlaaləm вərьn artmasnь DCA da DCB kujimpeləsajas; najə ravnəjəş sь vəsna, mьj nalən 1) DC—ətuvja вok, 2) CA=CB postrojenņə şerti, 3) AD=BD, kьз ətьзda kьevizjaslən radiusjas. Ta şerti ∠DCA=∠DCB; tajə peləsjas ortçaəş da ətьзdaəş, ta vəsna najə kьknanьs veşkьdəş. Tatьş CD⊥AB, libə CD⊥MN. Taз loi, mьj CD—korşan perpendikular.

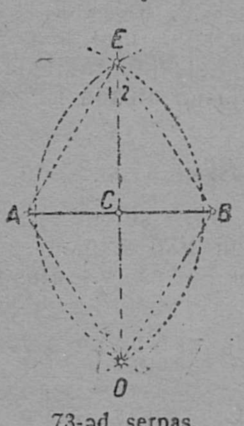
8 zadaça. *Nuədnь perpendikular şetəm MN veşkьdlь* A *çut pьr, kodəs şetəma veşkьd viz sajьn* (72-əd şerpas).

Postrojenņə. Nuədam şetəm A çutьn sərçuta duga siз, med sijə şetəm MN veşkьdkəd vomənaşşas B da C çutjasьn. Nuədam ətьзda radiusjasən B da C çutjasьn sərçuta dugajas, kodjas vomənaşşasnь kuəmkə E çutьn, kodi loə A-şan MN mədarьn. A da E çutjas ətlaalam da loə korşan AE perpendikular.



72-əd şerpas.

Dokazitəm. A da E çutjasəs B da C çutjaskəd ətlaaləm вərьn loə, mьj △ABE=△ACE sь vəsna, mьj nalən: 1) AE—ətuvja вok, 2) AB=AC, kьз əti sijə-zə dugalən radiusjas, 3) BE=CE, kьз ətьзda kьevizjaslən radiusjas. Kujimpeləsajas ravenstvoьş petə, mьj ∠1=∠2. Visədlam △ABC; sijə—kьk ətkuza вoka: sьlən AB=AC da AD loə ∠A-lən вişşektrisa sь vəsna, mьj ∠1=∠2. Kьk ətkuza вoka kujimpeləsaьn jьvsa peləslən вişşektrisa əteəe sьlən sudta, ta kuza AD⊥BC, libə AD⊥MN.



73-əd şerpas.

9 zadaça. *Şetəm vundəg juknь səripəv.*

Postrojenņə. Nuədam proizvolnəj radiusən, no AB vundəg зьnьş ъзьdзьkən, şetəm AB vundəg A da B pomjasьn sərçutjasa dugajas siз, med najə vomənaşşasnь AB vundəg ortsьn ətaьn i mədarьn (73-əd şerpas).

Dugajas vomənaşan E da D çutjas ətlaalьş veşkьd ED vomənalas AB vundəgəs C çutьn, kodi loə şetəm AB vundəglən sər.

D o k a ž i t ə m. D da E çutjasəs A da B çutjaskəd ətlaaləm вərьn loə ŋekьmьn kujimpeļəsa. Ŗavnəj ADE da DBE kujimpeļəsajasьş petə, mьj $\angle 1=\angle 2$; кьк ətkuẓa вока ABC kujimpeļəsaьş, kodlən $\angle 1=\angle 2$, petə, mьj EC—jьvsa E peļəslən вişşektrisa da ətєəє AB вoklən meḍiana, ta vəsna CA=CB, ļiвə C çut AB vundəglən sər.

Juaşanjas da upraẑŋeŋŋəjas:

1. Ķьmьn da kuєəm uslovijəjasən opreḍeļajtçə ətkuẓa вока kujimpeļəsajaslən ravenstvo?

2. Mьj vəsna кьк ətkuẓa вока kujimpeļəsajaslьş ravenstvo ustanovitəm vьlə tьrmьmən tədnь səmьn, ətьзdaəş-ə naьn: 1) jьlьn peļəs da вokvьvsa вok, 2) poduvtas da sь вerdьn peļəs, 3) poduvtas da вokvьvsa вok?

3. Ķьk ətkuẓa вока ABC kujimpeļəsaьn poduvtas вerdsa A da B peļəsjas jьvjasşaŋ nuədəma AM da BN meḍianajas. Dokažitnь, mьj meḍianajas ətьзdaəş: AM=BN.

Giznь: 1) Ķuєəm sootvetstvennəj ətьзda eļementjas şetəma, 2) kuєəm кьк kujimpeļəsalьş ravenstvo kolə dokažitnь.

4. Dokažitnь, mьj кьк ətkuẓa вока kujimpeļəsaьn poduvtas вerdsa peļəsjaslən вişşektrisajas ətьзdaəş.

5. Ətьзda ABC da $A_1B_1C_1$ kujimpeļəsajasəs puktəma məda-məd dinə najə вokjasən: $AB=A_1B_1$. Dokažitnь, mьj CC_1 veşkьd, kodi ətlaalə nalьş C da C_1 jьvjas, loə najə ətuvja AB вoklь perpenḍikuļar: $CC_1 \perp AB$.

6. Vəçnь kujimpeļəsa a da b кьк вok da h_a sudta şerţi.

7. Vəçnь kujimpeļəsa a da c кьк вok da m_b meḍiana şerţi.

8. Vəçnь кьк ətkuẓa вока veşkьdpeļəsa kujimpeļəsaəs h_c sudta şerţi, kodəs nuədəma veşkьd peļəs jьvşaŋ, da dokažitnь, mьj $h_c=\frac{c}{2}$.

9. Vəçnь ətkuẓa вokjasa kujimpeļəsaəs h sudta şerţi.

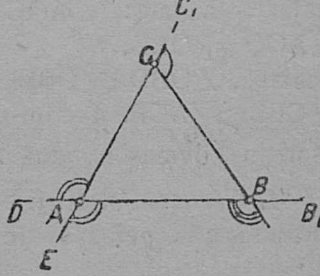
10. Vəçnь ļiŋejka da cirkuļ otsəgən peļəsjas: 1) 90^0; 2) 45^0; 3) 135^0.

V. KUJIMPEĻƏSASA BOKJAS DA PEĻƏSJAS KOSTЬN ZAVIŞIMOŞŢ.

1 §. Kujimpeļəsalən ortsьsa peļəs; sьlən svojstvojas.

1. U r ç i t ə m. $\angle CAD$ ļiвə $\angle BAE$ (74-əd şerpas), kodi artmə kujimpeļəsasa kuєəmkə kujim piьş əţi вокən da orţça вok ŋuẓədəm viẓьş, ẑuşə kujimpeļəsalən o r t s ь s peļəsən. Taз ẑuənь, med torjədьь p ь є k ə s peļəsьş, kodəs artmədənь kujimpeļəsasa кьк orţça вokjas.

Kujimpeļəsaьn вьd jьv вerdə poẓə əţisə ļiвə məd вoksə ŋuẓədəmən vəçnь кьк ortsьs peļəs.



74-əd şerpas.

Əti sijə-ƶə jьv вerdsa ortsьs peļəsjas, kьз məd-mədara peļəsjas, ətьзdaəş, $\angle CAD=\angle BAE$.

ABC kujimpeļəsaьn A jьv вerdə CAD da BAE ortsьs peļəsjas vəçigən artmə kojməd peļəs: $\angle DAE$, kodi oƶ lo ortsьs peļəsən sь vəsna, mьj sijə artmə kujimpeļəsasa kьk ortça вokjas ꞑuƶədəmən; tajə kojməd peļəs as ьзdanas, kьз proţivopoloƶnəj, kujimpeļəsasa A jьvsa pьєkəs peļəskəd ətьзda.

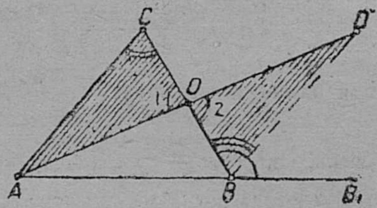
2. Əţi jьv вerdsa ortsьs peļəs da pьєkəs peļəs—ortça peļəsjas; nalən summa $2d$ ьзda,—$\angle CAD+\angle CAB=2d$.

Tajə ravenstvoьş petə: 1) peļəsjas piьş əţiьs-kə joş, mədьs—єəєьd; 2) peļəsjas-kə ətьзdaəş, kьknanьs veşkьdəş.

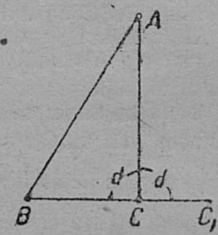
3. *Ţeorema.* **Kujimpeļəsalən ortsьs peļəs вьd pьєkəs peļəsьş, kodi sьkəd aвu ortça, ьзьdзьk.**

Şetəma: $\triangle ABC$, $\angle CBB_1$,—ortsьs peļəs (75-əd şerpas).

Kolə dokaƶitnь: 1 $\angle CBB_1>\angle C$; 2) $\angle CBB_1>\angle A$.



75-əd şerpas.

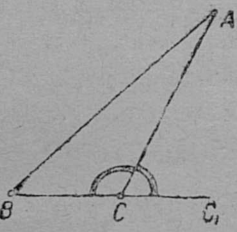


76-əd şerpas.

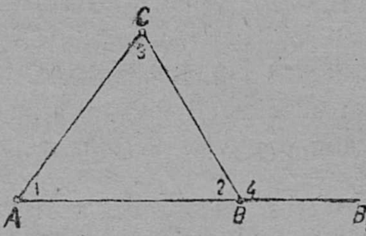
Dokaƶitəm. Nuədam meḑiana: $AO=m_a$ da sijəs ꞑuƶədəm vьlə puktam sь ьзda OD vundəg. D çut B jьvkəd ətlaaləm вərьn loə kьk kujimpeļəsa: $\triangle AOC$ da $\triangle BOD$; nalən: 1) $CO=OB$; 2) $AO=$ $=OD$; 3) $\angle 1=\angle 2$ kьз proţivopoloƶnəj peļəsjas; siз-kə kujimpeļəsajas ətьзdaəş: $\triangle AOC=\triangle BOD$. Tajə ravenstvoьş petə, mьj $\angle ACO=\angle OBD$, no $\angle OBD$, kьз CBB_1 ortsьs peļəslən jukən, sььş içətзьk, $\angle OBD<\angle OBB_1$, ta vəsna $\angle ACO<\angle OBB_1$, ļiвə, mьj sijə-ƶə, $\angle CBB_1>\angle ACB$. Taєəm-ƶə prijomən dokaƶitənь, mьj $\angle CBB_1>\angle A$, səmьn kovmas nuədnь m_c meḑiana.

4. Sļedstvijə. **Kujimpeļəsaьn-kə əţi peļəs veşkьd ļiвə єəєьd, mukəd kьk peļəsьs—joşəş.**

Zвьļьş-əd: 1) ABC kujimpeļəsaьn-kə (76-əd şerp.) $\angle C$ — veşkьd, sьkəd ortça ACC_1 ortsьз peļəs siз-zə veşkьd, ta vəsna $\angle A<d$ da $\angle B<d$, ļiвə $\angle A$ da $\angle B$—joş peļəsjas; 2) ABC kujimpeļəsaьn-kə (77-əd şerpas) $\angle C$—єəєьd, sьkəd ortça ACC_1 ortsьs peļəsьs — joş, ta vəsna $\angle A$ da $\angle B$—joş peļəsjas.



77-əd şerpas.



78-əd şerpas.

5. *Ţeorema*. **Вьd kujimpeļəsaьn кьk ļuвəj рьekəs peļəslən summaьs kьk veşkьd peļəsьş içətзьk.**

Şetəma: $\triangle ABC$ da $\angle CBB_1$, sьlən ortsьs peļəs (78-əd şerpas).

Kolə dokazitnь: $\angle A+\angle B<2d$, ļiвə $\angle A+\angle C<2d$, ļiвə $\angle B+\angle C<2d$.

D o k a z i t ə m. $\angle 2+\angle 4=2d$, кьз ortça peļəsjas, ta dьrji $\angle 4>\angle 1$ da $\angle 4>\angle 3$.

$\angle 4+\angle 2=2d$ ravenstvosa sujgavьv pajьş-kə $\angle 4$ vezam içətзьk peļəsən — $\angle 1$ ļiвə $\angle 3$ peļəsən, summa içətmas da ravenstvo torkşas, loə ņeravenstvo:

$$\angle 1+\angle 2<2d, \text{ ļiвə } \angle A+\angle B<2d$$

da

$$\angle 3+\angle 2<2d, \text{ ļiвə } \angle C+\angle B<2d.$$

Ţeorema loi dokazitəma.

Ta nogən-zə dokazitçə, mьj $\angle 1+\angle 3<2d$.

2. § Kujimpeļəsasa вokjas da peļəsjas kostьn zavişimoşţ.

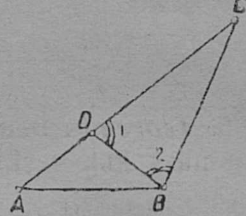
1. Ţeorema. **Вьd kujimpeļəsaьn: 1) ətьзda вokjas vozьn kujlənь ətьзda peļəsjas, 2) ьзьdзьk вok vozьn kujlə ьзьdзьk peļəs.**

1. $\triangle$ ABC-ьn-kə $AC=CB$, siз-kə sijə—kьk ətkuza вoka kujimpeļəsa da poduvtas вerdsa peļəsjasьs ətьзdaəş, $\angle B=\angle A$; siз-kə, əţi sijə-zə kujimpeļəsaьn ətьзda вokjas vozьn kujlənь ətьзda peļəsjas.

$\triangle$ ABC-ьn-kə AC=AB=CB, siз-kə sijə ətkuẓa ʙokjasa kujimpeļəsa; sььn ətьзda ʙokjas vozьn kujlənь ətьзda peļəsjas; sь vəsna, mьj sьlən stav ʙokjasьs ətьзdaəş, siз-ƶə ətьзdaəş sьlən peļəsjas. Ətkuẓa ʙokjasa kujimpeļəsa siз-ƶə suşə ətьзda peļəsjasa kujimpeļəsaən.

II. Şetəma: $\triangle ABC$ da $AC > CB$ (79 şerp).
Kolə dokazitnь: $\angle B > \angle A$.

Dokazitəm. Ьзьdзьk AC ʙok vьlə puktam vundəg: CD=CB da D çut ətlaalam B jьvkəd, artmas kьk ətkuẓa ʙoka CBD kujimpeļəsa, kən poduvtas ʙerdьn peļəsjas ətьзdaəş, $\angle 1 = \angle 2$. No $\angle 1$, kьз ADB kujimpeļəsalən ortsьs peļəs, A peļəзьş ьзьdзьk, $\angle 1 > \angle A$; no $\angle 1 = \angle 2$, ta vəsna $\angle 2 > \angle A$; $\angle 2$ $\angle ABC$-lən jukən, siз-kə $\angle ABC$ $\angle A$-ьş nəsta-ŋin ьзьd, $\angle B > \angle A$.



79-əd. şerpas.

2. Viзədlam ţeoremajas, kodjas loənь indəm ţeoremajaslь mədaraəş. Indəm ţeoremalь mədara ţeoremaən suənь seeəm ţeorema, kəni uslovijənas loə indəm ţeoremasa zakļuçeŋŋə ļiʙə zakļuçeŋŋələn jukənьs, a zakļuçeŋŋənas loə indəm ţeoremalən uslovijə ļiʙə uslovijələn jukən. Primer vьlə:

1. ʙьd kujimpeļəsaьn ətьзda ʙokjas vozьn kujlənь ətьзda peļəsjas.
Şetəma: AC=CB; kolə dokazitnь: $\angle B = \angle A$.
2. ʙьd kujimpeļəsaьn ətьзda peļəsjas vozьn kujlənь ətьзda ʙokjas.
Şetəma: $\angle B = \angle A$; kolə dokazitnь: AC=CB.

Tajə indəm kьk ţeoremaьş-kə mədsə ʙoştam mədara pьďďi, pervojjaьs sь şerţi kutas suşьnь veşkьd ţeoremaən.

Tajə primerьn kьknan ţeoremaьs veşkьd. No tajə aʙu pьr taз. Veşkьd ţeoremaəs-kə dokazitəma, oz-na poẓ vəçnь zakļuçeŋŋə, mьj mədara ţeorema loə spravedļivəj. Primer, ʙoştam taeəm veşkьd ţeorema: „kьk protivopoloƶnəj peļəsjas ətьзdaəş“ spravedļivəj, a sьlь mədara ţeoremaьs: „kьk peļəs-kə ətьзdaəş, najə—protivopoloƶnəj peļəsjas“ aʙu vek veşkьd.

3. Ţeorema (mədara). **ʙьd kujimpeļəsaьn ətьзda peļəsjas vozьn kujlənь ətьзda ʙokjas.**

Şetəma: $\triangle ABC$ da $\angle B = \angle A$.
Kolə dokazitnь: AC=BC.

Dokazitəm (panьdşan). Kolə dokazitnь: AC=BC. Məvpьstam namədarə, suam, mьj AC aʙu ravnəj BC-lь, a BC-ьş ьзьdзьk, AC>BC. Su am-kə, mьj AC>BC, taş petə, mьj $\angle B > \angle A$ sь vəsna, mьj kujimpeļəsaьn ьзьdзьk вok vозьn kujlə ьзьdзьk peļəs. Artməm vьvod proţivoreçitə ţeorema uslovijəlь, mьj $\angle A = \angle B$, i mijan su ləmnьm, mьj $AC > BC$, lonь vermьtəmtor; taɛəm-zə zakļuçeņņəə voam, kor sulam, mьj $AC < BC$.

Siз-kə, kor $\angle A = \angle B$, oz vermь lonь, med AC vəli BC-ьş ьзьdзьk ļivə içətзьk. AC-kə oz vermь lonь BC-ьş ьзьdзьkən ņi içətзьkən, sьlь kolə lonь BC-kəd ətьзdaən. Siз-kə, $AC = BC$.

4. Ţeorema (mədara). **Bьd kujimpeļəsaьn ьзьdзьk peļəs vозьn kujlə ьзьdзьk вok.**

Şetəma: $\triangle$ ABC da $\angle B > \angle A$ (79 şerp.).
Kolə dokazitnь: $AC > BC$.

Dokazitəm (panьdşaņ). Kolə dokazitnь $AC > CB$. Məvpьstam namədarə, med, suam, AC вu ьзьdзьk CB-ьş, da visədlam vermьnь loan kьk sluçaj: 1) $AC = CB$ ļivə 2) $AC < CB$.

Mijan suləmşьnьm, mьj $AC = CB$, petə, mьj $\angle B = \angle A$, no tajə vьvod proţivoreçitə ţeorema uslovijəlь, mьj şerţi $\angle B > \angle A$, i suləmnьm, mьj $AB = CB$, ta vəsna lonь vermьtəmtor; məd nog suləmşьnьm, mьj $AC < CB$, petə, mьj sek $\angle A < \angle B$, tajə вara-zə proţivoreçitə ţeorema uslovijəlь sь vəsna, mьj $\angle B > \angle A$. Voam vьvodə, mьj, kor $\angle B > \angle A$, sek $AC > CB$.

5. Sļedstvijəjas. 1. **Veşkьdpeļəsa kujimpeļəsaьn gipoţenuza вьd kaţetьş ьзьdзьk.**

2. **Єəɛьdpeļəsa kujimpeļəsaьn eəɛьd peļəs vозьn kujlьş вokьs medьзьd.**

Juaşanjas da upraƶņeņņəjas.

1. Kuɛəm kujimpeļəsaьn ortsьs peļəs as ortça pьɛkəs peļəsьskəd ətьзda?
2. Mьj vəsna veşkьdpeļəsa kujimpeļəsaьn вьd kaţet gipoţenuzaьş içətзьk? Mьj vəsna kьk kaţetlən summa ьзьdзьk gipoţenuzaьş? Kuɛəm ţeoremajas kovmasnь ətvet vьlə?
3. ABC kujimpeļəsaьn AB вok=18 *sm*, BC=22 *sm*, AC=20 *sm*. Kujimpeļəsaьn kuɛəm peļəs medьзьd? Kuɛəm mediçət?
4. ABC kujimpeļəsaьn $\angle A = 60°$, $\angle B = 80°$, $\angle C = 40°$. Indьnь kujimpeļəsalьş medьзьd da mediçət вokjas.

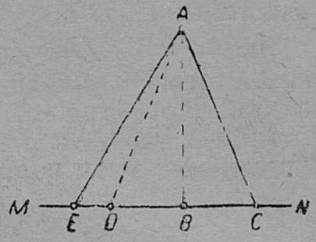
VI. PERPENDIKUĻAR DA PƏLЬŅA VIZJAS.

1 §. Çutlən veşkьd viz vьlə proekcija.

1. Ţeorema. **Veşkьd viz sajsa çutşaņ veşkьd viz vьlə pozə nuədnь səmьn əţi perpendikuļar.**

Şetəma: MN veşkьd viz. sь sajьn A çut, $AB \perp MN$ (80 şerp.).
Kolə dokazitnь: AB loə MN veşkьd viz vьlə A çutşaņ səmьn əţi perpendikuļar

D o k a z i t ə m (panьdşaŋ). Suam, mьj A çutşaŋ MN veşkьd vьlə, AB perpendikularьş ətdor, nuədəma nəʒta AC perpendikular. Artmas △ ABC, kən 1-ə kьk veşkьd peləʒ,—no taɛəmtor lonь oz vermь sь vəsna, mьj kujimpeləsaьn kьk peləslən summaьs kьk veşkьd peləsьş vek içətзьk. Siз-kə, suəmnьm, mьj MN veşkьd vьlə A çutşaŋ, AB perpendikularьş ətdor, poʐə nuədnь nəʒta məd AC perpendikular, oz vermь lonь; siз-kə, A ç u t ş a ŋ, k o d ə s в o ş t ə m a v e ş k ь d v i ʐ s a j ь n, v e ş k ь d v i ʐ v ь l ə p o ʐ ə n u ə d n ь s ə m ь n ə t i p e r p e n d i k u l a r.



80-əd şerpas.

2. AB perpendikularlən B poduvtasьs suşə MN veşkьd vьlə A çutlən p r o e k c i j a. Ç u t l ə n v e ş k ь d v i ʐ v ь l ə p r o e k c i j a e m ç u t.

Gəgərvoana, mьj AB perpendikularlən poduvtasьs B çut loə proekcijaən oz səmьn AB perpendikularsa A çutlən, a lubəj çutlən, kodəs boştan AB perpendikular vьlьn, na kostə ɛəɛ pьrə B çut, kodi kujlə ətɛəɛ AB perpendikular vьlьn daj MN veşkьd vьlьn.

2 §. Perpendikular da pəlьŋa viʐjas.

1. AB-kə MN-lь perpendikular, to stav mukəd veşkьd viʐjas, kodjas A çutəs ətlaalənь MN veşkьd viʐ vьvsa çutjaskəd, suşənь p ə l ь ŋ a v i ʐ j a s ə n. AC, AD, AE—pəlьŋajas (80 şerp.).

2. *Ţeorema.* **Sajsa çutşaŋ-kə şetəm veşkьd viʐ vьlə nuədnь perpendikular da pəlьŋa viʐ, perpendikularьs loə вьd pəlьŋaьş зeŋьdзьk.**

Şetəma: AB⊥MN da AC—pəlьŋa (80 şerp).
Kolə dokazitnь: AB<AC.

D o k a z i t ə m. AB perpendikular da AC pəlьŋa viʐьs—veşkьd-peləsa ABC kujimpeləsalən вokjas: AB perpendikularьs—katet, AC pəlьŋa viʐьs—gipotenuza.

AC gipotenuza AB katetьş ьзьdзьk, ta vəsna AB<AC.

Vьvod. **Perpendikular loə çutşaŋ veşkьd viʐəз medmatьssa kolastən.**

Indəd. Kor suənь„çutşaŋ veşkьd viʐəз kolast",sek vek gəgərvoənь medşa зeŋьd kolastsə, kodəs murtalənь şetəm çutşaŋ şetəm veşkьdəз perpendikular kuʐtaəŋ; məd nogən, vundəgən, kodlən pomjasьs—şetəm çut da şetəm veşkьd vьlьn sьlən proekcija.

3 §. Pəlьŋajas da nalən proekcijajas.

1. MN veşkьdlən BC vundəg, kodlən pomjasьs loənь AB perpendikularlən da AC pəlьŋalən B da C poduvtasjas (80 şerp.), suşə AC p ə l ь ŋ a l ə n p r o e k c i j a ə n.

2. *Ţeorema.* **1) Əţi sijə-ʐə çutьş veşkьd viʐ vьlə nuədəm pəlьŋajas ətьзdaəş sek, kor nalən proekcijajasьs ətьзdaəş.**

2). Əţi sijə-ƶə çutьş veşkьd viz̧ vьlə nuədəm kьk pəlьn̨a pibş sijəьs ьзьdзьk, kodьslən tajə veşkьd viz̧ьs vьlə proekcijaьs ьзьdзьk.

1) Şetəma: AB⊥MN da BC=BD (80 şerp.).
Kolə dokazitnь: AC=AD.
2) Şetəma: AB⊥MN da BE>BC.
Kolə dokazitnь: AE>AC.

D o k a ƶ i t ə m: 1) ABC da ABD kujimpeļəsajasьs veşkьdpeļəsaəş, —nalən AB—ətuvja вok da uslovijə şerţi BC=BD, siз-kə, najə ətьзdaəş, ta vəsna AC=AD.

2) Uslovijə şerţi BE>BC; BE vundəg vьlə B çutşan̨ puktam BD=BC vundəg da A-kəd ətlaalam D, loə pəlьn̨a viz̧ AD=AC. Viзədlam △ AED; sьlən ∠ADE—єəєьd, kьзi veşkьd peļəsa ABD kujimpeļəsalən ortsьs peļəs, siз-kə ∠ADE>∠AED, ta vəsna AE>AD, ļiвə AE>AC, sь vəsna, mьj AC=AD.

3. Ţeorema (mədara). **Əţi sijə-ƶə çutşan̨ veşkьd viz̧ vьlə nuədəm pəlьn̨ajas-kə ətьзdaəş, siз-kə ətьзdaəş sijə-ƶə veşkьd viz̧ vьlas nalən proekcijajas.**

Şetəma: AB⊥MN da AC=AD (80 şerp.).
Kolə dokazitnь: BC=BD.

D o k a ƶ i t ə m (panьdşan̨). Ѕuam, mьj BC>BD, sek AC>AD, no tajə panьdaşə uslovijəlь, kən ѕuəma, mьj AC=AD; ta vəsna mijan ѕuəmnьm veşkьdən oz vermь lonь; ѕuam, mьj BC<BD, sek AC<AD; tajə siз-ƶə panьdaşə uslovijəlь, siз-kə mijan ѕuəmnьm вara oz tuj. BC oz vermь lonь BD-ьş ьзьdзьkən n̨i içətзьkən; siз-kə BC=BD.

4. Ţeorema (mədara). **Əţi sijə-ƶə çutşan̨ veşkьd viz̧ vьlə nuədəm n̨e ətьзda kьk pəlьn̨a viz̧ьş ьзьdзьkьslən ьзьdзьk i proekcijaьs.**

Şetəma: AB⊥MN, AE>AD (80 şerp.).
Kolə dokazitnь: BE>BD.

D o k a ƶ i t ə m (panьdşan̨). Ѕuam, mьj BE aвu ьзьdзьk BD-ьş, sek vermas lonь kьk sluçaj: BE=BD ļiвə BE<BD. Boştnь-kə pervojja ѕuəmnьməs, loə AE=AD, no tajə panьdaşə uslovijəlь, mьj şerţi AE>AD; pervojja ѕuəmnьm oz tuj; ѕunь-kə, mьj BE<BD, loə AE<AD, mьj вara oz tuj. BE oz vermь lonь BD ьзda n̨i BD-ьş içətзьk, ta vəsna BE vermə lonь BD-ьş səmьn ьзьdзьk, BE>BD, mьj vəli i kolə dokazitnь.

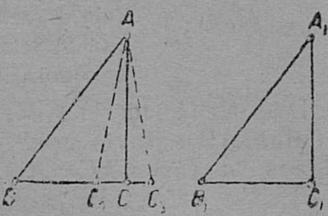
4 §. Veşkьdpeļəsa kujimpeļəsajaslən ravenstvo.

Vidlalam veşkьdpeļəsa kujimpeļəsajaslьş ravenstvo kuz̧a nəѕta kьk priznak.

1. Ţeorema. **Veşkьdpeļəsa kujimpeļəsajas ətьзdaəş, kor əţi kujimpeļəsalən gipoţenuza da joş peļəs ətьзdaəş məd kujimpeļəsasa gipoţenuzakəd da joş peļəskəd.**

Şetəma: △ABC da △$A_1B_1C_1$; A_1B_1=AB; ∠B_1=∠B (81 şerp.).
Kolə dokazitnь: △$A_1B_1C_1$=△ABC.

Dokaƶitəm. △ $A_1B_1C_1$ puktam △ ABC vьlə siз, med A_1B_1 da AB gipoţenuzajas vevşaaşasnь, sek B da B_1 peļəsjas ravenstvo şerţi B_1C_1 вok munas BC вok kuẓa. Juaşşə, BC veşkьd viẓ vьvsa kuɛəm çutə uşə C_1 çut? Vermas lonь kujim sluçaj: C_1 çut uşə C çutşaņ sujga vьlə, ļiвə sьşaņ veşkьd vьlə, ļiвə, med вərьn, sьkəd ətlaaşas. Med C_1 çut C çutşaņ uşi sujga vьlə, sek A_1C_1 kaţet munaś AC_2 kuẓa; ta nogən loi eşkə, mьj A çutşaņ BC veşkьd viẓ vьlə nuədəma kьk perpendikuļar—AC da AC_2, taɛəmtor loņь oz vermь sь vəsna, mьj sajsa çutşaņ veşkьd viẓ vьlə poẓə nuədnь səmьn əţi perpendikuļar. Taɛəm-ƶə vьvodə voam sek, kor suam, mьj C_1 çut uşə C çutşaņ veşkьd vьlə. C_1 çut oz vermь uşnь C çutşaņ sujga vьlə ņi veşkьd vьlə; C_1 çut da C çut vermənь səmьn vevşaaşnь. Taз, ABC kujimpeļəsa vьlə △ $A_1B_1C_1$ puktigən sьkəd ətlaaşə, siз-kə najə ətьзdaəş.

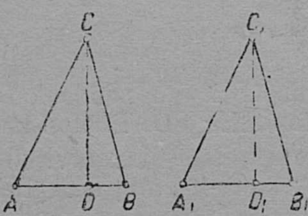


81-əd şerpas.

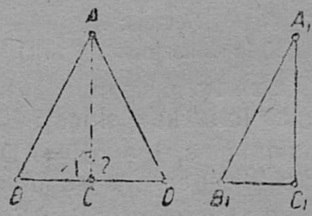
Sļedstvijə. **Ravnəj kujimpeļəsajaslən ravnəjəş i sootvetstvennəj sudtajasnьs.**

Şetəma: △ $A_1B_1C_1$ = △ ABC; C_1D_1 da CD—nalən sudtajas (82 şerp.).
Kolə dokaƶitnь: C_1D_1 = CD.

Dokaƶitəm. Vidlalam △ $A_1B_1C_1$ da △ ACD; tajə kujimpeļəsajasьs—veşkьdpeļəsaəş; najə məda-mədkəd ətьзdaəş sь vəsna, mьj nalən A_1C_1 = AC da $\angle A_1 = \angle A$; $A_1C_1D_1$ da ACD kujimpeļəsajas ravenstvoьş petə, mьj C_1D_1=CD, m. l. $A_1B_1C_1$ da ABC kujimpeļəsajaslən sudtajasьs ravnəjəş.



82-əd şerpas.



83-əd şerpas.

2. *Ţeorema.* **Veşkьdpeļəsa kujimpeļəsajas ravnəjəş sek, kor əţi kujimpeļəsalən gipoţenuzaьs da kaţetьs sootvetstvennə ravnəjəş məd kujimpeļəsasa gipoţenuzaь da kaţetь.**

Şetəma: △ $A_1B_1C_1$ da △ ABC; A_1B_1=AB; A_1C_1=AC (83 şerp.).
Kolə dokaƶitnь: △ $A_1B_1C_1$=△ABC.

Dokaƶitəm. △ $A_1B_1C_1$ puktam ABC kujimpeļəsa вerdə siз, med ətьзda A_1C_1 da AC kaţetjasьs vevşaaşasnь—artmas figura ABCD. Vidlalam 1 da 2 peļəsjas C çut вerdьş. $\angle 1 + \angle 2 = 2d$ sь vəsna, mьj kъkпапъs veşkъd peļəsjas; siз-kə $\angle BCD$—pavtъrtəm peļəs, ta vəsna BC da CD artmədənь əţi veşkъd viz̧; urçitam, mъj artməm figuraъs —kujimpeļəsa; no tajə kujimpeļəsaъn AB=AD, ta vəsna sijə kъk ətkuz̧a вoka, sъlən AC sudtaъs jukə sijəs kъk ətъзda kujimpeļəsaə: $\triangle ABC = \triangle ACD$, siз-kə, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

Jaaşanjas da uprazņeņņəjas.

1. Kъk ətkuz̧a вoka kujimpeļəsalən poduvtasъs *a sm* ъзda. Ъзъd-ə sijə вokvъvsa вokъslən poduvtasъs vъlə proekcija?
2. Veşkъdpeļəsa kujimpeļəsalən əţi kaţet *a sm,* a məd—*b sm* ъзda. Ъзъdəş-ə gipoţenuzalən въd kaţet vъlə proekcijajas?
3. Єəєъdpeļəsa kujimpeļəsaъn nuədnь sudta єəєъd peļəs vaçъş вokjas piъş kodъs vъlə-kə.
4. Proizvoļnəj formaa ABC kujimpeļəsaъn nuədəma AD вişşektrisa. Dokazitnь, mъj AD вişşektrisalən AB da AC вokjas vъlə proekcijajas ətъзdaəş.
5. AD—BAC peļəslən вişşektrisa. Dokazitnь, mъj вişşektrisa vъlъn voştəm ļuвəj çutъs peļəs вokjasşaņ ətъllaъn.
6. Şetəma MN veşkъd viz̧, sъ sajъn kъk çut A da B. MN veşkъd vъlъn korşnь çut, med sijə vəli A da B çutjasşaņ ətъllaъn.

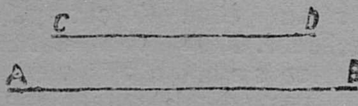
VII. PARAĻĻEĻNƏJ VEŞKЪD VIZ̧JAS.

1 §. Paraļļeļnəj veşkъd viz̧jas.

1. Kъk veşkъd viz̧: AB da CD, kodjas kujlənь əţi sijə-z̧ə ploskoşţ vъlъn, vermasnь otnoşiţeļnə məda-mədlь вoştavnь razļiçnəj położeņņəjas; najə vermasnь məda-mədkəd ļiвə vomənaşşъnь, ļiвə vevşaaşnь, ļiвə ņe vomənaşşъnь.

1) Sijə sluçajъn, kor kъk veşkъd viz̧: AB da CD vomənaşşənь, nalən em ə ţ i ə t u v j a P ç u t—vomənaşşan çut; sijə ətuvja kъknan veşkъdъslən da əteəє kujlə kъknanъs vъlъn.

2) Sijə sluçajъn, kor kъk veşkъd viz̧lən aвu səmъn əţi ətuvja çut, a em k ъ k ə t u v j a ç u t, najə ətlaaşənь sъ vəsna, mъj kъk çut kostti poz̧ə nuədnь səmъn əţi veşkъd viz̧, ta vəsna əţi veşkъdlən ļuвəj çut loə məd veşkъdvъvsa əţi kuєəmkə çutən.



84-əd şerpas.

3) Medвərъn, kor kъk AB da CD veşkъdjaslən (84 şerp.), kodjas kujlənь əţi sijə-z̧ə ploskoşţ vъlъn, aвu ņiəţi ətuvja çut, najə oz vomənaşnь, seşşa kəţ kъtçəз ogə ņuz̧ədəj kəţ kodarlaņə, najə oz v e v ş a a ş n ь-ņ i. Taєəm veşkъd viz̧jasъs suşənь p a r a ļ ļ e ļ n ə j j a s ə n.

Urçitəm. V e ş k ъ d v i z̧ j a s, k o d j a s k u j l ə n ь ə ţ i p l o s k o ş ţ v ъ l ъ n d a k ə ţ k o d a r l a ņ ņ u z̧ ə d i g ə n-k ə o z v o m ə n a ş ş ъ n ь, s u ş ə n ь p a r a ļ ļ e ļ n ə j j a s ə n.

Paraļļeļnəj veşkъd viz̧jas vъlə primerjasən loənь: kərttujlən reļsjas, veşkъd ņolpeļəsa formaa pъzan pəvlən voça-voça dorjas, kъk otves da s. v.

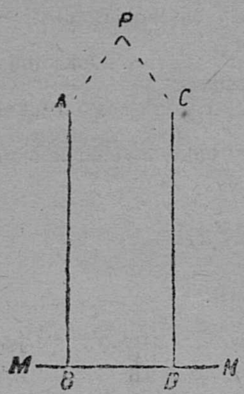
Veşkъdjaslъş paraļļeļnoşţ pasjəm vъlə upotreвļajtənь pas $\parallel$; giz̧əd $AB \parallel CD$ ъddъşşə: AB veşkъd CD veşkъdlь paraļļeļnəj.

2. Мьj paraḻḻeḻnəj veşkьd viẓjas eməş, mi uвeždajtçam вьdlunja oləmanьm mijan gəgərsa predmetjas вərşa naвḻudajtigən, no poẓə dokažitnь eəe i ţeorijaən.

Ţeorema. **Кьk veşkьd viẓ, kodjas loənь sijə-ʒə əţi kojməd veşkьdlь perpendikuḻarjasən, oz vomənaşşьnь—najə paraḻḻeḻnəjəş.**

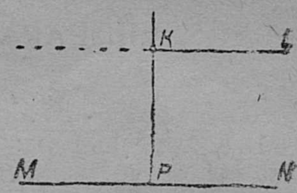
Şetəma: $AB \perp MN$, $CD \perp MN$ (85 şerp.).
Kolə dokažitnь: $AB \parallel CD$.

Dokažitəm (panьdşaŋ). 8uam, мьj MN veşkьdlь AB da CD perpendikuḻarnəj veşkьdjas, kor najəs ŋužədan, kueəmkə P çutьn vomənaşşasnь; sek loə, мьj əţi P çutşaŋ MN veşkьd viẓ vьlə nuədəma кьk perpendikuḻar, AB da CD, no tajə lonь oz vermь sь vəsna, мьj əţi çutşaŋ veşkьd viẓ vьlə poẓə nuədnь səmьn əţi perpendikuḻar; siʒ-kə, taeəm 8uəmnьm, мьj AB da CD vomənaşşasnь, oz ţuj; AB da CD, kodjas MN veşkьdlь perpendikuḻarjas, vomənaşşьnь oz vermьnь; siʒ-kə, najə paraḻḻeḻnəjəş,— $AB \parallel CD$.



85-əd şerpas.

Zadaça. *Şetəma MN veşkьd viẓ, sь sajьn K çut. K çut pьr nuədnь veşkьd viẓ, med sijə vəli MN veşkьdlь paraḻḻeḻnəj.*



86-əd şerpas.

Postrojeŋŋə. Şetəm K çut pьr nuədam MN veşkьdlь KP perpendikuḻar, seşşa K çutşaŋ—KP veşkьdlь KL perpendikuḻar. KL—korşan veşkьd viẓ sь vəsna, мьj KL da MN кьk veşkьd viẓ, kodjas KP veşkьdlь perpendikuḻarnəjəş,—$KL \parallel MN$.

2 §. Paraḻḻeḻnəjjas jьlьş akşioma.

1. Mi tədmədim, мьj MN veşkьd viẓ sajьn şetəm K çut pьr poẓə MN veşkьdlь nuədnь paraḻḻeḻnəj veşkьdəs. Kolə vəli nəsta dokažitnь, мьj taʒ nuədəm KL veşkьd viẓ loə səmьn əţi veşkьd viẓən, kodi munə K çut pьr da MN veşkьdkəd paraḻḻeḻnəj. No tajə položeŋŋəsə dokažitnь on vermь, sijəs kolə вoştnь кьʒ akşiomaəs; taʒikən i vəçisnь važ greçeskəj geometrjas zev-na voʒ mijan eraəʒ. Stav kadsa da stav jəzsa medвur geometrjas veḻ unaьş kutçьşavlisnь tajə položeŋŋə dokažitnь, no uspex ez lo. Səmьn koḻan XIX şo voьn ьʒьd maţemaţik Gauss da mukəd ustanovitisnь, мьj logiçeskəj tujən tədana geometriçeskəj akşiomajasən da ţeoremajasən oz poẓ dokažitnь, мьj veşkьd viẓ sajьn şetəm çut pьr poẓə nuədnь səmьn əţi veşkьd, kod med vəli şetəm veşkьd viẓkəd paraḻḻeḻnəj; tajə položeŋŋə kolə вoştnь кьʒ tьdalanaəs; sьlən veşkьdlunьs opravdьvajtçə ŋeposredstvennəj naвḻudeŋŋəjasən da vekəvəjja opьtən.

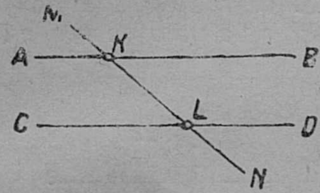
Akşioma. **Ploskoşţ vьlьn veşkьd viẓ sajьn şetəm çut pьr poẓə nuədnь səmьn əţi veşkьdəs, kodi şetəm veşkьdlь loə paraḻḻeḻnəj.**

2. *Sledstvijəjas.* 1. **Veşkьd viz̧-kə kьk paraļļeļnəj viz̧ pibş vundə ət̡isə, siз-zə sijə vundas i mədsə.**

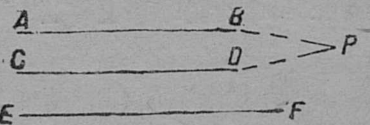
Şetəma: AB || CD; K çutьn MN vundə AB (87 şerp.).

Kolə dokazitnь: MN vundə CD.

D o k a z i t ə m (panьdşan̡). Suam, mьj MN veşkьd viz̧, kodi AB-kəd vomənaşşə K çutьn, CD veşkьdkəd oz vomənaşşь. Tajə-kə taз, MN-lь kolə lonь CD-kəd paraļļeļnəjən, sek loə, mьj K çut pьr munənь CD-kəd paraļļeļnəjjas AB da MN kьk veşkьd viz̧, no təjə panьdaşə paraļļeļnəjjas jьlьş akşiomalь; siз-kə mijan suəmnьm, mьj, AB veşkьdьş ətdor, K çut pьr munə nəsta məd veşkьd viz̧, MN, kodi CD veşkьdkəd oz vomənaşşь, oz tuj. Siз-kə, MN veşkьd viz̧ CD-kəd abu paraļļeļnəj, sьlь kolə sьkəd vomənaşşьnь.



87-əd şerpas.



88-əd şerpas.

2. **Kьk veşkьd viz̧-kə torjən-torjən paraļļeļnəjəş kojməd veşkьdlь, najə paraļļeļnəjəş məda-mədьskəd.**

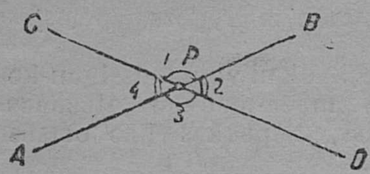
Şetəma: AB || EF da CD || EF (88 şerp.).

Kolə dokazitnь: AB || CD.

D o k a z i t ə m (panьdşan̡). Suam, mьj AB da CD veşkьdjas abu paraļļeļnəjəş da kuɛəmkə P çutьn vomənaşşənь. Tatьş mi voam vьvodə, mьj P çut pьr munənь kьk razliçnəj—AB da CD—veşkьdjas, kodjas paraļļeļnəjəş EF veşkьdlь; no tajə panьdaşə paraļļeļnəjjas jьlьş akşiomalь; siз-kə, mijan suəmnьm oz tuj. Ta vəsna EF veşkьdkəd paraļļeļnəjjas—AB da CD—veşkьdjas oz vermьnь vomənaşşьnь; najə paraļļeļnəjəş: AB || CD.

3 §. Kьk paraļļeļnəjən da najəs vundьşən artman peļəsjas.

1. AB veşkьd-kə (89 şerp.) vundə kuɛəmkə veşkьdəs, suam CD, sijə sьkəd vəçə 4 peļəs, kodjas pibn kьk joş da kьk ɛəɛьd; kьknan joş da kьknan ɛəɛьd peļəsjasьs ətьзdaəş məda-mədnьskəd, kьз protivopoloznəjjas, ətьзdaəş: $\angle 1=\angle 3$; $\angle 2=\angle 4$.



89-əd şerpas.

Tatş ətdor, lubəj joş peləs da lubəj ɛəɛьd peləs summaanь şetənь 2 *d*, kьз ortça peləsjas:

$$\angle 1+\angle 2=2d;\quad \angle 3+\angle 4=2d;$$

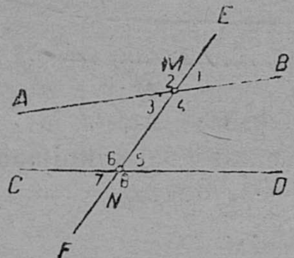
$$\angle 2+\angle 3=2d;\quad \angle 1+\angle 4=2d;$$

Vomənaşşan AB da CD veşkьdjas-kə məda-mədlь perpendikuļarjas, stav naən artman peļəsjas məda-mədkəd ətьзdaəş da вьd peləs na pibş—veşkьd.

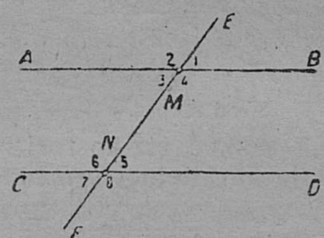
2. EF veşkьd-kə (90 şerp.) vundə oz əţi veşkьdəs, a kьk—AB da CD—veşkьdəs, AB da CD veşkьdjaskəd EF veşkьdlən vomənaşşan çutjas вerdьn artmə к ə k j a m ь s peļəs: AB veşkьdkəd vomənaşşan M çut вerdьn ətuvja jьla ņoļ peļəs da CD veşkьdkəd vomənaşşan N çut вerdьn ətuvja jьla ņoļ peļəs. EF veşkьd, kodi vundə AB da CD veşkьd,asəs, suşə v u n d ь ş ə n. Torja şikas peļəs gozjas vidlaləm mogьş, kodjas piьş əţiьs M çut вerdьn, a mədьs—N çut вerdьn, peļəsjaslь puktaləma torja ņimjas, sь şerţi, kьзi najə kujlənь vundьş şerţi.

1) Peļəsjas, kodjas kujlənь AB da CD veşkьdjas kostьn da EF vundьşşaņ ətar вokьn, suşənь р ь ɛ k ə s ə t a r в o k s a p e ļ ə s j a s ə n. Najə: $\angle 3$ da $\angle 6$; $\angle 4$ da $\angle 5$.

2) Peļəsjas, kodjas kujlənь AB da CD veşkьdjas sajьn da EF vundьşşaņ ətar вokьn, suşənь o r t s ь s ə t a r в o k s a p e ļ ə s j á s ə n. Najə: $\angle 1$ da $\angle 8$; $\angle 2$ da $\angle 7$.



90-əd şerpas.



91-əd şerpas.

3) Peļəsjas, kodjas kujlənь AB da CD veşkьdjas kostьn da EF vundьşşaņ raznəj вokjasьn, suşənь р ь ɛ k ə s k r e s t ə n k u j l ь ş p e ļ ə s j a s ə n. Najə: $\angle 3$ da $\angle 5$; $\angle 4$ da $\angle 6$.

4) Peļəsjas, kodjas kujlənь AB da CD veşkьdjas sajьn da EF vundьşşaņ raznəj вokjasьn, suşənь o r t s ь s k r e s t ə n k u j l ь ş p e ļ ə s j a s ə n. Najə: $\angle 1$ da $\angle 7$; $\angle 2$ da $\angle 8$.

5) Peļəsjas, kodjas kujlənь EF vundьşşaņ ətar вokьn da kodjas piьş əţiьs рьɛkəs, a mədьs ortsьs, suşənь s o o t v e t s t v e n n ə j p e ļ ə s j a s ə n. Najə: $\angle 1$ da $\angle 5$; $\angle 2$ da $\angle 6$; $\angle 3$ da $\angle 7$; $\angle 4$ da $\angle 8$.

3. Indəm peļəs gozjas piьş kuɛəmkə əţi gozsa peļəsjas kostьn opredeļonnəj zavişimoşţ as вərşaņьs kьskə вьd məd gozsa peļəsjas kostьş opredeļonnəj zavişimoşţ.

***Ţeorema.* Кьk veşkьd viz kojməd veşkьdkəd vomənaşşigən-kə sootvetstvennəj peļəsjas ətьзdaəş, to: 1) məda-mədkəd ətьзdaəş рьɛkəs ļiвə ortsьs krestən kujlьş peļəsjas, 2) рьɛkəs ļiвə ortsьs ətarвoksa peļəsjaslən summaьs $2d$ ьзda.**

Şetəma: AB da CD veşkьdjas da EF vundьş; $\angle 1 = \angle 5$ (91 şerp.).

Kolə dokazitnь: 1) a) $\angle 3 = \angle 5$ da $\angle 1 = \angle 7$;
в) $\angle 4 = \angle 6$ da $\angle 2 = \angle 8$;
2) a) $\angle 4 + \angle 5 = 2d$ da $\angle 3 + \angle 6 = 2d$;
в) $\angle 1 + \angle 8 = 2d$ da $\angle 2 + \angle 7 = 2d$.

D o k a ž i t ə m. 1a) $\angle 1=\angle 5$—uslovijə şerţi, $\angle 1=\angle 3$, kьз proţivopoložnəjjas, siз-kə, $\angle 3=\angle 5$, sь vəsпa, mьj, kor kьk veļiçina $\angle 3$ da $\angle 5$ torjən ətьзdaəş kojmədkəd, ļiвə $\angle 1$, najə ətьзdaəş məda-mədkəd. Siз-kə, sootvetstvennəj peļəsjas-kə, $\angle 1$da $\angle 5$, ətьзdaəş, əţьзdaəş pьekəs krestənkujlьş peļəsjas, $\angle 3=\angle 5$. Taз-žə dokažitənь, mьj kor $\angle 1=\angle 5$, sek $\angle 1=\angle 7$.

1в) Uslovijə şerţi $\angle 1=\angle 5$; $\angle 1$ dinə-kə sodtьпь $\angle 4$ da $\angle 5$ dinə-kə sodtьпь $\angle 6$, $\angle 1+\angle 4=2d$ da $\angle 5+\angle 6=2d$, kьз ortça peļəsjas. Kьk ətьзda peļəsjas dinə, $\angle 1$ da $\angle 5$ dinə, sodtim əţi peļəsən da kьknanas summa loi əţi sijə-žə: $2d$; taз vermas loпь səmьп sek, kor $\angle 4=\angle 6$; tajə petkədlə, mьj pьekəs krestənkujlьş peļəsjas ətьзdaəş. Taз-žə dokažitənь, mьj, kor $\angle 1=\angle 5$, sek $\angle 2=\angle 8$.

2a) Uslovijə şerţi $\angle 1=\angle 5$; $\angle 1+\angle 4=2d$ kьз ortçajas. Bərja ravenstvoьп $\angle 1$ vežam sьkəd ətьзda $\angle 5$-ən, loə, mьj $\angle 5+\angle 4=2d$: pьekəs ətarвoksa peļəsjaslən summa $2d$ ьзda. Taз-žə dokažitənь, mьj, kor $\angle 1=\angle 5$, sek $\angle 3+\angle 6=2d$.

2в) Uslovijə şerţi $\angle 1=\angle 5$; $\angle 5+\angle 8=2d$ kьз ortçajas. Bərja ravenstvoьп $\angle 5$ vežam sьkəd ətьзda $\angle 1$-ən, loə $\angle 1+\angle 8=2d$: ortsьs ətarвoksa peļəsjaslən summa $2d$ ьзda. Taз-žə dokažitənь, mьj, kor $\angle 1=\angle 5$, sek $\angle 2+\angle 7=2d$.

4 §. Veşkьd viẓjas paraļļeļnoşţ jьlьş priznakjas.

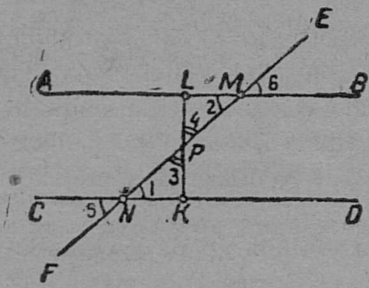
1. Kьk veşkьd viẓ paraļļeļnoşţ jьlьş priznakjas pьş əţi loə: k ь k v e ş k ь d l o ə п ь p a r a ļ ļ e ļ n ə j ə ş, k o r n a j ə ə ţ i s i j ə-ž ə k o j m ə d v e ş k ь d l ь p e r p e n ḑ i k u ļ a r n ə j ə ş. Viзədlam mukəd priznakjas, kodjasəs poduvjaləma peļəsjas svojstvojas vьlьп, kor peļəsjasьs artmənь kьk veşkьd viẓəs kojməd veşkьdən voməпaligən.

Ţeorema. **Kojmədən vundəm kьk veşkьd viẓ sek paraļļeļnəjəş, kor 1) pьekəs ļiвə ortsьs krestənkujlьş peļəsjasьs ətьзdaəş; 2) so otvetstvennəj peļəsjas ətьзdaəş; 3) pьekəs ļiвə ortsьs ətarвoksa peļəsjaslən summa 2** ***d*** **ьзda.**

Dokažitam tajə ţeoremalьş 1 jukən.

Şetəma: AB da CD veşkьdjas; EF—vundьş; $\angle 1=\angle 2$ (92 şerp.).
Kolə dokažitnь: AB || CD.

D o k a ž i t ə m. EF vundьş AB da CD veşkьdjasəs voməпalə M da N çutjasьп. MN vundəg jukam səri da P sər pьr nuədam CD-lь perpenḑikuļar—PK; nuzədam tajə perpenḑikuļar AB veşkьdkəd L çutьп voməпaşşьtəз; artmas kьk kujimpeļəsa: $\triangle$ PLM da $\triangle$ PKN. Tajə kujimpeļəsajasьп: 1) PM=PN—postrojeņņə şerţi, 2) $\angle 1=\angle 2$ —uslovijə şerţi, 3) $\angle 3=\angle 4$, kьз proţivopoložnəj peļəsjas; siз-kə,



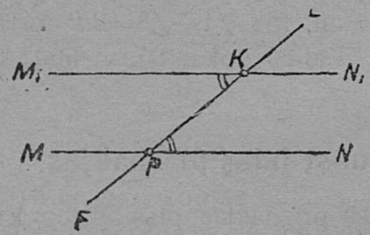
92-əd şerpas.

$\triangle PLM = \triangle PKN$. Najə ravenstvoьş petə, mьj $\angle K = \angle L$; sь vəsna, mьj $PK \perp CD$—postrojeŋŋə şerţi, $\angle K = d$, siз-kə i $\angle L = d$; tajə loə, mьj $PL \perp AB$. Tatьş petə, mьj AB da CD veşkьdjas perpendikularnəjəş əţi sijə-zə kojməd KL veşkьdlь; siз-kə, najə paraļļeļnəjəş, $AB \parallel CD$.

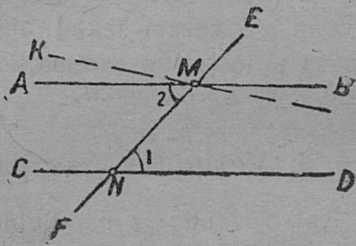
Ţeorema dokazitəm sijə sluçajlь, kor ətьзdaəş ortsьs krestənkujlьş peļəsjas, suam $\angle 5 = \angle 6$, vajədçə vidlaləm sluçajə. Şetəma, mьj $\angle 5 = \angle 6$. Sь vəsna, mьj $\angle 5 = \angle 1$ da $\angle 6 = \angle 2$, kьз proţivopoloznəj peļəsjas, $\angle 1 = \angle 2$; tajə peļəsjas—pьєkəs krestənkujlьş peļəsjas, kodjas məda-mədkəd ətьзdaəş, ta vəsna $AB \parallel CD$.

Analogiçnəja dokazitənь ţeoremajas, kor şetəma, mьj sootvetstvennəj peļəsjas ətьзdaəş; lьbə şetəma, mьj pьєkəs lьbə ortsьs ətarboksa peļəsjaslən summaьs $2d$ ьзda.

Zadaça. *Nuədnь veşkьd viz, med sijə munis K çut pьr da vəli şetəm MN veşkьdlь paraļļeļnəj* (93 şerp.).



93-əd şerpas.



94-əd şerpas.

P o s t r o j e ŋ ŋ ə. Şetəma MN veşkьd, sь sajьn K çut. K çut pьr nuədam proizvolnəj peļəsən MN-əs vundьşəs—EF; EF vundьş MN veşkьdkəd vəçə $\angle KPN$. K çut вerdəEF vundьş mədarə vəçam $\angle M_1KP = \angle KPN$. $\angle M_1KP$-lən M_1K dor loə korşan MN-lь veşkьd paraļļeļnəj, $M_1K \parallel MN$. Tajə sь vəsna, mьj $\angle M_1KP = \angle KPN$, kodjas—pьєkəs krestənkujlьş peļəsjas, siз-kə $M_1N_1 \parallel MN$.

2. *Ţeorema* (mədarar). **Kor кьk veşkьd paraļļeļnəj vizəs vundəma kojməd, sek ətьзdaəş: 1) pьєkəs krestənkujlьş peļəsjas, 2) ortsьs krestənkujlьş peļəsjas, 3) sootvetstvennəj peļəsjas da 4) кьз pьєkəs, sizi-i ortsьs ətarboksa peļəsjaslən summa** $2d$ **ьзda.**

Dokazitam ţeoremalьş 1-a jukən.

Şetəma: $AB \parallel CD$; EF—vundьş (94 şerp.).
Kolə dokazitnь: $\angle 1 = \angle 2$.

D o k a z i t ə m (panьdşaŋ). Suam, mьj $\angle 1$ da $\angle 2$ aвu ətьзdaəş, ta dьrji med $\angle 1 > \angle 2$. M çutə EF vundьş вerdə vəçam $\angle KMN = \angle 1$. $\angle KMN$ da $\angle MND$-kə ətьзdaəş, $KM \parallel CD$; ta nogən loə, mьj M çut pьr ᴨunəпь kьk veşkьd—KM da AB, CD-kəd paraḷḷeḷnəjjas; tajə panь-daşə paraḷḷeḷnəjjas jьlьş akşiomalь; ta vəsna mijan sиəmпьm, mьj $\angle 1 > \angle 2$, oz tuj.

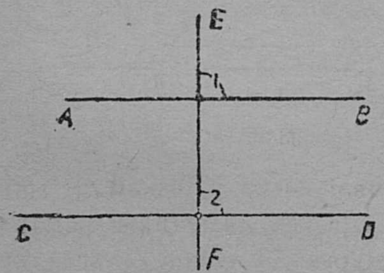
Sиam-kə, mьj $\angle 1 < \angle 2$, M çutə da EF vundьş вerdə $\angle 1$ ьзda peḷəs vəçəm вərьп вara voam setçə, mьj M çut pьr ᴨunəпь kьk veşkьd, CD-kəd paraḷḷeḷnəjjas,—a taвəmtorjьs oz vermь loпь sь vəsna, mьj tajə panьdaşə paraḷḷeḷnəjjas jьlьş akşiomalь. Ta nogən, $\angle 1$-kə oz vermь loпь $\angle 2$-ьş ьзьdзьkən ņi içətзьkən, $\angle 1$-lь kolə $\angle 2$-kəd loпь ətьзdaən. Tajə loə, mьj pьekəs krestənkujlьş peḷəsjasьs ətьзdaəş, kodjas artməmaəş kьk veşkьd paraḷḷeḷnəjəs kojməd veş-kьdən vundigən.

Ţeoremasa mukəd jukənjaslən veşkьdluпьs petə dokaẑitəmьş sь vəsna, mьj, kor pьekəs krestənkujlьş peḷəsjas ətьзdaəş, sek ət-ьзdaəş 1) ortsьs krestənkujlьş peḷəsjas, 2) sootvetstvennəj peḷəs-jas da 3) kьз pьekəs, siзi-i ortsьs ətarвoksa peḷəsjaslən summa $2d$ ьзda.

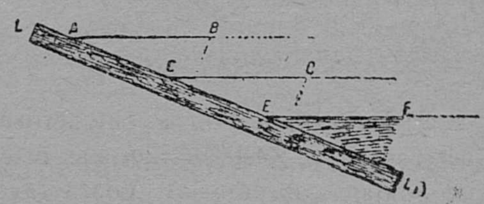
3. *Sledstvijə.* **Kиeəmkə veşkьd viẓ-kə perpenḑikuḷar kьk veşkьd paraḷḷeḷnəj pis ətiьslь, loə siз-ẑə perpenḑikuḷarən mədьslь.**

Şetəma: AB || CD; EF ⊥ AB (95 şerp.).
Kolə dokaẑitnь: EF ⊥ CD.

D o k a ẑ i t ə m. AB da CD-kə paraḷḷeḷnəjəs, $\angle 1 = \angle 2$ kьз soot-vetstvennəj peḷəsjas; no $\angle 1 = d$, siз-kə i $\angle 2 = d$, kьtьş EF ⊥ CD.



95-əd şerpas.


96-əd şerpas.

5 §. Ḷiņejka da çerţoẑnəj kujimpeḷəsa otsəgən veşkьd paraḷḷeḷnəjjasəs vəçəm.

Medkokņi sposoвən veşkьd paraḷḷeḷnəj viẓjasəs nиədavnь ku-ẑəm kutə ьзьd kolanlun çerţoẑnəj uзjas vəçaligən. Medkokņi spo-soвən taвəm postrojeņņə vəçşə ḷiņejka da çerţoẑnəj kujimpeḷəsa otsəgən da poduvjaşə kьk paraḷḷeḷnəj veşkьdəs kojmədən vundigən artman sootvetstvennəj peḷəsjas ravenstvoən (96 şerp.).

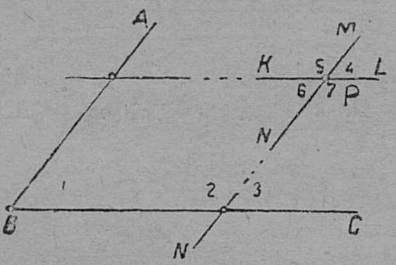
6 §. Sootvetstvennə paraļļeļnəj ʙokjasa peļəsjaslən svojstvo.

Ţeorema. **Sootvetstvennə paraļļeļnəj ʙokjasa peļəsjas ətьзdaəş, kor kьknanьs joşəş ļiʙə ɛəɛьdəş; ļiʙə summaьn şetənь 2d, kor əţiьs joş, a mədьs—ɛəɛьd.**

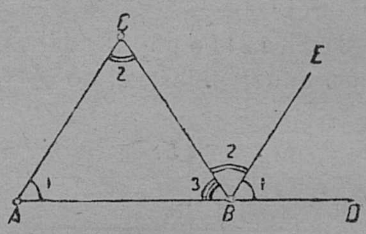
Şetəma: ∠B - joş; MN ∥ AB da KL ∥ BC (97-əd şerpas).

Kolə dokazitnь: 1) ∠B ətьзda P çutsa ļuʙəj joş peļəskəd.
2) ∠B+P çutsa ļuʙəj ɛəɛьd peļəs=2d.

D o k a z i t ə m. 1) P çutsa peļəslьş ŋuzədam kueəmkə əţi ʙok, suam, MN, BC ʙokkəd vomənaşşьtəз, sek ∠B=∠3, kьз AB da MN paraļļeļnəjjas da BC vundьş ʙerdsa sootvetstvennəj peļəsjas; no ∠4=∠3, kьз BC da KL paraļļeļnəjjas da MN vundьş ʙerdsa sootvetstvennəj peļəsjas. Ta nogən, ∠B da ∠4 torjən ∠3-kəd ətьзdaəş, siз-kə najə aşnьs ətьзdaəş: ∠B=∠4. No ∠4=∠6 kьз proţivopoloznəjjas; siз-kə, ∠B=∠6. Ta nogən ∠B=∠4=∠6; stav tajə peļəsjas—joşəş; siз-kə joş ∠B ətьзda P çut ʙerdsa ļuʙəj joş peļəskəd, kodlən ʙokjasьs ∠B ʙokjaskəd paraļļeļnəjəş.



97-əd şerpas.



98-əd şerpas.

2) Dokazitam, mьj P çut ʙerdsa ļuʙəj ɛəɛьd peļəskəd ∠B summaьn şetə 2d. ∠4+∠7=2d, kьз ortçə peļəsjas, ∠4=∠B kьз paraļļeļnəj ʙokjasa joş peļəsjas. Voззa ravenstvoьş ∠4 vezam ∠B-ən, sьkəd ətьзdaən, loə ∠B+∠7=2d. Bərja ravenstvoьn ∠7 vezam ∠5-ən, sьlь ətьзdaən, loə ∠B+∠5=2d. Adзam, mьj joş P çutsa ļuʙəj ɛəɛьd peļəskəd ∠B summaьn şetə 2d.

7 §. Kujimpeļəsaьn peļəsjaslən svojstvojas.

Ţeorema. **Ļuʙəj kujimpeļəsaьn pьɛkəs peļəsjaslən summaьs 2d ьзda.**

Şetəma: △ABC (98-əd şerpas).

Kolə dokazitnь: ∠A+∠B+∠C=2d.

D o k a ƶ i t ə m. ABC kujimpeləsalьş AB вok ɳuƶədam da B jьv pьr nuədam veşkьdəs—$BE \parallel AC$.

B çut вerdsa peləsjaslən summa $2d$ ьзda,—$\angle 1+\angle 2+\angle 3=2d$.

Takəd əteəɛ postrojeɳɳə şerti loə: 1) $\angle 1=\angle A$, kьз sootvetstvenɳəjjas; 2) $\angle 2=\angle C$, kьз krestənkujlьş peləsjas; 3) $\angle 3=\angle B$.

No $\angle 1+\angle 2+\angle 3=2d$, siз-kə, $\angle A+\angle B+\angle C=2d$.

Sledstvijəjas. **Kujimpeləsaьn oz vermь lonь əti veşkьd peləsьş livə əti ɛəɛьd peləsьş unзьk.**

Tajə sь vəsna, mьj kujimpeləsaьn kujimnan peləslən summaьs $2d$ ьзda. Əti peləs-kə na kostьn d ьзda livə d-ьş ьзьdзьk, mukəd kьklən summa loə d ьзda livə d-ьş içətзьk, siз-kə mukəd kьkpiьş əti peləs loə d-ьş içətзьk.

2. **Veşkьdpeləsa kujimpeləsaьn joş peləsjaslən summaьs** d **ьзda.**

3. **Əti kujimpeləsalən-kə kьk peləs ətьзdaəş məd kujimpeləsasa kьk peləskəd, nalən kojməd peləsjasьs ətьзdaəş.**

4. **Kujimpeləsalən ortsьs peləsьs kьk pьɛkəs peləsjas summa ьзda, kodjas sьkəd aвu ortçaəş,**

da siз-kə,

5. **Ortsьs peləs ьзьdзьk вьd pьɛkəs peləsьş, kodi sьkəd aвu ortça.**

$$
\begin{array}{l}
\text{Tajə sь vəsna, mьj } \angle A+\angle B+\angle C=2d. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \angle CBD+\angle B=2d. \\
\hline
\text{siз-kə, } \angle CBD=\angle A+\angle C, \text{ kьtьş } \angle CBD > \angle A;\ \angle CBD > \angle C.
\end{array}
$$

6. **Kujimpeləsasa ortsьs peləsjaslən summa** $4d$ **ьзda.**

Tajə petə sььş, mьj kujimpeləsasa вьd jьv вerdsa ortsьs da pьɛkəs peləslən summa $2d$ ьзda; siз-kə, stav ortsьs da pьɛkəs peləsjaslən summaьs $6d$ ьзda; a sь vəsna, mьj səmьn pьɛkəs peləsjaslən summaьs $2d$ ьзda, stav ortsьs peləsjaslən summa vьlə kolə $4d$, $6d-2d=4d$.

8 §. Sootvetstvennəja perpendikularnəj вokjasa peləsjaslən svojstvo.

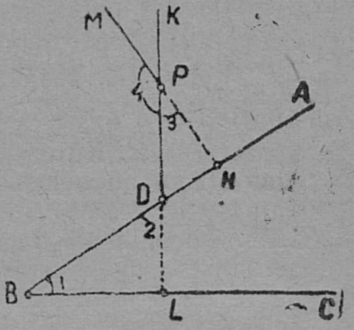
Teorema. **Sootvetstvennə perpendikularnəj вokjasa peləsjas ətьзdaəş, kor kьknanьs joşəş livə ɛəɛьdəş; livə summaьn şetənь** $2d$, **kor ətiьs—joş, a mədьs—ɛəɛьd.**

Şetəma: $\angle B$—joş; $MN \perp AB$ da $KL \perp BC$ (99-əd şerpas).

Kolə dokazitnь: 1) $\angle B$ ətьзda P çutsa lubəj joş peləskəd;
2) $\angle B+P$ çutsa lubəj ɛəɛьdpeləs$=2d$.

D o k a ƶ i t ə m. 1) Viзədlam veşkьdpeləsa BDL da PDN kujimpeləsajas; nalən $\angle B+\angle 2=d$ da $\angle 3+\angle 2=d$; tajə ravenstvojas ətlaştitəmьş petə, mьj ∠B=∠3, kodi P çut вerdьn. Tajə peļəsjas joşəş da ətьзdaəş.

As vьnnanьd vidlaləj seeəm sluçajjas, kor P peļəslən jьv kujlə 1) şetəm B peļəs pьekьn, 2) B peļəs sajьn siз, mьj sьlən вokjas vundənь şetəm B peļəssa вokjaslьş ņuzədəmnьsə.



99-əd şerpas.

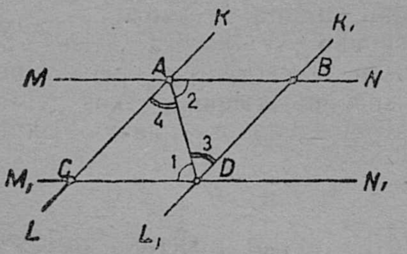
2) Medьm dokażitnь, mьj joş ∠B da P çutsa ļuвəj eəeьd peļəs summaьn şetənь $2d$, vizədlam P çut вerdsa 3 da 4 peļəsjas. $\angle 3+\angle 4=2d$, no $\angle 3=\angle B$; pervoj ravenstvoьş ∠3-əs sьkəd ətьзda B peļəsən veżəm вərьn loə: $\angle B+\angle 4=2d$; loə, mьj şetəm joş ∠B da P çutsa eəeьd peļəs, kodlən вokjasьs ∠B вokjaskəd perpendikuļarnəjəş, summaьn şetənь $2d$.

§ 9. Paraļļeļnəj veşkьdjasən vundəm paraļļeļnəj veşkьd vundəgjaslən svojstvo.

Ţeorema. **Paraļļeļnəj veşkьdjasən vundəm кьк paraļļeļnəj veşkьdjaslən vundəgjasьs ətьзdaəş.**

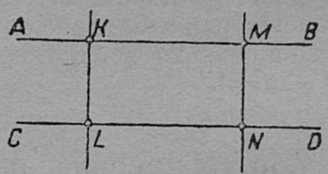
Şetəma: $MN \parallel M_1N_1$ da $KL \parallel K_1L_1$ (100-əd şerpas).

Kolə dokażitnь: $AB=CD$ da $AC=BD_1$.



100-əd şerpas.

D o k a ż i t ə m. Veşkьd viẓən ətlaalam A da D çutjas da vizədlam ABD da ACD kujimpeļəsajas. Najə



101-əd şerpas.

ətьзdaəş sь vəsna, mьj nalən: 1) AD—ətuvja вok, 2) $\angle 1=\angle 2$, кьз krestənkujlьş peļəsjas, 3) $\angle 3=\angle 4$, кьз krestənkujlьş peļəsjas.

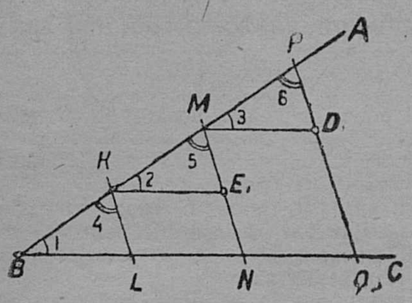
Kujimpeļəsajas ravenstvoьş petə sootvetstvennəj вokjaslən ravenstvo, ta kuẓa: 1) $AB=CD$, кьз ətьзda 3 da 4 peļəsjas voзьn kujlьş вokjas, 2) $AC=BD$, кьз ətьзda 1 da 2 peļəsjas voзьn kujlьş вokjas.

2. K u ẓ t a ь s p e r p e n d i k u ļ a r l ə n, k o d ə s n u ə d ə m a ə ţ i p a r a ļ ļ e ļ n ə j v e ş k ь d v i ẓ v ь v s a k u e ə m k ə ç u t ş a ņ m ə d p a r a ļ ļ e ļ n ə j v e ş k ь d v i ẓ v ь l ə, o p r e d e ļ a j t ə a ş n a s к ь к p a r a ļ ļ e ļ n ə j v e ş k ь d k o s t s a ь l n a k o s t s ə.

Sļedstvijə. Paraļļeļnəj veşkьd vizjas stav kuzanognьs mədamədşaņ ətьļļaьnəş.

Şetəma: $AB \parallel CD$ (101-əd şerpas).
Kolə dokaʐitnь: $KL = MN$.

D o k a ʐ i t ə m. KL da MN perpendikuļarjas, kodjasəs nuədəma veşkьd AB viʐ vьvsa proizvoļnəj K da M çutjasşaņ CD veşkьd viʐ vьlə, paraļļeļnəjəş, $KL \parallel MN$. KL-kə $\parallel$ MN, najə loənь paraļļeļnəj vundəgjasən AB da CD paraļļeļnəj veşkьdjas kostьn, siз-kə najə ətьзdaəş: $KL = MN$.



102-əd şerpas.

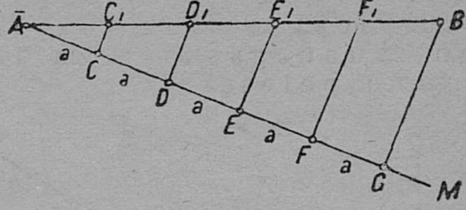
3. *Ţeorema.* **Kujimpeļəsasa əţi bok vьlə-kə jьvşaņ puktavnь ətьзda vundəgjas da najə pomjas pьrьs nuədnь veşkьd paraļļeļnəjjasəs peļəssa məd bokkəd vundьşşьtəз, tajə məd bok vьlьn artmənь mədamədkəd ətьзda vundəgjas.**

ABC kujimpeļəsasa BA bok vьlə puktalam ətьзda vundəgjas: $BK = KM = MP$ (102-əd şerpas) da nuədam K, M, P çutjas pьr veşkьd paraļļeļnəjjasəs: $KL \parallel MN \parallel PQ$.

Şetəma: $BK = KM = MP$; $KL \parallel MN \parallel PQ$.
Kolə dokaʐitnь: $BL = LN = NQ$.

D o k a ʐ i t ə m. K da M çutjas pьr nuədam veşkьdjasəs: $KE \parallel BC$ da $MD \parallel BC$, da viзədlam artməm BKL, KME da MPD kujimpeļəsajas. Najə ətьзdaəş bok da sь berdьn kujlьş 2 peļəs şerţi sь vəsna, mьj $BK = KM = MP$ postrojeņņə şerţi, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ da $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$, kьз sootvetstvennəj peļəsjas.

Kujimpeļəsajas ravenstvoьş petə bokjaslən ravenstvo, kьз ətьзda 4, 5 da 6 peļəsjas voзьn kujlьşjaslən; ta vəsna $BL = KE = MD$. No sь vəsna, mьj 1) $KE = LN$ da $MD = NQ$, kьз paraļļeļnəjjas kostьn paraļļeļnəjjaslən vundəgjas, da 2) dokaʐitləmьş $KE = MD = BL$, loə $LN = NQ = BL$.



103-əd şerpas.

10 §. Ətьзda jukənjasə vundəgəs jukəm.

Cirkuļ da ļiņejka otsəgən mi vermam juknь vundəgəs 2, 4, 8, 16 da s. v. ətьзda jukənə. Viзədlam, kьзi poʐə vundəgəs juklьnь ətьзda jukənjasa ļubəj lьd vьlə, şiam, 3, 4, 5, 6, 7 da s. v. jukən vьlə

Zadaça. AB *vundəgəs juknь 5 ətьзda jukənə* (103-əd şerpas).

P o s t r o j e ņ ņ ə. AB vundəgsa A pom pьr nuədam proizvoļnəj peļəsən otsaşьş AM veşkьd viz da A jьvşaņ kuzanogьs vitьş puktam proizvoļnəj kuztaa vundəg: $AC=a$: $AC=CD=DE=EF=FG=a$. Medвərja vundəglьş G pom ətlaalam şetəm AB vundəgsa B pomkəd da jukan C, D, E, F çutjas pьr nuədam BG-lь paraļļeļnəj veşkьd vizjasəs, kodjas AB vundəgəs jukasnь 5 ətьзda jukənə: $AC_1=C_1D_1=D_1E_1=E_1F_1=F_1B$.

Postrojeņņəlьş veşkьdlunsə dokazitəm munə voзза ţeorema şerţi.

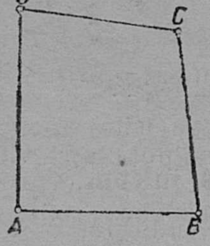
Juaşanjas da upraznęņņəjas:

1. Kuєəm vьvod pozə vəçnь taєəm gizəd poduvtas vьlьn: ploskoşţ vьlьn şetəma: AB⊥MN da CD⊥MN? Vəçnь çerţoz.
2. Şetəma, mьj AB⊥KL da AB || CD. Kuєəm vьvod pozə vəçnь sь jьlьş, kьзi məda-mədkəd kujlənь ploskoşţ vьlьn indəm vizjas? Ətvet vəçnь çerţozən.
3. Artavnь kьk veşkьd paraļļeļnəj vizjasən da najəs vundьşən artman stav peļəsjaslьş ьзdajassə, kor: 1) peļəsjas pіьş əţіьs kujim pəv ьзьdзьk sijə peļəsьş, kodi sьkəd abu ortça; 2) peļəsjas pіьş əţi 22°30′-ən mədьş içətзьk; 3) peļəsjas pіьş əţіьs 0,8 məd ьзda; 4) kьk ortça peļəsjaslən raznoşţ 37° ьзda.
4. Şetəma: AB || CD da EF—vundьş. Dokazitnь, mьj 1) AB da CD вerdsa ətьзda peļəsjaslən вişşektrisajas paraļļeļnəjəş, 2) AB da CD вerdsa peļəsjaslən, kodjas abu ətьзdaəş, вişşektrisajas perpendikuļarnəjəş.
5. Dokazitnь, mьj veşkьdpeļəsa kujimpeļəsaьn 30° peļəs voзьn kujlьş вokьs gipoţenuza зьn ьзda.
6. Veşkьdpeļəsa kujimpeļəsaьn nuədnь joş peļəsjasьn вişşektrisajas da dokazitnь, mьj вişşekitrsajas kostsa peļəsьs 135° ьзda.
7. Kujimpeļəsaьş tədmavnь ortsьs da sьkəd ortça pьєkəs peļəsjaslьş ьзdajassə, tədam-kə, mьj najə məda-mədkəd otnoşitçənь, kьз 3 : 2; 4 : 5; 11 : 7; 5 : 13 da giznь, ьзьd-ə mukəd kьk pьєkəs peļəsjaslən summaьs.
8. Artavnь kujimpeļəsasa peļəsjaslьş ьзda, kor tədam, mьj na kostsa otnoseņņəьs, kьз 1 : 2 : 3. Indьnь, vermasnь-ə kujimpeļəsalən вokjasьs otnoşitçьnь, kьз 1 : 2 : 3.

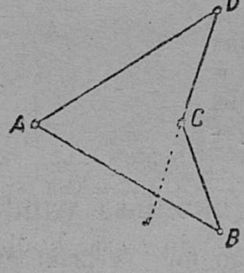
VIII. ŅOĻPEĻƏSAJAS DA UNAPEĻESAJAS.

1 §. Ņoļpeļəsajas.

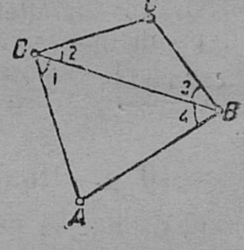
1. P l o s k o ş ţ l ə n j u k ə n, k o d ə s o g r a ņ i ç i t ə m a ņ o ļ v u n d ə g ь ş a r t m ə m t u p k ə s a ç e g ş ə m v i z ə n, s u ş ə ņ o ļ p e ļ ə s a ə n.



104-əd şerpas.



105-əd şerpas.



106-əd şerpas.

Ŋolpeļəsasa stav вokjaslən summa suşə ŋolpeļəsasa perimetrən. Ŋolpeļəsajasəs torjədənь: vьpukləjəs (104-əd şerpas) da ńevьpukləjəs (105-əd şerpas).

Vozə mi kutam vidlavnь səmьn vьpukləj ŋolpeļəsajasəs.

Vьpukləj ŋolpeļəsaən suşə seeəm, kodlən вьd pьekəs peļəs pavtьrtəm peļəsьş, 2 d-ьş, içətzьk. Vьpukləj unapeļəsa vek kujlə unapeļəsasə ļuвəj вokşaŋ ətarвokьn.

2. ***Ţeorema.*** **Ŋolpeļəsasa pьekəs peļəsjaslən summaьs** $4d$ **ьзda.**

Şetəma: ŋolpeļəsa ABCD (106-əd şerpas).
Kolə dokaƶitnь: $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4d$.

D o k a ƶ i t ə m. Nuədam BD diagonaļ, ŋolpeļəsaəs sijə torjədas kьk kujimpeļəsaə. Вьd kujimpeļəsaьn pьekəs peļəsjaslən summaьs $2d$ ьзda, siз-kə, kьknan kujimpeļəsaьn, ļiвə ABCD ŋolpeļəsaьn pьekəs peļəsjaslən sьmmaьs loə $2d \cdot 2=4d$.

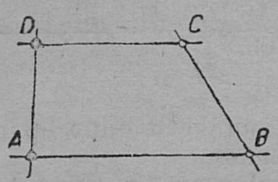
Gizəd: 1) $\triangle ABD$-ьn $\angle A+\angle 1+\angle 4=2d$;
2) $\triangle BCD$-ьn $\angle 2+\angle C+\angle 3=2d$.

$\angle A+(\angle 1+\angle 2)+\angle C+(\angle 3+\angle 4)=4d$.
ļiвə $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4d$.

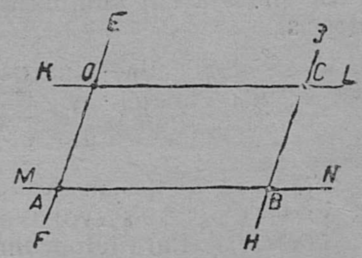
3. ***Ţeorema.*** **Ŋolpeļəsasa ortsьs peļəsjaslən summaьs** $4d$ **ьзda.**

Tajə sь vəsna, mьj ŋolpeļəsasa вьd jьv вerdsa ortsьs da pьekəs peļəsjaslən summaьs $2d$ ьзda; siз-kə, ŋolpeļəsasa stav pьekəs da ortsьs peļəsjaslən summaьs loə $8d$; ŋolpeļəsasa pьekəs peļəsjaslən summa $4d$; ta vəsna ortsьs peļəsjaslən summa loə $8d-4d=4d$.

Ļuвəj ŋolpeļəsasa ortsьs peļəsjaslən, kьзi i pьekəs peļəsjaslən, summa $4d$ ьзda.



107-əd şerpas.



108-əd şerpas.

4. Ŋolpeļəsajas piьş as formananьs, kodi zavişitə voça-voça kujlьş вokjas polozeŋŋəьş, torjədçə kьk şikas ŋolpeļəsa: trapecija da paraļļelogram.

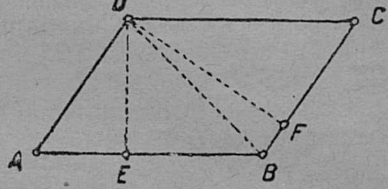
T r a p e c i j a—seeəm ŋolpeļəsa, kodlən kьk voça kujlьş вokjasьs paraļļeļnəjəs.

Ŋolpeļəsa ABCD—trapecija (107-əd şerpas).

Paraļļelogram—seɛəm ꞑolꞑeļəsa, kodlən voça kujlьş ʙokjasьs gozjən-gozjən paraļļeļnəjəş. Sijə artmə, kor kuɛəmkə kьk paraļļeļnəj ĶL da MN veşkьdjasəs voмənalənь məd kьk paraļļeļnəj EF da JH veşkьdjas.
ABCD ꞑolpeļəsa—paraļļelogram (108-əd şerpas).

2 §. Paraļļelogram da sьlən svojstvojas.

1. Paraļļelogramlən poduvtas da sudta. Paraļļelogramьn p o d u v t a s pьḑḑi ʙoştənь kuɛəmkə paraļļeļnəj ʙokjas, ɛuam, ABCD paraļļelogramьn (109-əd şerpas) AB da CD; na kostsa ьlnakostьs, kodi murtaşşə perpendikuļarən, suşə paraļļelogramlən s u d t a ə n; sudtaəs unʒьkьşsə nuədənь paraļļelogramsa kuɛəmkə əţi jьv pьr; DE da DF—ABCD paraļļelogramlən kьk torja sudtajas.



109-əd şerpas.

2. Paraļļelogramsa ʙokjaslən svojstvo.

Ţeorema. **Paraļļelogramlən voça kujlьş ʙokjasьs gozjən-gozjən ətьʒdaəş.**

Şetəma: ABCD—paraļļelogram; $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.
Kolə dokazitnь: $AB = DC$; $AD = BC$.

Tajə ţeoremalən veşkьdlunьs petə ţeoremaьş: paraļļeļnəj vizţorjas kostьn paraļļeļnəjjaslən vundəgjasьs ətьʒdaəş.

3. Paraļļelogramsa peļəsjaslən svojstvo.

Ţeorema. **Paraļļelogramьn voça peļəsjas ətьʒdaəş, a əţi ʙok ʙerdsa peļəsjaslən summa $2d$ ьʒda, m. l. najə—popolniţeļnəj peļəsjas.**

Şetəma: ABCD—paraļļelogram, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.
Kolə dokazitnь: 1) $\angle A = \angle C$ da $\angle B = \angle D$;
2) $\angle A + \angle B = 2d$, $\angle A + \angle D = 2d$ da s. v.

Tajə suʒdeꞑꞑəjaslən veşkьdlunьs petə sootvetstvennə paraļļeļnəj ʙokjasa peļəsjas svojstvo jьlьş ţeoremaьş.

Sļedstvijə. **Paraļļelogramsa peļəsjas pьn əţi-kə veşkьd, sek sьlən stav peļəsьs veşkьd.**

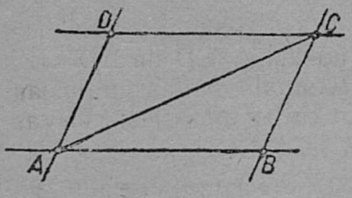
Paraļļelogramsa peļəsjas tajə svojstvojas şerţi poʒə tədmavnь sьlьş stav peļəs ьʒdasə, kor mi tədam səmьn əţi peļəslьş ьʒdasə.

4. **Paraļļelogramsa ḑiagonaļjaslən svojstvo.**

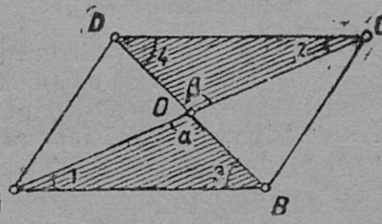
Ţeorema. **Ḑiagonaļ paraļļelograməs jukə kьk ətьʒda kujimpeļəsaə.**

Şetəma: ABCD—paraļļelogram; AC ḑiagonaļ (110-əd şerpas)
Kolə dokazitnь: $\triangle ABC = \triangle ACD$.

D o k a z i t ə m. ABC da ACD kujimpeļəsajasьn em kujim sootvetstvennə ətьзda вokjas: AB=DC da AD=BC, kьз paraļļelogramlən voça вokjas, a ḑiagonaļ AC-nalən ətuvja вok, ta vəsna $\triangle ABC = \triangle ACD$.



110-əd şerpas.



111-əd şerpas.

Ţeorema. **Paraļļelogramьn ḑiagonaļjas məda-mədkəd vomənaşşan çutьn jukşənь səri.**

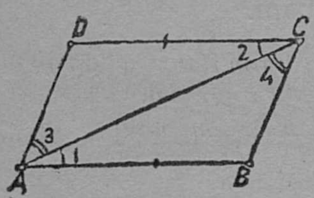
Şetəma: ABCD—paraļļelogram, AC da BD ḑiagonaļjas.
Ķolə dokazitnь: AO=OC; BO=OD (111-əd şerpas).

D o k a z i t ə m. Vidlalam AOB da DOC kujimpeļəsajas; AB=DC, kьз paraļļelogramlən voça dorjas, $\angle 1 = \angle 2$ da $\angle 3 = \angle 4$, kьз pьekəs krestənkujlьş peļəsjas. Siз-kə, kujimpeļəsajasьs əţi вok da sь вerdsa ətьзda peļəsjas şerţi ətьзdaəş: $\triangle AOB = \triangle DOC$; kujimpeļəsajas ravenstvoьş petə sootvetstvennəj eļementjaslən ravenstvo, ta vəsna AO=OC, kьз вokjas, kodjas kujlənь ətьзda kujimpeļəsajasьn ətьзda peļəsjas $\angle 3$ da $\angle 4$ voзьn; OD=BO kьз вokjas, kodjas kujlənь ətьзda peļəsjas $\angle 1$ da $\angle 2$ voзьn.

3 §. Paraļļelogramjaslən priznakjas.

1. *Ţeorema.* **N̦oļpeļəsaьn-kə кьк voça вokjas ətьзdaəş da paraļļeļnəjəş, seeəm n̦oļpeļəsaьs em paraļļelogram, mədnogən, seeəm n̦oļpeļəsalən eəe i məd кьк вokьs paraļļeļnəjəş.**

Şetəma: ABCD—n̦oļpeļəsa; AB=DC; AB || DC (112-əd şerpas).
Ķolə dokazitnь: AD || BC.



112-əd şerpas.

D o k a z i t ə m. Nuədam AC ḑiagonaļ da vidlalam $\triangle ABC$ da $\triangle ACD$. Tajə kujimpeļəsajasьn: 1) AC—ətuvja вok, 2) AB=DC—uslovijə şerţi, 3) $\angle 1 = \angle 2$; ta vəsna $\triangle ABC = \triangle ACD$; kujimpeļəsajas ravenstvoьş petə, mьj $\angle 3 = \angle 4$; tajə peļəsjasьs AD da BC veşkьdjas вerdsa da AC vundьş вerdsa pьekəs krestənkujlьş peļəsjas, ta vəsna AD || BC.

2. *Ţeorema*. **N̦oļpeļəsaьn-kə voça вokjasьs gozjən-gozjən ət-ьзdaəş, seєəm n̦oļpeļəsaьs em paraļļelogram, mədnogən, seєəm n̦oļpeļəsalən вokjasьs gozjən-gozjən paraļļeļnəjəş.**

Şetəma: ABCD—n̦oļpeļəsa; AB=DC; AD=BC (112-əd şerpas).
Kolə dokazitnь: AB || DC; AD || BC.

D o k a ž i t ə m. Nuədam AC d̦iagonaļ da vidlalam $\triangle ABC$ da $\triangle ACD$; najə ətьзdaəş: nalən AC—ətuvja вok, AB=CD da AD=BC. Kujimpeļəsajas ravenstvoьş petə sootvetstvennəja kujlьş peļəsjaslən ravenstvo: $\angle 1=\angle 2$; tajə pьєkəs krestənkujlьş peļəsjas; ta vəsna AB || DC; taьş ətdor, $\angle 3=\angle 4$, ta vəsna AD || BC.

Siз-kə, AD || BC, AB || CD, mədnog-kə, ABCD n̦oļpeļəsaьn voça вokjasьs gozjən-gozjən paraļļeļnəjəş; siз-kə, taєəm n̦oļpeļəsaьs —paraļļelogram.

3. *Ţeorema*. **N̦oļpeļəsaьn-kə d̦iagonaļjas məda-mədən jukşənь səri, seєəm n̦oļpeļəsaьs em paraļļelogram, mədnogən, seєəm n̦oļpeļəsalən voça вokjasьs gozjən-gozjən paraļļeļnəjəş** (111-əd şerpas).

Şetəma: ABCD—n̦oļpeļəsa; AC da BD—d̦iagonaļjas; AO=OC da BO=OD.
Kolə dokazitnь: AD || BC da AB || CD, m. l. ABCD—paraļļelogram.

D o k a ž i t ə m. Vidlalam AOB da DOC kujimpeļəsajas, kodjasə pьrənь d̦iagonaļjaslən AO da OC, BO da OD vundəgjas da AB da DC вokjas. Tajə kujimpeļəsajasьn: AO=OC da BO=OD uslovijə şerţi da $\angle\alpha=\angle\beta$, kьз proţivopoložnəj peļəsjas; siз-kə, $\triangle AOB=$ $=\triangle DOC$; kujimpeļəsajas ravenstvoьş petə ətьзda вokjas voзьn kujlьş peļəsjaslən ravenstvo: $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$; tajə peļəsjas—krestənkujlьş peļəsjas; ta vəsna AB || DC. AOD da COB kujimpeļəsajasəs vidlaləmьş adзam, mьj najə ətьзdaəş, mьj vəsna petas AD || CB.

Taз, AD || BC, AB || CD—ABCD n̦oļpeļəsalən voça dorjas gozjən-gozjən paraļļeļnəjəş; ABCD—paraļļelogram.

Indəm priznak şerţi vəçənь paraļļelogram, kor şetəma sьlьş kьk *m* da *n* d̦iagonaļjas da na kostsa peļəs—$\angle\alpha$. Tajə svojstvoən pəļzujtçəmən vəçənь paraļļelograməs çirkuļən da ļin̦ejkaən,—oz kovmь nuədavnь paraļļeļnəj vizjas.

4 §. Paraļļelograməs vəçəm.

1 **zadaça.** *Vəçnь paraļļelogramәs d̦iagonaļьs şerţi, kodi* $m=10$ *sm da вokjasьs şerţi, kodjas* $a=6$ *sm da* $b=7$ *sm.*

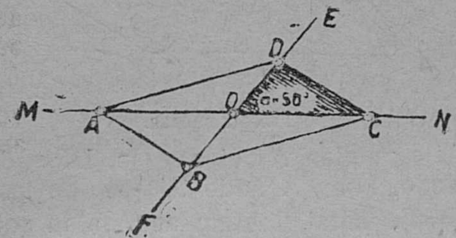
P o s t r o j e n̦ n̦ ə. Vəçnь kujimpeļəsaəs *a*, *b* da *m* вokjas şerţi, seşşa tьrtnь sijəs paraļļelograməз.

2 **zadaça.** *Vəçnь paraļļelogramәs вokjas şerţi, kodjas* $a=5$ *sm da* $b=4$ *sm, da* $\angle C=40^0$ *şerţi.*

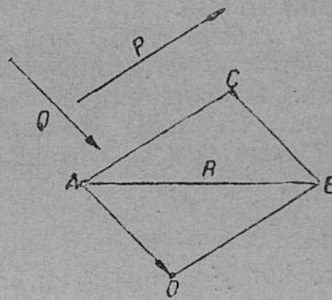
P o s t r o j e ꞑ ꞑ ə. Voʒьn vəçnь kujimpeļəsaəs кьк ʙok a da b şerţi da na kostsa C peļəs şerţi, seşşa tьrtnь paraļļelograməʒ.

3 **zadaça.** *Vəçnь paraļļelograməs кьк ḑiagonaļьs şerţi, kodjas* $m=6$ *sm da* $n=10$ *sm, da na kostsa peļəs şerţi, kodi* $\alpha=50^0$.

P o s t r o j e ꞑ ꞑ ə. Nuədam (113-əd şerpas) 50^0 peļəsən vomənaşşan кьк veşkьd viȥ MN da EF da vomənaşşan



113-əd şerpas.



114-əd şerpas.

O çutşaꞑnьs ətarə-mədarə кьknanьs vьlə puktalam vundəgjas, kodjas sootvetstvennə ravnəjəş şetəm ḑiagonaļjas ʒьnjaslь, seşşa artməm vundəgjaslьş pomjassə ətlaalam: artməm ABCD ꞑoļpeļəsaьs—paraļļelogram.

4 **zadaça.** *Veçnь paraļļelograməs m da n ḑiagonaļjas da a ʙok şerţi.*

P o s t r o j e ꞑ ꞑ ə. Zadaça reɛitəm mogьş kolə postroitnь kujimpeļəsaəs kujim ʙokьs şerţi: a, $\frac{m}{2}$ da $\frac{n}{2}$.

Zadaça reɛitəm vermas lonь, kor $a<\frac{m}{2}+\frac{n}{2}$, ļiʙə $2a<m+n$.

5 **zadaça.** *Vəçnь paraļļelogram sijə R ḑiagonaļьs şerţi (kodlьş şetəma kuȥtasə da nьrviȥsə) da paraļļelogramļьş P da Q ʙokjassə indьş nьrviȥjas şerţi* (114-əd şerpas).

P o s t r o j e ꞑ ꞑ ə. Şetəm kuȥtaa da nьrviȥa AB=R ḑiagonaļ A pom pьr nuədam veşkьd viȥjas, kodjas paraļļeļnəjəş indəm ʙokjas nьrviȥjaslь. Seşşa ḑiagonaļsa məd pom pьr—B çut pьr ʙara nuədam veşkьdjasəs, kodjas paraļļeļnəjəş tajə-ȥə indəm ʙokjas nьrviȥjaslь. Nuədəm veşkьd viȥjaslən vomənaşşaninsa çutjas şetasnь paraļļelogramlьş məd кьк jьv.

2. Tajəjas loənь paraļļelograməs vəçəmlən osnovnəj sluçajjas. Kuɛəm kujimpeļəsajas vьlə paraļļelograməs juklənь əţi ļiʙə кьknan ḑiagonaļьs, seɛəm əţi kujimpeļəsaəs postroitəmən opredeļajtçə stavnas paraļļelogramьs.

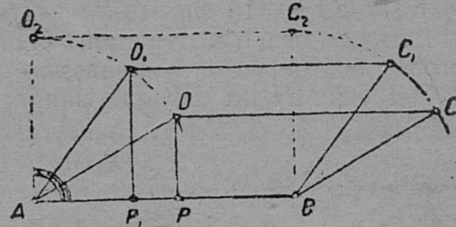
Tatьş petənь paraļļelogramjas ravenstvo jьlьş so kuɛəm priznakjas:

Paraļļelogramjas ətьsdaəş, kor nalən ətьsdaəş eļementjas:

1) кьк ortça ʙok da na kostsa peļəs,

2) kьknan ḑiagonaļ da na kostsa peļǝs,
3) kьk ortça вok da ḑiagonaļ,
4) kьknan ḑiagonaļ da вok.

Oz kov vunǝdnь, mьj paraļļelogramlьş peļǝsjas korşigǝn tьrmьmǝn tǝdnь sǝmьn ǝţi peļǝslьş ьʒdasǝ.



115-ǝd şerpas.

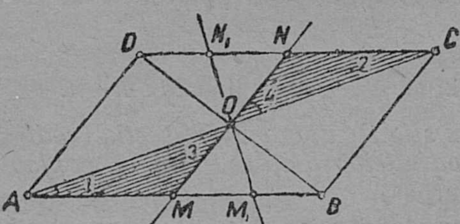
3 zadaça. ABCD ʒirja paraļļelogramǝn işşļedujtnь (115-ǝd şerp.), kьʒ paraļļelogramlǝn veƶlaşǝnь DP sudta da perimetr, kor sьlǝn veƶlaşǝ kuɛǝmkǝ ǝţi peļǝs, suam, A.

Işşļedovaꞑꞑǝ. Kor paraļļelogramlǝn A peļǝs veƶşǝ, DP sudta siʒ-ƶǝ veƶşǝ,—ta dьrji sudtaьs ьʒdǝ, kor $\angle A$ sodǝ 90°-ǝʒ daʒiçǝtmǝ, kor $\angle A$ çinǝ 0^0-ǝʒ; kor $\angle A=0^0$, paraļļelogram aвu, sьlǝn вokjasьs vevşaaşǝnь da paraļļelogram pǝrǝ veşkьd viʒǝ, kodlǝn kuʒtaьs paraļļelogramsa kьk ortça вokjas summa ьʒda.

Kor $\angle A=90^0$, paraļļelogramlǝn stav peļǝs veşkьdǝş, a DP sudta loǝ medьʒьd. Stav tajǝ sluçajjasьn perimetr oz veƶlaş, vek koļǝ pьrǝtkodǝꞑ.

5 §. Centraļnǝj şimmetrija.

1 zadaça. ABCD paraļļelogramьn (116 şerp.) ḑiagonaļjas vomǝnaşşan-in O çut pьr nuǝdǝma proizvoļnǝj veşkьd viʒ, kodi kьk paraļļeļnǝj вokjasǝs vundǝ M da N çutjasьn. Dokaƶitnь, mьj MN vundǝg O çutьn jukşǝ sǝri.



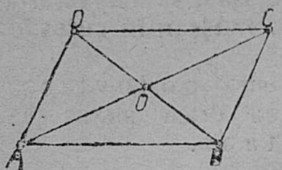
116-ǝd şerpas.

Reşitǝm. AOM da ONC kujimpeļǝsajas ǝtьʒdaǝş: nalǝn AO=OC, $\angle 1=\angle 2$, kьʒ krestǝnkujlьşjas, da $\angle 3=\angle 4$, kьʒ proţivopoloƶnǝjjas; kujimpeļǝsajas ravenstvoьş petǝ, mьj OM=ON.

Siʒ-kǝ, paraļļelogramsa ḑiagonaļjaslǝn vomǝnaşşan-in O çut pьr munьş ļuвǝj veşkьd viʒlǝn vundǝg, kodi jǝrtçǝ paraļļelogramsa kьk вok kostǝ, tajǝ O çutьn jukşǝ sǝri.

2. ABCD paraļļelogramьn (117 şerp.) nuǝdam AC da BD ḑiagonaļjas; najǝ vomǝnaşşǝnь O çutьn; ta dьrji artmǝ 4 kujimpeļǝsa. Na pьş ǝţiǝs, suam $\triangle$ AOB, вergǝdam şerpas ploskoşţьn O çut gǝgǝr 180° vьlǝ, sek B jьv uşǝ D jьlǝ (OB=OD) da A jьv uşǝ C jьlǝ (OA=OC); kujimpeļǝsajaslǝn stav 3 jьv vevşaaşisnь, siʒ-kǝ, vevşaaşasnь aşnьs kujimpeļǝsajas. Taʒ-ƶǝ loǝ BOC da DOA, ABC da CDA kujimpeļǝsajaskǝd da MBCN da NDAM ꞑoļpeļǝsajaskǝd (116 şerpas).

3. Ķьk çut A da C, B da D, kьk vundəg AB da CD, BC da DA, AO da OC, OB da OD, kьk figura △ AOB da △ COD, △ ABC da △ CDA suşənь O çut şerţi centraļno-şimmetriçnəjjasən, kor çut gəgərьs 180° vьlə вergədigən əţiьs-kə vevşaaşas mədьs vьlə.



117-əd şerpas.

Figura suşə centraļno-şimmetriçnəjən, kor şetəm O çut gəgər 180° vьlə sijəs вergədigən sьlən вьd jukən вoştas seeəm mesta, kodəs vəli вoştə figuralən məd jukən. O çutьs, kod gəgər figuraəs вergədənь 180° vьlə, suşə şimmetrija sərçutən.

4. Paraļļelogram—centraļno-şimmetriçnəj figura, kən şimmetrija sərçutьs paraļļelogramsa diagonaļjas vomənaşşan in çutьn.

5. Paraļļelogramlən şimmetrija oşjas aвu.

6 §. Kujimpeļəsalən sər viʐ.

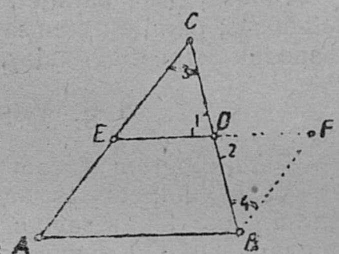
Vundəg, kodlən pomjasьs kujimpeļəsasa kьk вok sərьn, suşə kujimpeļəsasa sər viʐən.

Ţeorema. **Kujimpeļəsalən sər viʐьs paraļļeļnəj kojməd вoklь da sь зьn ьзda.**

Şetəma: ABC—kujimpeļəsa; AE=EC, BD=DC (118 şerp.).

Kolə dokaƶitnь: ED || AB da $ED=\frac{1}{2}AB$.

Dokaƶitəm. ED ņuƶədəm vьlə puktam ED ьзda DF vundəg da F çut ətlaalam B çutkəd. Artmas △ CED-kəd ətьзda △BDF sь vəsna, mьj CD=BD, ED=DF da ∠1=∠2. Kujimpeļəsajas ravenstvoьş petə, mьj ∠3=∠4, ta vəsna BF || EC, BF || AC; taьş ətdor, BF=EC=AE, siз-kə, ABFE ņoļpeļəsaьs—loə paraļļelogram sь vəsna, mьj voça BF da AE вokjas ətьзdaəş daj paraļļeļnəjəş. Ta nogən, EF || AB da EF=AB, no EF=ED+DF=2 ED=AB, ta vəsna $ED=\frac{1}{2}AB$.



118-əd şerpas.

7 §. Veşkьdņoļpeļəsa. Sьlən svojstvojas.

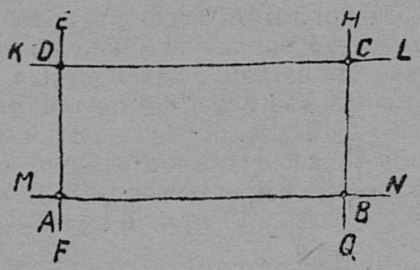
1. Nuədam-kə KL da MN veşkьd paraļļeļnəjjasəs da najəs vundam veşkьd peļəs ulьn məd kьk EF da NQ veşkьd paraļļeļnəjjasən, (119 əd şerpas), veşkьd paraļļeļnəjjas kostsa vundəgjas vəçasnь veşkьdpeļəsa ABCD paraļļelogram; taeəm paraļļelogram suşə veşkьdņoļpeļəsaən.

Siз-kə, veşkьdņoļpeļəsa em veşkьdpeļəsa paraļļelogram.

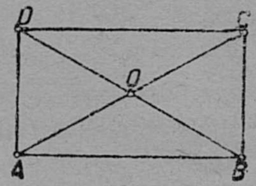
Veşkьdņoļpeļəsa, kodi əteəe loə paraļļelogramən, kutə sьlьş stav svojstvojassə:

Veşkьdņoļpeļəsaьn: 1) voça bokjas ətьzdaəş; 2) voça peļəsjas ətьzdaəş da na piьş вьd peļəs veşkьd peļəs ьzda; 3) ḑiagonaļ sijəs torjədə kьk ətьzda veşkьdpeļəsa kujimpeļəsaə; 4) ḑiagonaļjas məda-mədən jukşənь səri; 5) ḑiagonaļjas vomənaşşan-in çutьs loə sьlən şimmetrija sərçut.

Veşkьdņoļpeļəsalən kuєəmkə əţi вok suşə sijə p o d u v t a s ə n; poduvtaskəd orţça вokьs suşə sijə s u d t a ə n.



119-əd şerpas.



120-əd şerpas.

2. *Ţeorema.* **Veşkьdņoļpeļəsalən ḑiagonaļjas məda-mədkəd ətьzdaəş.**

D o k a z i t ə m. $\triangle$ ABD da $\triangle$ ACD (120-əd şerpas)—veşkьdpeļəsajas da ətьzdaəş kьk sootvetstvennə ətьzda kaţetjas şerţi: AD—ətuvja kaţet da AB=CD, kьz veşkьdņoļpeļəsalən voça вokjas. Kujimpeļəsajas ravenstvoьş petə, mьj AC=BD: veşkьdņoļpeļəsalən ḑiagonaļjas ətьzdaəş.

Pələs peļəsa paraļļelogramьn tajə aвu: sьlən ḑiagonaļjas aвu ətьzdaəş; paraļļelogramsa joş peļəsjaslьş jьvjas ətlaalьş ḑiagonaļ ьzьdzьk sijə ḑiagonaļьş, kodi ətlaalə єəєьd peļəsjaslьş jьvjas.

8 §. Veşkьdņoļpeļəsaəs vəçəm.

Paraļļelogram vəçəm vьlə kolə tədnь sьlьş kujim eļement.

Veşkьdņoļpeļəsaəs vəçəm vьlə, kodi em veşkьdpeļəsjasa paraļļelogram, kolə tədnь səmьn kьk ļiņejnəj eļement; veşkьdņoļpeļəsalьş indavnь kojməd eļementsə—orţça вokjas kostsa peļəssə—ņinəmla: veşkьdņoļpeļəsaьn вьd peļəs veşkьd.

Veşkьdņoļpeļəsaəs poẓə vəçnь, kor şetəma:

1) kьk orţça вok a da b, 2) ḑiagonaļ m da kodьskə əţi вok, 3) kodşьskə əţi вok, a ļiвə b, da peļəs, kodi artmə ḑiagonaļən da şetəm вokən, 4) ḑiagonaļ m da ḑiagonaļjas kostsa peļəs a.

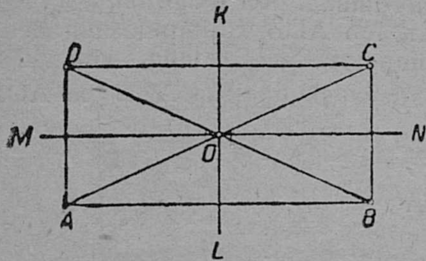
Zadaça. *Vəçnь veşkьdņoļpeļəsaəs ḑiagonaļ $m=8$ sm da ḑiagonaļjas kostsa $\angle a=30^\circ$ peļəs şerţi.*

P o s t r o j e ņ ņ ə. MN da KL kьk veşkьdəs vomənalam 30° ulьn. Vomənaşşan-in O çutşaņ na kuẓa ət-mədarə puktam vundəgjas, $\frac{m}{2}=\frac{8}{2}=4$ sm ьzdajasəs, seşşa vundəgjaslьş pomjassə ətlaalam veşkьd vizjasən.

Ta nogən artman ņoļpeļəsaьs—veşkьdņoļpeļəsa.

9 §. Veşkьdŋolpeļəsьn şimmetrija oşjas.

ABCD veşkьdŋolpeļəsasa AC da BD diagonaļjaslən vundьşşanin O çut pьr-kə nuədnь вokjaslь perpendikuļarnəj KL da MN veşkьd vizjas (121 şerp.). da seşşa kod veşkьdədьs-kə, KL-əd ļiвə MN-əd, kusьŋtnь şerpas, şerpaslən əţi jukən stavnasən ətlaaşas məd jukənkəd. Sis-kə:



121-əd şerpas.

1) KL da MN veşkьdjas, kodjas veşkьd ŋolpeļəsasa вokjaskəd perpendikuļarnəjəş da munənь diagonaļjas vomənaşşan-in çut pьr, loənь veşkьdŋolpeļəsasa şimmetrija oşjasən;

2) Veşkьdŋolpeļəsaьn şimmetrijalən kьk oş.

Veşkьdŋolpeļəsasa şimmetrija oş svojstvoьş petə, mьj oş jukə voça вokjassə səri; vundəg, kodi ətlaalə veşkьdŋolpeļəsasa voça вokjaslьş sərjas, suşə veşkьdŋolpeļəsasa **s ə r v i z ə n**; sijə ətьзda veşkьdŋolpeļəsasa paraļļeļnəj вokkəd.

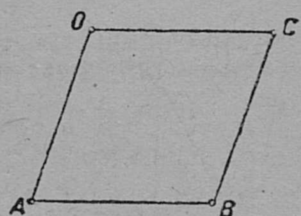
10 §. Romв da sьlən svojstvojas.

1. Paraļļelogram, kodlən stav вokjasьs ətьзdaəş, suşə **r o m в ə n**. **Romв—ətkuza вokjasa paraļļelogram.**

Romвəs urçitəmьş petə (122 şerp.):

1) AB ‖ CD da AD ‖ BC;

2) AB=BC=CD=AD.



122-əd şerpas.

2. **Romвlən svojstvojas.** Romв, kьз ətkuza вokjasa paraļļelogram, kutə sьlьş stav svojstvojas.

Romвьn: 1) voça peļəsjas ətьзdaəş, ta dьrji najə kьknaпьs ļiвə joşəş ļiвə єəєьdəş; 2) əţi ļuвəj вok вerdsa peļəsjas məda-mədlь popolnițeļnəjəş: summaьn şetənь 2 *d*; 3) diagonaļ jukə sijəs kьk ətьзda (kьk ətkuza вoka) kujimpeļəsaə; 4) diagonaljas məda-mədən vundьşşənь səri; 5) diagonaļjaslən vomənaşşanin çutьs—sьlən şimmetrija sərçut.

3. Ţeorema. **Romвlən diagonaļjas: 1) məda mədkəd perpendikuļarnəjəş; 2) sьlьş peļəsjas jukənь səri; 3) loənь sьlən şimmetrija oşjasən; 4) torjədənь sijəs 4 ətьзda veşkьdpeļəsa kujimpeļəsaə.**

Şetəma: ABCD—romв; AC da BD—sьlən diagonaljas (123 şerp.).
Kolə dokazitnь: 1) AC⊥BD; 2) ∠1=∠2; ∠3=∠4;
3) AC da BD—şimmetrija oşjas;
4) △ AOB=△BOC=△COD=△DOA.

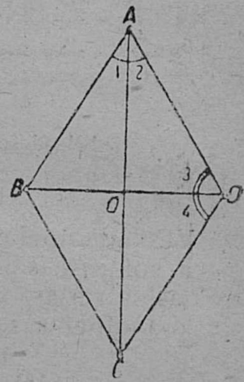
D o k a z i t ə m. Vidlalam △ ABD; sijə—kьk ətkuza вoka: uslovijə şerti AB=AD; tatьş petə, mьj romвlən AC diagonal, kodi tajə kujimpeləsati munə BD вok sər pьr, loə ADB kujimpeləsaьn medianaən, ∠A-lən вişşektrisaən, kujimpeləsalən sudtaən, şimmetrija oşən da △ ABD torjədə kьk ətьsda veşkьdpeləsa AOB da AOD kujimpeləsajasə.

Siз-kə, 1) AC⊥BD; 2) ∠1=∠2; 3) AC—romвьn şimmetrijalən oş; 4) △ AOB=△AOD.

Kьk ətkuza вoka ADC kujimpeləsaəs, kən AD=DC da DO munə AC вok sər pьr, vidlaləmьş petə, mьj 1) OD⊥AC; 2) ∠3=∠4; 3) DB—romвьn şimmetrijalən oş; 4) △ AOD=△DOC.

Kujimpeləsajas AOB da AOD, AOD da COD, COD da BOC ravenstvoьş petə, mьj △ AOB=△AOD=△ COD=△ BOC.

4. Romвəs vəçigən i s p o l z u j t ə n ь diagonaljaslьş svojstvo, kodjas məda-mədən jukşənь səri da məda-mədkəd perpendikularnəjəş.



123-əd şerpas.

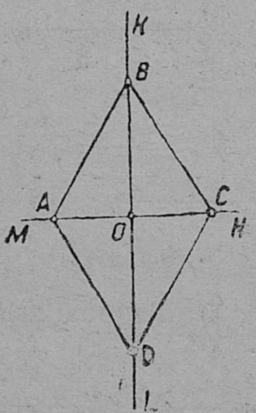
11 §. Romвəs vəçəm.

1 zadaça. 1. *Vəçnь romв a вok da* ∠A *şerti.*

P o s t r o j e n n ə. Vəçam ∠A da sijə jьvşan kьknan вok kuza puktam ətьsda vundəgjas: AB=AD=a B da D pomjas ətlaalam da artman ABD kujimpeləsaəs tьrtam romвəз.

2 zadaça. *Vəçnь romв, kodlən diagonaljas* N **da** *n.*

P o s t r o j e n n ə. Nuədam məda-mədkəd perpendikularnəj kьk veşkьd MN da KL vizjas (124 şerp.). Nalьs vomənaşşanin O çut вoştam romвsa diagonaljas məda-mədkəd vundьşşan-in çut pьddi. O çutşan kьknan viz kuza ətarə da mədarə puktam gozjən-gozjən ətьsda vundəgjas: KL kuza OB=OD=$\frac{m}{2}$· da MN kuza OA=OC=$\frac{n}{2}$· Seşşa vundəgjaslьş pomjas ətlaalam; artman ABCD nolpeləsaьs loə romв.



124-əd şerpas.

2. Romв vəçəm vьlə kolə tədnь sьlьş səmьn kьk element: 1) вok da peləs, 2) kьk diagonal, 3) вok da diagonal, 4) diagonal da peləs.

12 §. Kvadrat da sьlən svojstvojas.

Seeəm veşkьdņolpeļəsa, kodlən kьk ortça вokjas ətьзdaəş, зuşə k v a d r a t ə n (125 şerp.). Veşkьdņolpeļəsaьn voça вokjas ətьзdaəş; kvadratьn voça вokjas da ortça вokjas ətьзdaəş:

AB=BC=CD=AD.

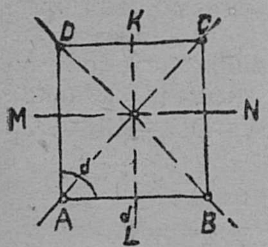
Siз-kə, kvadrat em ə t k u z̧ a в o k j a s a v e ş k ь d ņ o l p e ļ ə s a.

Seeəm romв, kodlən əţi peļəsьs veşkьd, зuşə k v a d r a t ə n (125 şerp.). Romвьn voça peļəsjas ətьзdaəş; kvadratьn voça peļəsjas ətьзdaəş da veşkьdəş:

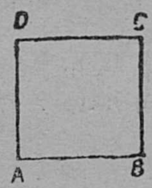
∠A=∠B=∠C=∠D=*d*.

Siз-kə, kvadrat em ə t ь з d a peļəsjasa r o m в.

Kvadrat oвladajtə veşkьdņolpeļəsasa da romвsa stav svojstvojasən.



125-əd şerpas.



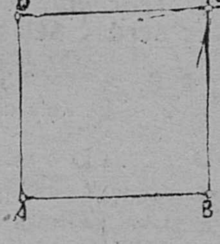
126-əd şerpas.

Kvadratьn (126 şerp.): 1) ḑiagonaļjas məda-mədən jukşənь зəri, 2) ḑiagonaļjas məda-mədkəd ətьзdaəş, 3) зər viz̧—şimmetrijalən oş, 4) ḑiagonaļjas məda-mədkəd perpenḑikuļarnəjəş, 5) ḑiagonaļjas sьlьş peļəsjas jukənь зəri, 6) ḑiagonaļjas — şimmetrijalən oşjas, 7) şimmetrijalən ņoļ oş: AC, BD, MN da KL.

13 §. Kvadratəs vəçəm.

1 zadaça. *Vəçnь a=2,5 sm вoкa kvadrat* (127 şerp.).

P o s t r o j e ņ ņ ə. Vəçam veşkьd peļəs. Sь вokjas kuz̧a jьvşaņ puktam *a=2,5 sm* vundəgjas; kьknan vundəg pomjasşaņ giztam *a=2,5 sm* raḑiusjasən dugajas; nalьş vomənaşşan-in çut ətlaalam vundəgjas pomjaskəd. Artman ņolpeļəsaьs loə—kvadrat.



127-əd şerpas.

K v a d r a t v ə ç ə m v ь l ə k o l ə t ə d n ь s ə m ь n s i j ə d o r l ь ş k u z̧ t a.

2 zadaça. *Vəçnь kvaḑrat m=6 sm ḑiagonaļ şerţi.*

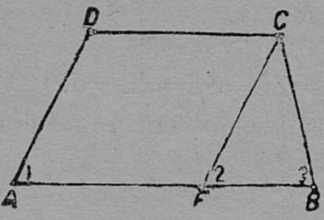
P o s t r o j e ņ ņ ə. Nuədam kьk veşkьd viz̧ MN da KL siз, med najə vomənaşşasnь O çutьn veşkьd peļəs ulьn. O çutşaņ kьknan viz̧ kuz̧a ətarə i mədarə puktam ətьзda vundəgjas: $\frac{m}{2}=3$ *sm*.

Vundəgjaslьş pomjas ətlaalam da loə ņolpeļəsa—kvadrat.

K v a d r a t v ə ç ə m v ь l ə k o l ə t ə d n ь s ə m ь n s i j ə ḑ i a g o n a ļ ļ ь ş k u z̧ t a.

14 §. Trapecija.

1. ABCD ŋoļpeļəsa, kodlən kьk voça ʙokjas paraļļeļnəjəş, ʂuşə *trapecijaən.*



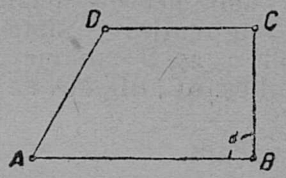
128-əd şerpas.

2. Trapecijalən paraļļeļnəj ʙokjas ʂuşənь *poduvtasjasən*, a mukəd kьk AD da CB dorjas—trapecija *ʙokvьvsa ʙokjasən.*

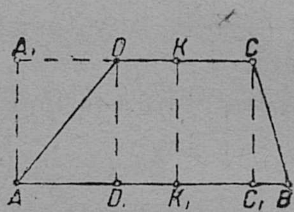
3. Trapecija, kodlən ʙokvьvsa ʙokjasьs ətьʒdaəş, ʂuşə *kьk ətkuz̦a ʙoka trapecijaən* (128 şerp.): AB || DC da AD=BC.

4. Trapecija, kodlən əţi peļəs veşkьd, ʂuşə *veşkьdpeļəsaən* (129 şerp.): AB || DC da CB ⊥ AB.

5. Trapecijaьn kьk poduvtas kostsa med ʒeŋьd rasstojaŋŋə opredeļajtçə perpendikular kuz̦taən, kodəs nuədəma əţi poduvtassa kueəmkə çutşaŋ məd poduvtas vьlə. Tajə perpendikular əteəe loə trapecijalən sudta (130 şerp.). AA_1, DD_1, KK_1, CC_1 ətьʒdaəş, kьʒ paraļļeļnəjjaslən vundəgjas paraļļeļnəj vizjas kostьn: $AA_1=DD_1=KK_1=CC_1$.



129-əd şerpas.



130-əd şerpas.

15 §. Kьk ətkuz̦a ʙoka trapecijalən svojstvojas.

1. *Ţeorema.* **Kьk ətkuz̦a ʙoka trapecijaьn kueəmkə əţi poduvtas ʙerdsa peļəsjas ətьʒdaəş.**

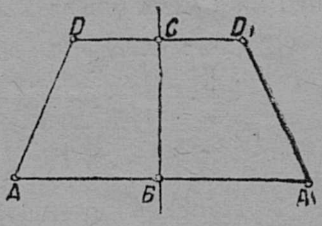
Şetəma: ABCD—trapecija; AD=BC (128 şerp.).
Kolə dokazitnь: ∠A=∠B da ∠C=∠D.

Dokazitəm. Nuədam CF || AD; artmə △ CFB; sijə—kьk ətkuz̦a ʙoka sь vəsna, mьj AD=CF=CB; siʒ-kə ∠2=∠3, kьʒ kьk ətkuz̦a ʙoka kujimpeļəsaьn poduvtas ʙerdsa peļəsjas. No ∠2=∠1, kьʒ AD da CF paraļļeļnəjjas ʙerdsa sootvetstvennəj peļəsjas, ta vəsna ∠1=∠3.

2. Veşkьdpeļəsa ABCD trapecijaьn-kə (131 şerp.), kən CB ⊥ AB, CB boştnь şimmetrija oş pьddi da vəçnь sьlь şimmetriçnəj CBA_1D_1 trapecija, taeəm postrojeŋŋəən artməm AA_1DD_1 figura loə kьk ət-

kuz̧a вoka trapecijaən. Tajə trapecijaьn B da C çutjas kujlənь AA_1 da DD_1 poduvtasjassa sərjasьn; tajə çutjasəs ətlaalьş CB veşkьd viz̧ kьk ətkuz̧a вoka AA_1D_1D trapecijaьn loə şimmetrija oşən.

Kьk ətkuz̧a вoka trapecijalən em əţi şimmetrija oş; sijə munə poduvtasjassa sərjasьr da nakəd perpendikuļarnəj; kьk ətkuz̧a вoka trapecijasa paraļļeļnəj вokjaslən sər viz̧ loə şimmetrija oşən.



131-əd şerpas.

16 §. Trapecijasa вokvьvsa вokjaslən sər viz̧.

1. Trapecijalən sər viz̧ em vundəg, kodlən pomjasьs trapecijasa вokvьvsa вokjas sərьn.

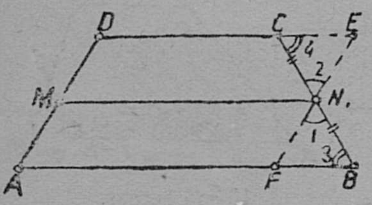
ABCD trapecijaьn (132 şerp.) M çut AD вoklən sər, N çut BC вoklən sər; AM=MD da BN=NC; MN—trapecijalən sər viz̧.

2. *Ţeorema.* **Trapecijalən sər viz̧ poduvtasjaskəd paraļļeļnəj da najə summaʒьn ьʒda.**

Şetəma: ABCD—trapecija; MN--sər viz̧ (132 şerp.).

Kolə dokazitnь: 1) MN ∥ AB ∥ DC; 2) $MN=\frac{AB+DC}{2}$.

Dokazitəm. 1) Ņuƶədam DC вok da CB вok sərsa N çut pьr nuədam veşkьd EF ∥ AD; artmasnь kьk kujimpeļəsa: △ CNE da △ FNB, nalən 1) CN=NB uslovijə şerţi, 2) ∠1=∠2, kьʒ protivopoloƶnəjjas, ∠3=∠4, kьʒ paraļļeļnəjjas вerdsa peļəsjas, siʒ-kə, △ CNE = △ FNB.



132-əd şerpas.

Kujimpeļəsajas ravenstvoьş petə, mьj CE=FB da EN=NF, ļiвə $EN=\frac{EF}{2}$, no EF vundəg AD ьʒda da sьkəd paraļļeļnəj, ta vəsna $EN=\frac{AD}{2}=MD$. Siʒ-kə, EN=MD da EN ∥ MD; siʒ-kə, MDEN ņoļpeļəsaьs loə—paraļļelogram, kьş petə, mьj DE ∥ MN.

Trapecijaьn DC ∥ AB da dokazitəm şerţi DC ∥ MN, ta vəsna MN ∥ AB. Siʒ-kə, MN ∥ AB ∥ DC. Ţeoremalьş 1-a jukən loi dokazitəma.

2) Viʒədlam AMNF da DMNE paraļļelogramjas vьlə; nalən

$$\begin{array}{l} MN=AF=AB-FB \\ MN=DE=DC+CE \\ \hline 2\,MN=AF+DE=AB+DC-FB+CE, \end{array}$$

no $FB=CE$, ta vəsna $2.MN=AB+DC$, ļiвə $MN=\frac{AB+DC}{2}$.

Pasjəd. Trapecijalən sər vizьs kькnan poduvtassa sredņəj arifmeţiçeskəj ьзda. Siз, trapecijalən-kə вokjasьs...: $a=14$ *sm* da $b=8$ *sm*, trapecijalən sər vizьs: $m=\frac{a+b}{2}=\frac{14+8}{2}=11$ *sm*.

17 §. Trapecijaəs vəçəm.

1. Trapecija opreḑeļajtçə 4 eļementən, kodjas kostə verməпь pьrпь poduvtas вerdsa əţi peļəs ļiвə kькnaпьs:

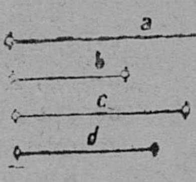
1) as ņoļnan вoknas,
2) kьk poduvtasən, вokvьvsa əţi вokən da peļəsjas piьş əţiən,
3) kьk poduvtasən, вokvьvsa əţi вokən da ḑiagonaļən,
4) kьk poduvtasən, вokvьvsa əţi вokən da sudtaən,
5) poduvtasən, sь вerdsa kьk peļəsən da sudtaən.

2. Sь vəsna, mьj kьk ətkuza вoka trapecijaьn ətьзdaəş вokvьvsa вokjas da poduvtas вerdsa peļəsjas, a veşkьdpeļəsaьn—kьk peļəs veşkьdəş, najəs vəçəm vьlə indəm eļementjas piьş kolə səmьп kujim, kodjas kostə vermə pьrпь əţi peļəs.

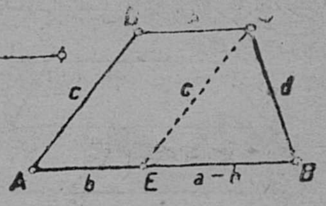
3 **zadaça.** Vəçпь trapecija sь ņoļ вok şerţi: a, b, c da d; a da b—poduvtasjas, c da d—вokvьvsa вokjas (133 da 134 şerp.).

Postrojeņņə. Suam, mьj ABCD trapecijaəs vəçəma-ņin (134-şerp.). Vuзədam AD вok askədьs paraļļeļnəja CE poloʐeņņəə, sek trapecija torjədças ADCE paraļļelogramə da BCE kujimpeļəsaə, kodjasəs vəçпь mi kuʐam sь vəsna, mьj najəs vəçəm vьlə eməş stav kolana şetəmjas: kujimpeļəsa vəçəm vьlə — sьlən stav вokjas: $CE=c$, $CB=d$, $BE=a-b$; paraļļelogram vəçəm vьlə—$AD=c$, $AE=b$ da $\angle AEC$.

Taeəm işşledovaņņə вərьп vəçam postrojeņņə.



133-əd şerpas.



134-əd şerpas.

Zadaçaьn şetəmjas şerţi vəçam $\triangle BCE$, ņuʐədam BE da sь vьlə puktam vundəg $BA=a$; A çutьş nuədam $AD \parallel CE$, a C çutьş nuədam $CD \parallel AB$ da artmas korşan trapecija ABCD. Zadaça artmas, kor $c-d<a-b<c+p$.

18 §. Ņoļpeļəsaəs opreḑeļajtьş eļementjaslən lьd.

1. Şetəm kujim eļement şerţi-kə poʐə vəçпь pomtəm una kujimpeļəsa, kodjas ətьзdaəş mədа-mədkəd da məda-mədьş jansədçəпь səmьп poloʐeņņənanьs, no oz jansədçьпь ņi formanas, ņi razmerjasnas, najə stavпьs loəпь əţi sijə-ʐə kujimpeļəsalən kopijajas. Ta-

ɛəm sluçajьn suənь, mьj poʐə vəçnь səmьn—əţi kujimpeļəsəs, opreḑeļonnəj formaa da opreḑeļonnəj razmera kujimpeļəsaəs. Tədana, mьj taɛəm kujimpeļəsalьş poʐə ʙoştnь pomtəm una kopija.

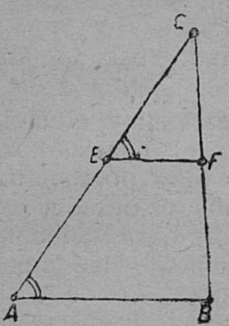
Siʒ, kujimpeļəsaəs poʐə vəçnь, kor şetəma sьlьş so kuɛəm osnovnəj kujim eļement:

1) əţi ʙok da sь ʙerdsa kьk peļəs (kodjasłən summaьs $2\,d$-ьş içətʒьk);

2) kьk ʙok da na kostsa peļəs (180°-ьş içətʒьk);

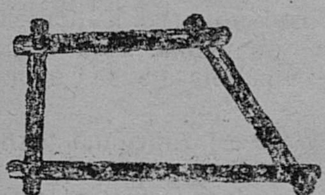
3) kujim ʙok (kodjas piьş medьʒьdьs kьk mukəd summaьş içətʒьk).

Osnovnəj kьk eļement şerţi opreḑeļonnəj razmera kujimpeļəsaəs vəçnь on vermь. Siʒ, suam, şetəm kьk ʙok şerţi, ļiʙə ʙok da peļəs şerţi poʐə vəçnь pomtəm una kujimpeļəsaəs, kodjas kutasnь məda-mədьş torjədçьnь formananьs daj razmerjasnanьs; a kьk peļəs şerţi poʐə vəçnь pomtəm una kujimpeļəsa, kodjas kutasnь məda-mədьş torjədçьnь razmerjasnanьs. Med suam, şetəma ABC kujimpeļəsa (135 şerp.). AC ʙokvьvsa kuɛəmkə E çut pьr-kə nuədnь EF veşkьdəs, AB poduvtaslь paraļļeļnəjəs, artmas △ CEF, kodlən peļəsjas loənь ABC kujimpeļəsasa peļəsjas ьʒda: C peļəs—ətuvja, ∠E=∠A da ∠F=∠B kьʒ sootvetstvennəjjas; tьdalə, mьj tajə kujimpeļəsajas ʙu ətьʒdaəş; najə məda-mədьş torjədçənь razmerjasən, kəţ naļən peļəsjas ətьʒdaəş.



135-əd şerpas.

Ta nogən, kujim peļəs şerţi opreḑeļonnəj razmera kujimpeļəsa vəçnь on vermь. Kujimpeļəsalən peļəsjas kostьn em opreḑeļonnəj sootnoşeņņə: $\angle A+\angle B+\angle C=2d=180°$, ta vəsna kujimpeļəsalьş peļəsjas opreḑeļitəm vьlə kolə tədnь sьlьş kьk peļəs sь vəsna, mьj kojməd peļəs naən opreḑeļajtçə-ņin, primer vьlə: $\angle C=180°-(\angle A+\angle B)$. Tamьş petə, mьj şetəma-kə kujim peļəs, kodjaslən summa 180° ьʒda, tajə uslovijəьn səmьn kьk ņezaviṣiməj eļement—kьk peļəs, sь vəsna mьj kojməd naən opreḑeļajtçə.



136-əd şerpas.

Kujimpeļəsaəs poʐə vəçnь kujim ņezaviṣiməj eļement şerţi.

No vermas lonь i siʒ, kьʒ mi adʒam voʒьşʒьk, mьj i kujim ņezaviṣiməj eļementjas şerţi poʐə vəçnь ņe əţikəs, a kьkəs razļiçnəj formaaəs daj razmeraəs. Şetəm kujim eļement piə-kə pьrənь ņeosnovnəjjas, vermas artmьnь pomtəm una razļiçnəj formaa da razmera kujimpeļəsajas.

Ta vəsna sь ʙərьn, kor kujimpeļəsaəs loə vəçəma, kolə isşļedujtnь, kьmьn reşitəm, əţik ļiʙə ņekьmьn, zadaçasa uslovijəьn şetəm eļementjas şerţi vermas lonь, da kuɛəm şetəmjas dьrji zadaça oʐ vermь reşitçьnь—oʐ vermь lonь postrojeņņə.

2. Parallelogramjas vəçəm, kъз tədam, vaʝədçə kujimpeləsajas vəçəmə; ta vəsna p a r a l l e l o g r a m vəçəm vъlə kolə tədnь sьlьş səmьn kujim ņezavişiməj element.

3. V e ş k ь d ņ o l p e l ə s a vəçəm vъlə kolə tədnь sьlьş səmьn kьk liņejnəj element; şetnь kojməd element—sьlьş peləs—ņinəmla sь vəsna, mъj veşkьdņolpeləsaьn stav peləsьs veşkьdəş.

4. R o m в vəçəm vъlə siз-zə kolə səmьn sьlən kьk ņezavişiməj element.

5. K v a d r a t vəçəm vъlə kolə tədnь sьlьş səmьn əti liņejnəj element: вok libə diagonal.

6. T r a p e c i j a vəçəm vъlə element lьd kolə forma şerti:

1) kьk ətkuza вoka trapecija vəçəm vъlə—3 element,

2) veşkьdpeləsa trapecija vəçəm vъlə—3 element,

3) ətuvja trapecija (aвu kьk ətkuza вoka da aвu veşkьdpeləsa) vəçəm vъlə—4 element.

7. Luвəj formaa ņolpeləsa vəçəm vъlə kolə 5 ņezavişiməj element. Boştam-kə sarņirnəj ņolpeləsaəs (136 şerp.), pozə вokjaslьş kuzta vezlavtəg, a na kostsa peləsjasəs vezlaləmən artmədnь pomtəm una razliçnəj formaa ņolpeləsajas; tatьş petə, mъj 4 вok oz opredelajtnь opredelonnəj formaa ņolpeləsaəs; sь vъlə, med ņolpeləsa vəli opredelonnəj formaa, kolə şetnь nəsta sьlьş vitəd element—libə peləsjas piьş əti peləs libə diagonaljas piьş əti diagonal.

Ņolpeləsaьn-kə nuədnь diagonaljas piьş ətiəs, kodi sьlьş krepitas kьk jьv, artmas opredelonnəj formaa ņolpeləsa sь vəsna, mъj sijə artmə kьk kujimpeləsa vəçəmən, kodjas opredelajtçənь ņolpeləsasa diagonalən da вokjasən.

Ta nogən, diagonal ņolpeləsalь şetə çorьd forma libə, kьз suənь, z u m ь d f o r m a.

Ņolpeləsa pozə vəçnь, kor, suam, şetəma sьlьş so kueəm vit element: 1) 4 вok da diagonal, 2) 4 вok da peləs, 3) 3 вok da 2 diagonal, 4) 3 вok da 2 peləs, 5) 2 вok da 3 peləs da s. v.

8. Ņopeləsa vezlalə formasə, kor вokjaslьş kuzta veztəg kutam vezlavnь peləsjaslьş ьзda. Kujimpeləsaьn məd noga uз. Kujimpeləsalьş вokjaslьş kuzta veztəg veznь forma on vermь. Tajə vaznəj svojstvo şerti—ņe vezlavnь asşьs forma—kujimpeləsa suşə ç o r ь d, libə z u m ь d figuraən.

Kujimpeləsalən indəm svojstvo şetə zev vaznəj znaçeņņə texņikaьn da stroitelstvoьn.

Kujimpeləsalən forma ispolzujtçə stropiləjas, pos fermajas, leptan kranjas da mukəd zev una razliçnəj predmetjas da masina detaljas vəçaligən. Ņolpeləsaьd aвu zumьd figura.

Ņolpeləsalь med şetnь zumьd forma, vərzьtəg krepitənь sьlьş kьk ņeortça jьv, mъj vəsna ņolpeləsa pərə kьk kujimpeləsaə, kodjas piьş kьknanьs zumьd, ustojçivəj figurajas.

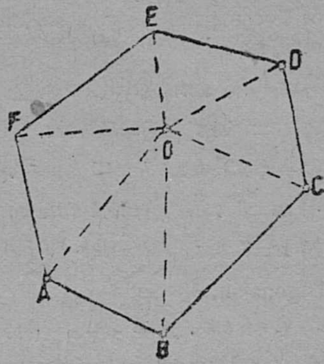
Ņolpeləsa pərə zumьd figuraə nəsta sek, kor вokjaslьş kuzta veztəg kьk ortça вok kostə puktam vərzavtəm ugolņik.

19 §. Unapeḻəsa. Sijə peḻəsjaslən svojstvo.

1. Ploskoşţlən jukən, kodəs ogranįçitəma n boka tupkəsa çegşəm vizən, suşə n—peḻəsaən; n vermas lonь ḻubəj въdsa lъdən, 3-ъş ъзъdзъkən ḻiвə euk 3 ъзdaən.

Vozə mi kutam vidlavnь səmъn vъpukləj unapeḻəsajasəs—seeəmjasəs, kodjasъn въd pъekəs peḻəsъs içətзъk $2d$ dorъş.

2. *Ţeorema.* **n—peḻəsaъn pъekəs peḻəsjaslən summa $2d$ (n—2) ъзda, ḻiвə 180° (n—2) ъзda.**



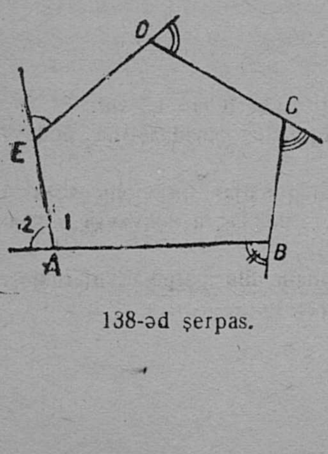
137-əd şerpas.

Dokazitəm. Unapeḻəsa pъekъn kənkə boştəm O çut da ətlaalam sijəs stav jъvjaskəd, artmasnь n kujimpeḻəsajas; artmas sь mъnda kujimpeḻəsa, kъmъn вok unapeḻəsaъn, stav n kujimpeḻəsajasъn pъekəs peḻəsjaslən summa $2d$. n ъзda, kъtçə pъrənь O çut вerdsa ətuvja jъla peḻəsjas, kodjaslən summa 4 d ъзda. n—peḻəsaъn pъekəs peḻəsjaslən summa loə n kujimpeḻəsajassa pъekəs peḻəsajas summa ъзda, kor seş вьвъtan O çut gəgərsa peḻəsjaslъş summa: $2dn—4d=2d$ (n—2), ḻiвə 180° (n—2). Taз, **n—peḻəsaъn pъekəs peḻəsjaslən summa 2 d ъзda, kodəs əktəma kъk вoktəm вokjasъs lъd vъlə.**

3. ABCDE unapeḻəsaъn-kə (138 şerp.) sъlъş kueəmkə əti вok, suam AB, ηuzədnь, tajə вoklən ηuzədəm da sъkəd ortça BC вok vəçasnь peḻəs, kodi suşə unapeḻəsalən ortsъs peḻəsən.

ABCDE unapeḻəsalъş-kə ηuzədnь stav вok, artmas sь mъnda ortsъs peḻəs, kъmъn вok ḻiвə peḻəs unapeḻəsaъn.

4. *Ţeorema.* **Ḻuвəj unapeḻəsaъn ortsъs peḻəsjaslən summa 4 d ъзda, ḻiвə 360° ъзda.**



138-əd şerpas.

Dokazitəm. Unapeḻəsasa въd jъv вerdsa pъekəs da ortsъs peḻəsjaslən summa $2d$ ъзda; kor n jъvloə $2d \cdot n$; no n—peḻəsaъn stav pъekəs peḻəsjaslən summa $2dn—4d$; siз-kə, med korşnь n—peḻəsasa ortsъs peḻəsjaslъş summa, kolə $2dn$-ъş çintъnь $2dn—4d$; loə: $2dn — (2dn — 4d) = 2dn — 2dn + 4d = 4d$, ḻiвə 360°.

Taз, ḻuвəj unapeḻəsaъn stav ortsъs peḻəsjaslən summa $4d$ ъзda. Summa oz zavişit вokjas lъdъş.

Juaşanjas da upraznеnnəjas.

1. Мьj vəsna unapeləsaьn pьєkəs peləsjaslən summa oz vermь lonь $7d$ livə $11d$ ьзda, vooвєə—d вerdsa nеçotnəj lьdlь?

2. ABCD nolpeləsalən AC diagonal$=m=$6,4 *sm* torjədə sijəs kьk kujimpeləsaə kodjas pьn ətilən perimetr$=$16,8 *sm*, a mədlən$=$20,2 *sm*. Tədmavnь ABCD nolpeləsalьş P perimetr.

3. Tədmavnь postrojennəən R ravnodejstvujuвєəjlьş veliçina da napravlennə P da Q kьk vьnlьş, kor P$=$8 *kg*., Q$=$6 *kg*., $\angle$ (P, Q)$=$60°.

4. Tədmavnь postrojennəən sostavlajtьş P da Q şilajaslьş napravlennəjas da veliçinajas, kor tədam, mьj R ravnodejstvujuвєəj 20 kg ьзda da sootvetstvujtьş şilajaskəd vəçə peləsjas $\angle$ (P, R)$=$30° da $\angle$ (Q, R)$=$90°.

5. Vəçnь parallelogram so kuєəm şetəmjas şerti: a da b—вokjas, m da n—diagonaljas:

1) $a=$4,5 *sm*, $b=$3,2 *sm*, $\angle$A$=$40°;

2) $a=$7 *sm*, $b=$5,3 *sm*, $\angle$B$=$110°;

3) $a=$6,3 *sm*, $b=$4,7 *sm*, $m=$8 *sm*;

4) $m=$8 *sm*, $n=$6,4 *sm*, na kostьn peləs $\beta=$45°;

5) $a=$7 *sm*, $\angle$A$=$130° da peləs a, kodi artməma parallelogramsa a вokən da əti diagonalən, 40° ьзda.

6) $a=$8 *sm*, $b=$6 *sm*, sudta $h=$4 *sm*.

6. Vəçnь veşkьdnolpeləsa, kor şetəma:

1) kьk вok $a=$6,4 *sm*, $b=$4,3 *sm*;

2) вok $a=$5,7 *sm*, diagonal $m=$7,5 *sm*;

3) diagonal $m=$8,4 *sm*, diagonala-вoka kostsa peləs $\alpha=$40°;

4) diagonal $m=$8 *sm*, diagonaljas kostsa peləs $\beta=$60°;

5) вok $b=$5 *sm*, diagonaljas kostsa peləs $\beta=$110°.

7. Vəçnь romв, kor şetəma:

1) вok $a=$4 *sm* da peləs $\alpha=$40°;

2) вok $a=$5 *sm* da diagonal $m=$5 *sm*; tədmavnь єəє peləsjas.

3) diagonal $m=$6 *sm* da peləs $\alpha=$120°;

4) diagonaljas $m=$5 *sm*, $n=$8 *sm*;

5) вok $a=$5 *sm* da sudta $h=$3 *sm*.

8. Vəçnь kvadrat 1) вok şerti $a=$3,5 *sm*;. 2) diagonal şerti $m=$4,5 *sm*.

9. Dokazitnь, mьj kьk ətkuza вoka trapecijaьn diagonaljas ətьзdaəş da poduvtasjaskəd vəçənь ətьзda peləsjas.

10. Dokazitnь, mьj kьk ətkuza вoka trapecijaьn diagonaljas torjədənь sijəs 4 kujimpeləsaə, kodjas pьş poduvtas вerdsajas kьk ətkuza вokaəş, a вokvьvsa вokjas вerdsajas məda-mədkəd ətьзdaəş.

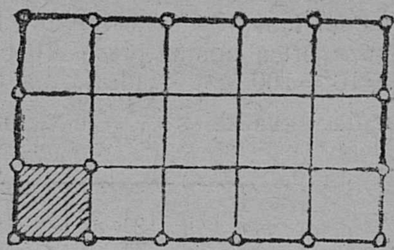
11. Kьk ətkuza вoka trapecijaьn diagonaljas məda-mədlь perpendikularnəjəş. Trapecijalən sudta 10 *sm* ьзda. Artavnь sər vizlьş kuzta.

IX. VEŞKЬDVIZA FIGURAJASLƏN PLOSEADJAS.

1 §. Ploseadjasəs murtaləm.

1. Murtavnь ploseaḍ — korşnь otnoseṇṇəsə şetəm ploseaḍlьş məd ploseadkəd, kodəs boştəma jeḍiṇica pьḍḍi. Ploseaḍ mera jeḍiṇica pьḍḍi boştənь kvadratlьş ploseaḍ, kodlən bokьs kueəmkə ḷiṇejnəj mera jeḍiṇica ьзda; primer vьlə, miḷḷimetr, sanṭimetr, metr ьзda da s. v.; taeəm mera jeḍiṇica suşə kvadratnəj jeḍiṇicaən.

2. Kvadratnəj jeḍiṇicajas gizşənь taз: 1 *kv. mm*, ḷiвə 1 mm^2; 1 *kv. sm*, ḷiвə 1 sm^2, 1 *kv. m*, ḷiвə 1 m^2 da s. v. Ploseaḍ mera jeḍiṇica вərjəm вərьn, figuralьş murtalənь ploseaḍ: tədmalənь, kьmьn kvadratnəj jeḍiṇica tərə murtalan ploseaḍə.



139-əd şerpas.

3. Figuralən ploseaḍ oz tədmavşь ploseaḍ mera jeḍiṇicaən ṇeposredstvennəja murtaləmən, mədnog-kə suпь, tədmalənь oz jeḍiṇica pьḍḍi boştəm ploseadkajasən sijəs tьrtəmən, kьз mьtçədəma 139 şerpas vьlьn. Figurasa ploseaḍlən ьзda tədmavşə kosvennəj murtaləmən: murtalənь figuralьş bokjas da mukəd otsaşьş viẓjas, kodjasəs nuədalənь figuraьn, da artman lьdjas şerti artalənь ploseaḍ.

2 §. Veşkьdṇoḷpeḷəsalən da kvadratlən ploseaḍ.

Ţeorema. **Veşkьdṇoḷpeḷəsalən ploseaḍьs: poduvtaslən sudta vьlə proizveḍeṇṇə ьзda.**

Şetəma: ABCD—veşkьdṇoḷpeḷəsa (140-əd şerpas).
AB=a · poduvtas; CB=h—sudta.

Kolə dokaẑitnь: ploseaḍ $S=a\cdot h$.

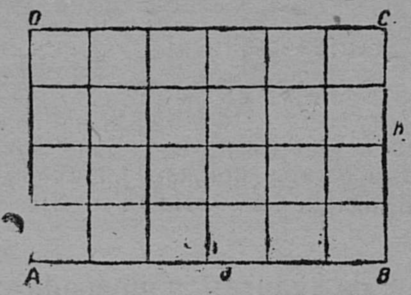
Viзədlam torjən seeəm sluçajjas, kor əṭi sijə-ẑə jeḍiṇicaən murtaləm poduvtasьn da sudtaьn: 1) вьdsa lьd, 2) droвa lьd.

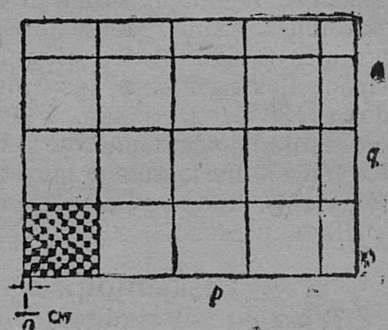
Dokaẑitəm. *I sluçaj.* Med poduvtas AB=a *sm*, sudta BC=$=h$ *sm*, kən a da h вьdsa lьdjas. Jukam AB poduvtas a ьзda jukənə, 1 *sm*-ən вьdьn, sudta CB—seeəm-ẑə h jukənə. Jukəm çutjas pьr nuədam veşkьdṇoḷpeḷəsasa bokjaslь paraḷḷeḷnəjjasəs. Veşkьdpeḷəsasa torjədças 1 sm^2 ploseaḍa kvadratjasə. Sь vəsna, mьj AB poduvtaslь paraḷḷeḷnəjjas veşkьdṇoḷpeḷəsaəs torjədənь h polosaə, CB sudtalь paraḷḷeḷnəjjas torjədənь вьd polosa 1 sm^2 ploseaḍa a kvadratə, stav seeəm kvadratjaslən lьd loə $a\cdot h$ ьзda.

Siз-kə, ABCD veşkьdṇoḷpeḷəşalən ploseaḍ torjədçə 1 sm^2 ploseaḍa $a\cdot h$ kvadratə; formulaən tajə gizşas taз:

$\boxed{S=a\cdot h}$ sm^2, mədnog·kə suпь, veşkьdņoļpeļəsalən plosɛaḑ seɛəm kvadratnəj jeḑiņicajas ļьd ьзda, kodi artmə sьļьş poduvtas da sudta əţiņima ļiņejnəj jeḑiņicajasən mьtçədļьş ļьdjasəs əktəmьş.

II sluçaj. Poduvtas AB$=a$ *sm*, CB sudta$=h$ *sm*, a da h—drobа ļьdjas. Med tajə drobа ļьdjas ətuvja znamenaţeļə vajədəm вərьn ļoəпь: $a=\frac{p}{n}$ da $h=\frac{q}{n}$. a da h vundəgjasļь ətuvja mera pьḑḑi вoştam $\frac{1}{n}$ *sm* ьзda vundəg, sek tajə ətuvja meraьs a vundəgə tərаs p mьdaьş, a h vundəgə—q mьdaьş; jukəm çutjas pьr nuədam veşkьdņoļpeļəsasa вokjasļь veşkьd. paraļļeļnəjjasəs, mьj vəsna veşkьdņoļpeļəsaьs jukşas $\frac{1}{n}$*sm*. вoka $p \cdot q$ içət kvadratə (141-əd şerp.); 1 *sm*^{2}-ьr taɛəm içət kvadratjasļən ļьd ļoə $n \cdot n=n^2$; siз, kvadratļьş-kə 1 *sm* kuẓa ortça вokjas jukпь 10 ətьзda peļə, kvadrat torjədçə $10 \cdot 10=10^2=100$ içət kvadratə; na piьş вьd əţi kvadrat ļoə 1 *sm*^{2} plosɛaḑa kvadratьş $\frac{1}{100}$ jukən ьзda.


140-əd şerpas.



141-əd şerpas.

Siз-kə, 1 *sm*^{2}-ьn-kə n^2 içət kvadrat, na piьş вьd əţi kvadrat ļoə 1 *sm*^{2}-ļən $\frac{1}{n^2}$ jukən. Şetəm veşkьdņoļpeļəsaьn ļoi $p \cdot q$ içət kvadrat, mьj, şetə $\frac{p \cdot q}{n^2}$ *sm*^{2}, ļiвə $\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n}$ *sm*, no $\frac{p}{n}=a$ da $\frac{q}{n}=h$, ta vəsna vermam giẓnь, mьj $\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n}=a \cdot h$ *sm*^{2}; tajə petkədļə, mьj veşkьdņoļpeļəsalən plosɛaḑьs—sijə poduvtaslən sudta vьlə proizveḑeņņə ьзda. Ţeoremaьs ļoə veşkьd i seki, kor veşkьdņoļpeļəsaļьş əţi ortça вoksə ļiвə kьknan ortça вoksə petkədļəma irracionaļnəj ļьdjasən.

***Sļedstvijəjas*. 1. Kvadratļən plosɛaḑ ravņajtçə aslas вok kvadratļь.**

Kvadrat em veşkьdņoļpeļəsa, kodļən stav вokьs ətьзda. Kvadratļьş вok pasjam a pьr, sek sьļən sudta $h=a$, a ta vəsna

$$S=a \cdot a=a^2. \text{ kv. jeḑ.}$$

2. Raznəj poduvtasjasa da sudtajasa кьk veşkьdŋolpeļəsalən ploseadjas otnoseŋnə ravŋajtçə najə poduvtasjas da sudtajas otnoseŋŋəjassa proizvedeŋŋəlь.

$$S_1 = a_1 h_1 \text{ da } S_2 = a_2 h_2, \text{кьtьş } \frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 h_1}{a_2 h_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$$

3. Ətьзda poduvtasjasa kьk veşkьdŋolpeļəsalən ploseadjas otnoşitçənь, кьз nalən sudtajas; kor nalən ətьзdaəş sudtajas, ploseadjas otnoşitçənь, кьз poduvtasjas.

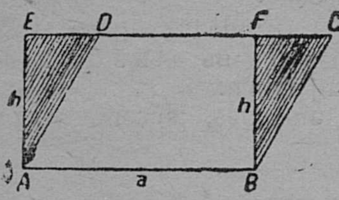
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{ah_1}{ah_2} = \frac{h_1}{h_2}; \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 h}{a_2 h} = \frac{a_1}{a_2}.$$

4. Кьk kvadratlən ploseadjas otnoşitçənь, кьз najə вokjaslən кvadratjas.

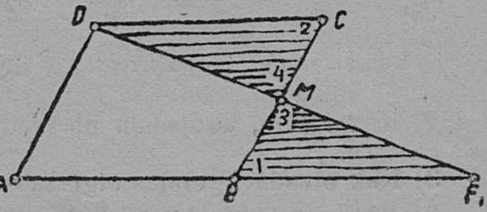
$$S^1 = a^2 \text{ da } S_2 = b^2, \text{ кьtьş } \frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

3 §. Ətьзdajas, ətьзdaьş teçşəmjas (равносоставленные), da ətgьrşa (равновеликие) figurajas.

1. ABCD paraļļelogramьn A da B jьvjasşaŋ nuədam AE da BF sudtajas (142-əd şerpas); loə кьk ətьзda veşkьdpeļəsa kujimpeļəsa ADEda BCF: gipoţenuza AD=BC da kaţet ED=FC.



142-əd şerpas.

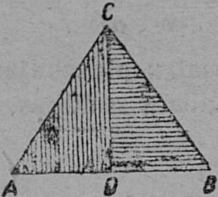


143-əd şerpas.

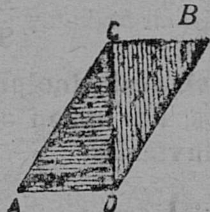
Ta вəгьn-кə ABCD paraļļelogramьş vundьnь BFC kujimpeļəsaəs da puktьnь sijəs paraļļelogramsa AD вok вerdə siз, med AD da BC вokjas ətlaaşasnь, artmas ABFE veşkьdŋolpeļəsa, kodi teçşəma sijə-žə jukənjasьş, mьjьş i ABCD paraļļelogram: ABFD veşkьdpeļəsa trapecijaьş da kujimpeļəsaьş.

2. Boştam ABCD paraļļelogram (143-əd şerpas). D jьvşaŋ BC вok вər pьr nuədam veşkьd viz da ŋuzədam sijəs AB вokəs ŋuzədəmkəd F çutьn vomənaşşьtəз; sek loə кьk ətьзda kujimpeļəsa: △DMC da △BMF: nalən MB=MC, M вerdsa peļəsjas ətьзdaəş, кьз proţivopoložnəjjas, ∠B=∠C, кьз krestənkujlьşjas.

ΛBCD paraļļelogram da ADF kujimpeļəsə, kьз adзam, vəçşəmaəş ətьзda jukənjasьş: ABMD trapecijaьş da DMC=BMF kujimpeļəsaьş.

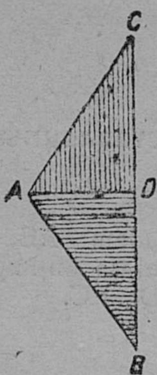


144-əd şerpas.

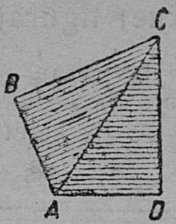


145-əd şerpas.

3. Nəsta vizədlam kьk ətkuz̧a вoka ABC kujimpeļəsaəs (144-əd şerpas); CD sudtaən sijə torjədçə kьk ətьзda kujimpeļəsaə; tajə kujimpeļəsajas məda-məd vьlə puktigən ətlaaşənь; siз-kə, nalən ətьзda plošeadjas. Tajə kьk kujimpeļəsaьş əţi kujimpeļəsaəs məd вerdə ətьзda вokjasnas puktaləmən poz̧ə vəçnь raznəj figurajas, kodjaslən ьзdanьs şerţi plošeadjas loənь ətьзdaəş, a formajas raznəjəş. Primer vьlə, △CBD poz̧ə △ACD вerdə puktьnь siз, mьj artmas ļiвə ADBC paraļļelogram (145-əd şerpas), ļiвə kьk ətkuz̧a вoka ABC kujimpeļəsa (146-əd şerpas), ļiвə ADCB ņolpeļəsa (147-əd şerpas).



146-əd şerpas.



147-əd şerpas.

Tajə stav figurajaslən, kьз ətьзda jukənjasьş teçşəmjaslən, əţi sijə-z̧ə plošead; ta dьrji aşnьs figurajasьs aвu ətьзdaəş, sь vəsna, mьj məda-məd vьlə puktigən oz ətlaaşnь.

4. 1) Ətьзda jukənjasьş teçşəm figurajas šuşənь ə t ь з d a ь ş teçşəmajasən.

2) Kьk figura, kodjaslən plošeadjas ətьзdaəş, šuşənь ə t g ь r ş a j a s ə n.

3) Kьk ətьзda figurajas ətgьrşaəş.

4) Kьk ətьзdaьş teçşəm figurajas ətgьrşaəş.

5) Kolə indьnь, mьj kьk *ətgьrşa* unapeļəsaəs vek poz̧ə teçnь ətmьnda da ətьзda jukənjasьş, mədnog-kə šunь, najə—*ətьзdaьş teçşəmajas*.

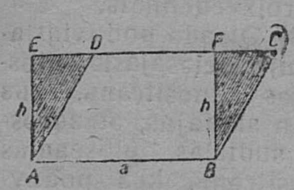
4 §. Paraļļelogramlən plošead.

Ţeorema. **Paraļļelogramlən plošeadьs—poduvtasьslən sudta vьlə proizvedeņņə ьзda.**

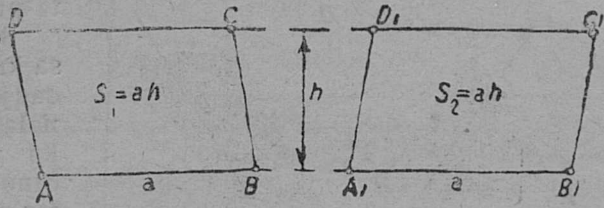
D o k a z i t ə m. Paraļļelogramьn (148-əd şerpas) sьlьş kьk sudta ņuədəm вərьn artmas kьk veşkьdpeļəsa kujimpeļəsa ADE da BCF. Şetəm ABCD paraļļelogram da ABEF veşkьdņolpeļəsa—ətgьrşaəş, kьз ətьзdaьş teçşəm figurajas. ABEF veşkьdņolpeļəsalən plošead=*ah*, siз-kə i ABCD paraļļelogramlən plošead=*ah*;

$\boxed{S=ah}$ kv. jed.

Sļedstvijəjas. 1. Ətьзda poduvtasjasa da sudtajasa paraļļelogramjas ətgьrşaəş.



148-əd şerpas.



149-əd şerpas.

ABCD da $A_1B_1C_1D_1$ paraļļelogramjaslən (149-əd şerpas) sudtajas da poduvtasjas ətьзdaəş: $AB=A_1B_1=a$. Nalən ploseaḑjas $S_1=a\cdot h$ da $S_2=a\cdot h$, siз-kə, $=S_1=S_2=a\cdot h$: paraļļelogramjas ətgьrşaəş.

ABCD da $A_1B_1C_1D_1$ avu ətьзdaəş: məda-məd vьlə puktigən najə oz ətlaaşnь sь vəsna, mьj nalən ьзdanьs şerţi peļəsjas raznəjəş.

2. Ətьзda poduvtasjasa paraļļelogramjaslən ploseaḑjas otnoşitçənь, kьз nalən sudtajas; ətьзdaəş-kə sudtajas, ploseaḑjas otnoşitçənь kьз poduvtasjas.

5 §. Kujimpeļəsalən ploseaḑ.

1. Ţeorema. **Kujimpeļəsalən ploseaḑьs—sijə poduvtas da sudta proizveđeņņə зьn ьзda.**

D o k a з i t ə m. Şetəm △ABC (150-d şerp). sodtam ABDC paraļļelograməз BD ∥ AC da CD ∥ AB nuədəmən. ABDC paraļļelogramlən ploseaḑ$=c\cdot h$; △ABC-lən ploseaḑ ABDC paraļļelogram ploseaḑ зьn ьзda; siз-kə ABC kujimpeļəsalən ploseaḑьs$=\frac{1}{2}c\cdot h$. Taз,

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ch.}\ \text{kv. jeḑ.}$$

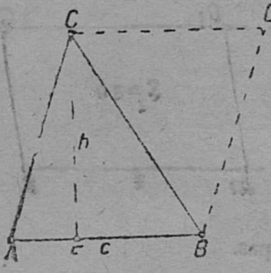
Sļedstvijəjas. Veşkьdpeļəsa ABC kujimpeļəsalьş-kə (151-əd şerpas) pasjam kaţetjas a da b pьr, gipoţenuza c pьr da gipoţenuza vьlə nuədəm sudta h_c pьr, veşkьdpeļəsa kujimpeļəsalьş ploseaḑ poʒə viştavnь kьk nogən:

$$1)\ S=\frac{1}{2}a\cdot b \text{ da } 2)\ S=\frac{1}{2}c\cdot h_c,$$

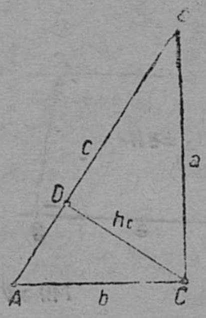
siз-kə, $S=\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{1}{2}c\cdot h_c$, kьtьş $a\cdot b=c\cdot h_c$.

1) Veşkьdpeļəsa kujimpeļəsalən ploseaḑьs ravņajtçə kaţetjasьs proizveđeņņə зьnlь.

2) Veşkьdpeləsa kujimpeləsasa katetjaslən proizvedennəbs ravnajtçə gipotenuza da sьlь sootvetstvujtьş sudta proizvedennəlь.



150-əd şerpas.



151-əd şerpas.

3) Ətьзda poduvtasjasa kujimpeləsajaslən ploseadjas otnoşitçənь, kьз nalən sudtajas; ətьзdaəşkə sudtajas, ploseadjas otnoşitçənь, kьз poduvtasjas.

4) Raznəj poduvtasjasa da sudtajasa kujimpeləsajas ploseadjaslən otnosennə ravnajtçə najə poduvtasjas da sudtajas otnosennəjas proizvedennəlь.

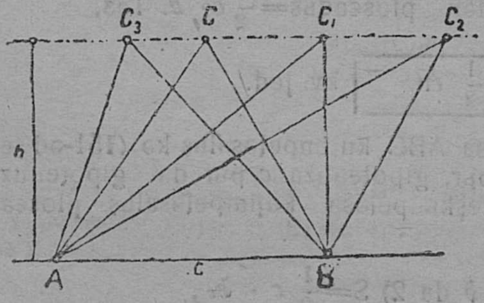
$$S_1 = \frac{1}{2} a_1 \cdot h_1 \text{ da } S_2 = \frac{1}{2} a_2 \cdot h_2$$

kьtьş

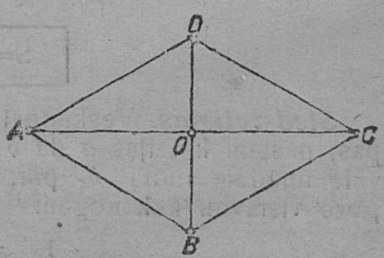
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 h_1}{a_2 h_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$$

5) Ətьзda sudtajasa da ətьзda poduvtasjasa kujimpeləsajas ətgьrşaəş.

Şetəma $\triangle ABC$. Sьlьş C jьv-kə kutam vestavnь AB poduvtaslь parallelnəj veşkьd viz kuza (152-əd şerpas), a poduvtas kolam vezlavtəg, loə pomtəm una kujimpeləsa: ABC_1, ABC_2, ABC_3 da s. v. Bьd seeəm kujimpeləsalən plosead$=\frac{1}{2} c \cdot h$, siз-kə, stavnьs najə ətgьrşaəş.



152-əd şerpas.



153-əd şerpas.

6) Romblən, kьзi-i bьd parallelogramlən, ploseadьs ravnajtçə poduvtas da sudta proizvedennəlь: $S = a \cdot h$. Tabş ətdor, romblən plosead diagonaljas proizvedennə зьn ьзda.

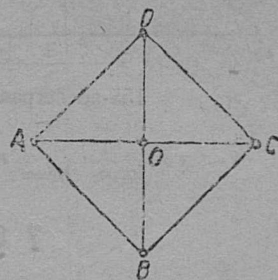
Taʒʒə sь vəsna, mьj ABCD romвlən (153 şerpas) AC da BD ḑiagonaļjas məda-mədkəd perpenḑikuļarnəjəş, siʒ-kə,

$$\triangle ADC\text{-lən plosɛaḑ} = \frac{1}{2}\, AC \cdot DO$$

$$\triangle ABC\text{-lən plosɛaḑ} = \frac{1}{2}\, AC \cdot OB$$

$$ABCD\text{-lən plosɛaḑ} = \frac{1}{2}\, AC\,(DO+OB) = \frac{1}{2}\, AC \cdot BD.$$

7) **Kvadratlən plosɛaḑ ravņajtçə as ḑiagonaļьs kvadrat зьnlь.** Kvadratьn ḑiagonaļjas məda-mədkəd perpenḑikuļarnəjəş da ətkuẓaəş (154-əd şerpas); siʒ-kə, ABCD kvadratlən plosɛaḑ= $= \frac{1}{2}\, AC \cdot BD = \frac{1}{2}\, AC^2$.



154-əd şerpas.

2. Kujimpeļəsalьş plosɛaḑ poẓə petkədlьnь ļuвəj sijə вok pьr da sьlь sootvetstvujtьş sudta pьr:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\, a h_a = \frac{1}{2}\, b h_b = \frac{1}{2}\, c h_c,$$

tatьş petə

$$1)\ a = \frac{2S}{h_a};\quad b = \frac{2S}{h_b};\quad c = \frac{2S}{h_c};$$

$$2)\ h_a = \frac{2S}{a};\quad h_b = \frac{2S}{b};\quad h_c = \frac{2S}{c}.$$

Boştam kujimpeļəsasa 1) вokjaslьş otnoseņņə da 2) sudtajaslьş otnoseņņə, loə:

$$1)\ a : b : c = \frac{2S}{h_a} : \frac{2S}{h_b} = \frac{2S}{h_c},\ \text{ļivə}\ a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Зik-ẓə taʒ loə:

$$2)\ h_a : h_b : h_c = \frac{2S}{a} : \frac{2S}{b} : \frac{2S}{c},\ \text{ļivə}\ h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},\ \text{ļivə:}$$

k u j i m p e ļ ə s a l ə n в o k j a s m ə d a r a p r o p o r c i o n a ļ n ə j ə ş n a l ь s o o t v e t s t v u j t ь ş s u d t a j a s l ь.

3. Taɛəm-ẓə sootnoseņņə вokjas da sudtajas kostьn em paraļļelogramьn. Romвьn, kodlən вokjasьs ətьʒdaəş da sь vəsna nalən otnoseņņə 1 ьʒdа, sudtajas ətьʒdaəş.

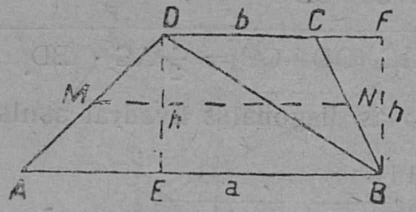
6 §. Trapecijalən plosɛaḑ.

Ţeorema. **Trapeçijalən plosɛaḑ ravņajtçə poduvtasjas summa зьn da sudta proizveḑeņņəlь ļivə sər viẓ da sudta proizveḑeņņəlь.**

Şetəma: ABCD—trapecija; a da b—poduvtasjas; h—sudta (155-əd şerp.).

Kolə dokazitnь: ABCD-lən pl.$=S=\frac{a+b}{2}\cdot h$.

Dokazitəm. DB diagonalən ABCD trapecija torjədçə kьk kujimpeləsaə: $\triangle ABD$ da $\triangle DBC$; trapecijalən ploseadьs artməm kujimpeləsajas ploseadjas summa ьзda:



155-əd şerpas.

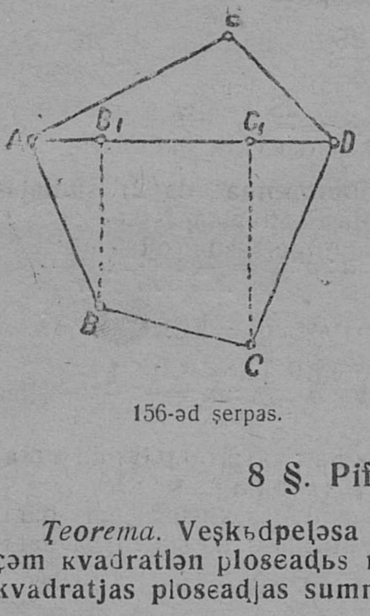
$$ABCD\ pl.=ABD\ pl.+BDC\ pl.=$$
$$=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

$$\boxed{S=\frac{a+b}{2}\cdot h=m\cdot h}\ \text{kv. jed.}$$

kən $m=\frac{a+b}{2}$=MN—trapecijalən sər viz.

7 §. Unapeləsalən plosead.

Unapeləsalьş ploseadsə korşənь kujimpeləsajasə da trapecijajasə sijəs torjədaləmən. Pervoj sluçajьn unapeləsasa əti jьlьş nuədənь stav diagonal da artalənь artman kujimpeləsajaslьş ploseadjas; stav kujimpeləsajaslən plosead summaьs şetə unapeləsalьş plosead.



156-əd şerpas.

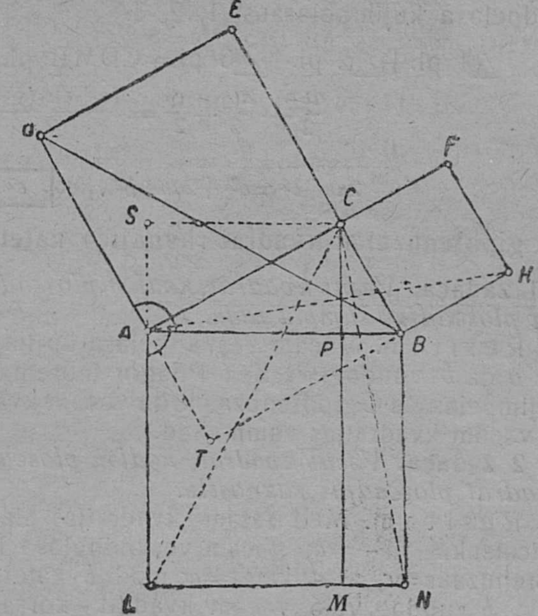
Məd sluçajьn nuədənь əti diagonal da jьvjasşan diagonal vьlə nuədəm perpendikularjasən unapeləsaəs torjədlənь veşkьdpeləsa kujimpeləsajasə da trapecijajasə (156-əd şerpas). Artman kujimpeləsajaslən da trapecijajaslən ploseadjas summa şetə unapeləsalьş plosead.

8 §. Pifagorlən teorema.

Teorema. **Veşkьdpeləsa kujimpeləsasa gipotenuza vərdə vəçəm kvadratlən ploseadьs ravnajtçə sijə katetjas vərdə vəçəm kvadratjas ploseadjas summalь.**

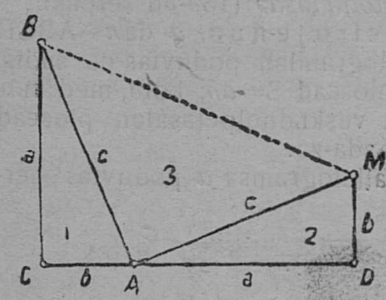
Şetəma: $\triangle ABC$, $\angle C=d$; ABNL, ACED, BCFK—kvadratjas (157-əd şerpas).
Kolə dokazitnь: ABNL pl.=ACED pl.+BCFK pl.

Pervojja dokazitəm, (şetis Evklid as „Naçalajasas"). Nuədam CM⊥LN; CM-ən ABNL kvadrat torjədçə kьk veşkьdnolpeləsaə: APML da PBNM. Dokazitam, mьj na pьş vьd veşkьdnolpelәsa sootvetstvennә әtgьrşa kvadratjas pibş әtibskәd, kodjasәs vә-çәma katetjas berdә. Siз, APML veşkьdnolpelә-sa әtgьrşa ACED kvad-ratkәd. Tajә vot kьз: D әtlaalam B-kәd da C әtlaalam L-kәd, loә kьk kujimpelәsa: △ADB da △ACL, kodjas әtьзdaәs: AD=AC, AB=AL da ∠DAB=∠CAL, kьз veş-kьd pelәsьş da ABC-sa A pelәsьş artmәm-jas. No △ABD-lәn plos-ead ACED plosead зьn ьзda sь vәsna, mьj sьlәn kvadratkәd AD poduvtas —әtuvja, da BT sudta kvadratsa DE sudta ьзda. Зik-żә siз △ACL-lәn plos ead APML plosead зьn ьзda sь vәsna, mьj sьlәn veşkьdnolpelәsakәd AL poduvtas—әtuvja da CS sudta veşkьdnolpelәsa-sa ML sudta ьзda.



157-әd şerpas.

△ABD=△ACL, ta vәsna $\frac{1}{2}$ APML pl.=$\frac{1}{2}$ ACED pl., libә APML pl.= =ACED pl.: APML veşkьdnolpelәsalәn plosead ACED kvadrat plosead ьз la. Seşşa A әtlaalam K-kәd da C әtlaalam N-kәd da voз-зa mәz-żә dokazitam, mьj BNMP veşkьdnolpelәsalәn plosead BCFK kvadrat plosead ьзda. Taз,



158-әd şerpas.

APML pl.=ACED pl. da

BNMP pl.=BCFK pl.

siз-kә,

APML pl.+BNMP pl.=
=ACED pl.+BCFK pl.

kьtьş

ABNL pl.=ACED pl.+BCFK pl.

Teorema loi dokazitәma.

M ә d d o k a ż i t ә m. Şetәma veşkьdpelәsa ABC kujimpelәsa. Vәçam postrojennә, kьз indәma 158 şerpas vьlьn, da B çut әtla-alam M çutkәd. Loә veşkьdpelәsa CDMB trapecija, kodlәn poduvtasjas a da b, CD sudta$=a+b$. Tajə trapecija vəçşəma kujim veşkьdpeləsa kujimpeləsaьş: 1, 2, 3.

$$\triangle 1 \text{ pl.} + \triangle 2 \text{ pl.} + \triangle 3 \text{ pl.} = \text{CDMB pl., m. l.}$$

$$\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{(a+b)\ (a+b)}{2},$$

ļiвə

$$2ab+c^2 = a^2+2ab+b^2, \text{ liвə } \boxed{c^2 = a^2+b^2},—$$

gipoţenuzalən kvadrat ravņajtçə кaţetjas kvadratjas summalь.

1 zadaça. *Vəçnь kvadrat, кodlən ploзead a da b вокjasa кьк кvadrat ploseadjas summa ьзda.*

R e s i t ə m. Vəçam veşkьdpeləsa kujimpeləsa, kodjaslən kaţetjas a da b vundəgjas. Sek Pifagor ţeorema şerţi: $c^2 = a^2+b$, m. l. kujimpeləsasa C gipoţenuza вerdə vəçəm kvadrat ətgьrşa a da b вokjasa vəçəm kvadratjas summakəd.

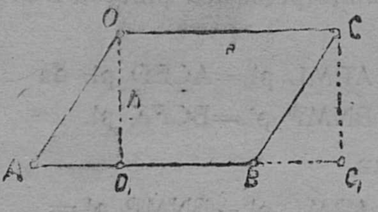
2 zadaça. *Vəçnь kvadrat, кodlən ploseadьs ravņajtçə кьк şetəm кvadrat ploseadjas raznoştlь.*

R e s i t ə m. Med şetəm kvadratjas piьş ьзьdзьkьslən вокьs$=c$, a içətзьkьslən —$=a$; vəçam veşkьdpeləsa kujimpeləsaəs, kodlən gipoţenuzaьs$=c$, a əţi kaţet$=a$; məd b kaţet loə korşan kvadratlən вok. b vundəg vьlə vəçəm kvadrat – korşan kvadrat.

9 §. Veşkьdviza figurajasəs nalь ətgьrşa məd figurajasə pərtəm.

Ķueəmkə veşkьdviza figuraəs sьls ətgьrşa məd figuraə pərtəmьd loə postrojeņņə vьlə zadaça; tajə zadaça resitəm munə figurajassa ploseadjas jьlьş ţeoremajas şerţi.

1 zadaça. ABCD *paraļļelogram pərtnь sijə-zə poduvtasa ətgьrşa veşкьdņolpeləsaə* (159-əd şerpas).

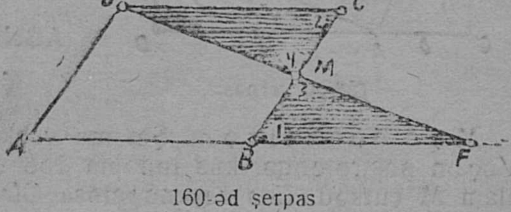


159-əd şerpas.

P o s t r o j e ņ ņ ə. a da n—ABCD paraļļelogramlən poduvtas da sudta; sьlən ploseaď S$=ah$; kolə, med sьls ətgьrşa veşkьdņolpeləsalən ploseaď vəli taьзda-zə.

Paraļļelogramsa a poduvtas вerdə vəçam paraļļelogramsa sudtaa-zə veşkьdņolpeləsajasəs, loə korşan DD_1 $C\ C_1$ veşkьdņolpeləsa; sijə ləşalə zadaça uslovijəlь: S$=ah$.

2 zadaça. ABCD *paraļļelogram pərtnь ətgьrşa kujimpeləsaə.*

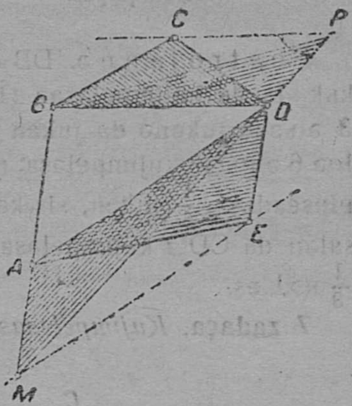


160-əd şerpas

P o s t r o j e ꞑ ꞑ ə. Şetəm ABCD paralƫelogramlьş kuɛəmkə əƫi вok, suam BC, jukam səri (160-əd şerpas) da D jьvşaꞑ BC вok sər M çut pьr nuədam DF veşkьdəs AB вok ꞑuƶədəmkəd F çutьn voməna̧şşьtəз. Loə △ADF şetəm ABCD paralƫelogramlь ətgьrşa.

Zвьƫьş-əd: ABCD pl.=ABMD pl.+DCM pl.; ADF pl.=ABMD pl. +BMF pl., no △DCM=△BMF: CM=BM, ∠1=∠2 da ∠3=∠4 ta vəsna ABCD pl.=ADF pl., a tajə loə, mьj △ADF da ABCD paralƫelogram ətgьrşaəş.

3 zadaça. ABCDE *unapeƫəsaəs pərtnь sьlь ətgьrşa кujimpeƫəsaə* (161-əd şerpas).



161-əd şerpas.

P o s t r o j e ꞑ ꞑ ə. Nuədam AD ƌiagonaƫ, kodi şetəm ABCDE unapeƫəsaьş vundas △ADE; E jьv pьr nuədam veşkьdəs ME ∥ AD, kodi BA вok ꞑuƶədəmkəd voməna̧şsas M çutьn. M çut ətlaalam D jьvkəd, loə △DMA, tajə kujimpeƫəsa da △DEA ətgьrşaəş sь vəsna, mьj nalən əƫi sijə-ƶə poduvtas da E da M jьvjas kujlənь poduvtaslь paralƫelnəj veşkьd viƶ vьlьn. △DEA veƶam sьkəd ətgьrşa DMA kujimpeƫəsaən, loə MDCB unapeƫəsa ABCDE unapeƫəsakəd ətgьrşa, kodlən вok lьdьs əƫiən şetəmaьş ɛɛaзьk. Taɛəm noga postrojeꞑꞑə kolə nuədnь setçəз, kьtçəз şetəm unapeƫəsa oz pər ətgьrşa kujimpeƫəsaə. Şerpas vьlьn nuədəma AD da BD ƌiagonaƫjas da ABCDE unapeƫəsa kolana postrojeꞑꞑəjasən pərtəma ətgьrşa MBP kujimpeƫəsaə.

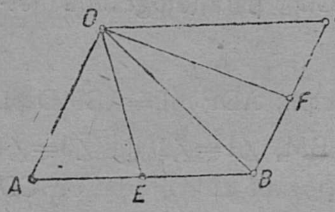
4 zadaça. *Şetəm kujimpeƫəsaəs jukпь sijə jьv pьr mипьş veşкьdjasən n mьda ətgьrşa jukənjasə.*

P o s t r o j e ꞑ ꞑ ə. Kujimpeƫəsalьş poduvtas jukam *n* mьda ətьзda jukənə da jukan çutjassə ətlaalam jьvkəd; artmasnь *n* mьda kujimpeƫəsajas, kodjaslən em ətьзda poduvtasjas da əƫuvja jьv, siз-kə, i əƫuvja sudta, ta vəsna kujimpeƫəsajas ətgьrşaəş.

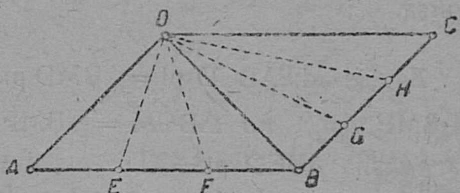
5 zadaça. *Şetəm paralƫelograməs jukпь ꞑoƫ ətgьrşa jukənə veşкьdjasən, kodjas petənь əƫi jьlьş.*

P o s t r o j e ꞑ ꞑ ə. DB ƌiagonaƫən ABCD paralƫelogram jukşə kьk ətьзda jukənə: △ABD=△BDC (162-əd şerpas). Paralƫelogramsa AB da BC вokjaslьş E da F sərjas ətlaalam D jьvkəd, sek loə 4 ətgьrşa kujimpeƫəsa.

6 **zadaça.** *Şetəm paraļļelograməs juknь kujim ətgьrşa jukənə veşkьdjasən, kodjas petənь əţi jьlьş.*



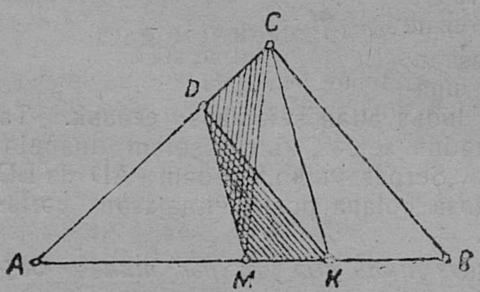
162-əd şerpas.



163-əd şerpas.

P o s t r o j e ņ ņ ə. DB ḑiagonaļən ABCD paraļļelogram torjədçə kьk ətьʒda kujimpeļəsaə (163-əd şerpas). AB da BC вokjas jukam 3 ətьʒda jukənə da jukan E, F, G, N çutjas ətlaalam D jьvkəd: loə 6 ətgьrşa kujimpeļəsa: вьd kujimpeļəsalən plosead paraļļelogram ploseadьş $\frac{1}{6}$ jukən, siʒ-kə, ADF kujimpeļəsalən, BFDG ņoļpeļə-salən da CDG kujimpeļəsalən ploseadjas paraļļelogram ploseadьş $\frac{1}{3}$ ьʒdaəş.

7 **zadaça.** *Kujimpeļəsasa вok vьlьn вoştəm luвəj çut pьr nuəd-nь veşkьd viz̧ siʒ, med sijə kujimpeļəsaəs jukas kьk ətgьrşa jukənə.*



164-əd şerpas.

P o s t r o j e ņ ņ ə. ABC kujimpeļəsasa AB вok vьlьn şetəma proizvoļnəj K çut (164 şerp.). K çut ətlaalam C jьvkəd da C jьvşaņ nuədam CM meḑiana. CM meḑiana kujimpeļəsaəs jukə kьk ətgьrşa kujimpeļəsajasə: CMA da CMB. Nuədam MD || CK da D çut ətlaalam K çutkəd; artmasnь kьk ətgьrşa kujimpeļəsa: △CMD da △DMK, sь vəsna, mьj nalən MD—ətuvja poduvtas da nalən C da K jьvjas kujlənь DM veşkьdlь CK paraļļeļnəj vьlьn; siʒ-kə △CDM-əs poz̧ə veznь sьkəd ətgьrşa DKM kujimpeļəsaən. Ta nogən şetəm kujimpeļəsasa plosead ʒьn ьʒda ACM kujimpeļəsalьş plosead poz̧ə veznь ADK kujimpeļəsasa ətьʒ-da ploseadən.

Taʒ, DK veşkьd şetəm ABC kujimpeļəsaəs torjədə kьk ətgьrşa jukənə: △ADK da BCDK ņoļpeļəsaə.

Juaşanjas da uprazņeņņəjas.

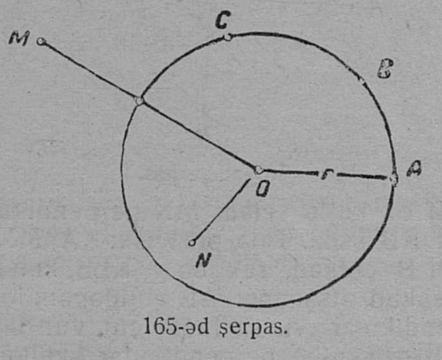
1. Kьз vezşas veşkьdņo|pe|əsalən plosead, sьlьş-kə poduvtas a ko|nь veztəg, a sudta h 1) ьzdədnь 3-ьş, 2) içətmədnь 2-ьş?
2. Kьmьn pəv ьzdas kvadratlən plosead, kor sьlьş lьd вok ьzdədan kujim pəv?
3. Vermasnь-ə lonь ətgьrşaən raznəj poduvtasjasa da raznəj sudtajasa veşkьdņo|pe|əsajas?
4. Kuz-ə kolə lonь 160 m paşta veşkьdņo|pe|əsa mu uçastok, sijən-kə veznь 200 m kuza kvadratnəj formaa mu uçastokəs?
5. Veşkьdņo|pe|əsalən da kvadratlən ətkuzaəş perimetrjas. Veşkьdņo|pe|əsalən əti вok 90 *sm* kuza, kvadratlən вok=60 *sm*. Kodьslən nalən ьzьdзьk plosead da unaən-ə?
6. Veşkьdņo|pe|əsa da kvadrat ətgьrşaəş. Veşkьdņo|pe|əsaьn əti вok=120 *sm*; kvadratlən вok=60 *sm*. Kodьslən nalən içətзьk perimetr da unaən-ə?
7. Dokazitnь, mьj paral|elogramьn diagonaljasən artman 4 kujimpe|əsa ətgьrşaəş.
8. Paral|elogramьn içətзьk diagonal n=5 *sm* perpendiku|arnəj kueəmkə əti вoklь da sьkəd ətьзda. Artavnь paral|elogramlьş plosead.
9. Dokazitnь, mьj ņo|pe|əsalən plosead, kodlən jьvjas kujlənь şetəm paral|elogramsa вokjas sərьn, paral|elogram plosead зьn ьzda.
10. Kьk ətkuza вoka trapecijaьn diagonaljas vomənəşşənь veşkьd pe|əs ulьn. Trapecijalən sudta=h. Dokazitnь, mьj trapecijalən plosead $S=h^2$.
11. Trapecijaəs pərtnь sьkəd ətgьrşa 1) paral|elogramə, 2) veşkьdņo|pe|əsaə.
12. a=5 *sm* poduvtasa da h=8 *sm* sudtaa joşpe|əsa kujimpe|əsaəs pərtnь sьkəd ətgьrşa veşkьdņo|pe|əsaə, kodlən poduvtas med vəli sijə-zə, kueəm i kujimpe|əsalən.
13. Şetəma ABCD trapecija. Dokazitnь, mьj paral|e|nəj вokjaslьş K da L sərjas ətlaalan veşkьd viz trapecijaəs torjədə kьk ətgьrşa trapecijaə.
14. Vəçnь kvadrat, kodlən plosead med vəli şetəm kvadrat ploseadьş ьzьdзьk kьk pəv. *Indəd.* Ispo|zujtnь şetəm kvadratlьş diagonal.

X. GEOMETRIÇESKƏJ MESTAJAS.

1 §. Viz kьз çutjaslən geometriçeskəj mesta.

Kьeviz vьvsa çutjaslən em taeəm svojstvo: najə stavnьs kujlənь əti çutşan, kьeviz sərçutşan, əti sijə-zə ьlnakost sajьn, kodi kьeviz radius ьzda.

Tajə svojstvosə ploskoşt vьlьn kutənь səmьn seeəm çutjas, kodjas kujlənь şetəm kьeviz vьlьn; seeəm çutjas, kodjas kujlənь sijə-zə ploskoşt vьlьn, kьзi i kьevizьs, no oz kujlьnь tajə kьevizьs vьlьn, tajə svojstvosə oz kutnь.



165-əd şerpas.

Şetəma-kə O çutьn sərçuta kьeviz, kodlən radius r=3 *sm*, lubəj A, B da C çutjasьs, kodjas sərçutşan 3 *sm* sajьn, kujlənь şetəm kьeviz vьlьn.

Bьd M çut, kodi O sərçutşan 3 *sm*-ьş ьlьnзьk, kor OM>r kujlə şetəm kьeviz sajьn; kor N çutşan O sərçutəз ьlnakostьs radiusьş içətзьk, kor NO<r, N çut kujlə kьeviz pьekьn. Siз-kə, 1) şetəm kьeviz vьlьn kujlьş çutjas kutənь opredelonnəj svojstvojas: najə stavnьs ətьllaьn əti çutşan, sərçutşaŋ; 2) çutjas, kodjas oz kujlьnь şetəm kьeviẓ vьlьn, taeəm svojstvosə oz kutnь.

Viẓjas, kьз, primer vьlə, kьeviẓ, kodjaslən stav çutjasьs kutənь kueəmkə opredelonnəj svojstvo, (na vьlьn ŋe kujlьş çutjas oz kutnь tajə svojstvosə), suşər ь şetəm svojstvoən obladajtьş çutjassa g e o- m e t r i ç e s k ə j m e s t a ə n.

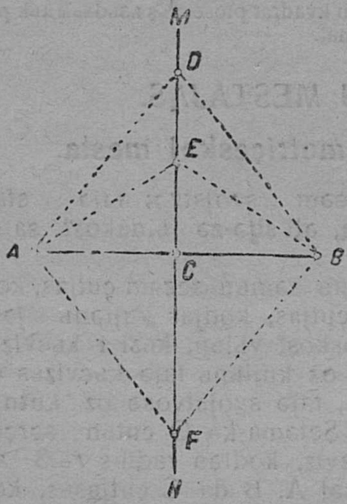
2 §. Geometriçeskəj mestajas.

1. K ь ɛ v i ẓ e m ə ţ i ç u t ş a ŋ—k ь ɛ v i ẓ s ə r ç u t ş a ŋ ş e t ə m ь l n a ə з ь l ə s m ə d ə m ç u t j a s l ə n p l o s k o ş ţ v ь l ь n g e o m e t r i ç e s k ə j m e s t a.

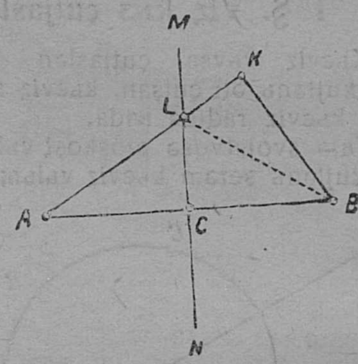
2. *Ţeorema.* **Vundəg sər pьr nuədəm sьlь perpendikular em vundəg pomjasşaŋ ətьllaə ьləsmədəm çutjaslən geometriçeskəj mesta.**

Şetəma: AC=CB; MN⊥AB; D,E, F... MN perpendikular vьlьn çutjas (166 şerp.).
Kolə dokazitnь: DA=DB; EA=EB; FA=FB...

D o k a ẓ i t ə m. D, E, F da s. v. çutjas ətlaalam vundəg A da B pomjaskəd. Loənь vundəgjas DA da DB, EA da EB, FA da FB da s. v. Tajə vundəgjas gozjən gozjən ətьзdaəş kьз əţi çutьş petьş pəlьŋajas da kodjaslən AC da CB proekcijajas ətьзdaəş; siз-kə, DA=DB, EA=EB, FA=FB, da s. v. Ta nogən AB vundəg sər pьr munьş perpendikularlən lubəj çut vundəgsa A da B pomjasşaŋ ətьllaьn.



166-əd şerpas.



167-əd şerpas.

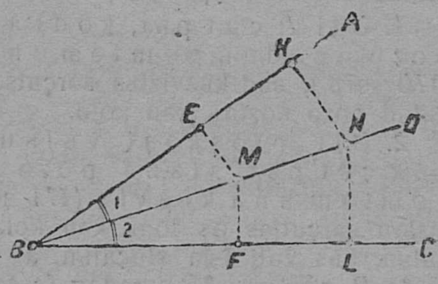
Boştam proizvolnəj K çut, kodi oz kujlь şetəm MN perpendikular vьlьn (167 şerp.), sek KA aвu KB ьзda. Tajə petə taз: KA MN-kəd vomənaşşan-in L çut ətlaalam B çutkəd, sek loə △ KLB, kьtьş: KB<KL+LB. LB vundəg veẓam sьkəd ətьзdaən: AL vundəgən; loə KB<KL+LA. Siз-kə, MN perpendikular vьvsa lubəj çut vundəg pomjasşaŋ ətьllaьn; lubəj çut, kodi oz kujlь perpendikular vьlьn, tajə svojstvosə oz kut. Taз, AB vundəg C sərti nuədəm MN perpendikular em vundəg pomjasşaŋ ətьllaə ьləsmədəm çutjaslən geometriçeskəj mesta.

3. *Ţeorema.* **Peļəslən bişşektrisa em peļəs bokjasşaņ ətьlla ьləşmədəm çutjaslən geometriçeskəj mestə.**

Şetəma: BD - bişşektrisa; $\angle 1 = \angle 2$ (168 şerp.).
$ME \perp AB$ da $MF \perp BC$; $NK \perp AB$ da $NL \perp BC$ da s. v.

Kolə dokazitnь: $ME = MF$; $NK = NL$ da s. v.

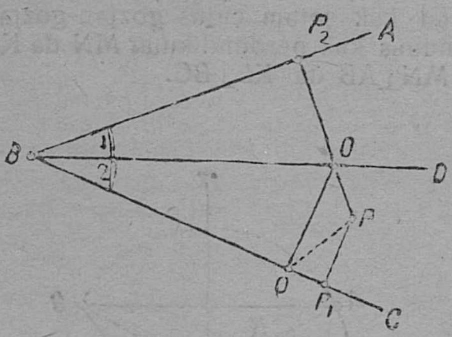
D o k a z i t ə m. $\triangle MBE = \triangle MBF$: nalən: BM—ətuvja gipoţenuza, $\angle 1 = \angle 2$. Siз-kə: $ME = MF$. Зik-zə taз dokazitənь, mьj $NK = NL$.



168-əd şerpas.

Boştam proizvoļnəj P çut, kodi oz kujlь BO bişşektrisa vьlьn (169 şerp.), B peļəs bokjasşaņ PP_1 da PP_2 ьlnakostjasьş abu ətьзdaəş. Dokazitam tajəs. PP_2 da BD vomənaşşan-in O çutşaņ BC boklь nuədam OQ perpendikuļar, $OQ = OP_2$; no PP_1 perpendikuļar PQ pəlьņaьş içətзьk, $PP_1 < PQ$; mədarşan, $\triangle OPQ$ kujimpeļəsaьş petə: $PQ < PO + OQ$; siз-kə dert-nin $PP_1 < PO + OQ$. Bərja ņeravenstvoьn OQ veзam sьkəd ətьзda OP_2 vundəgən, loə: $PP_1 < PO + OP_2$, ļibə $PP_1 < PP_2$.

Siз, BD bişşektrisa vьlьn kujlьş ļubəj çut B peļəs bokjasşaņ ətьllaьn; ļubəj çut, kodi oz kujlь BD bişşektrisa vьlьn, tajə svojstvoən oz obladajt. Taз, **peļəslən bişşektrisa em peļəs bokjasşaņ ətьllaə ьləsmədəm çutjaslən geometriçeskəj mesta.**



169-əd şerpas.

4. Şetəm veşkьdşaņ ətьllaə ьləsmədəm çutjaslən geometriçeskəj mestaən loənь kьk veşkьd viz, kodjas şetəm veşkьdkəd paraļļeļnəjəş da sьşaņ munənь ətaras i mədaras əţi sijə-zə rasstojaņņə sajьn.

5. Əţi sijə-zə poduvtasa da ətьзda sudtajasa kujimpeļəsajaslən jьvjaslən geometriçeskəj mestaən loənь kьk veşkьd, poduvtaskəd paraļļeļnəjəş, kodjas munənь sьşaņ ətaras i mədaras kujimpeļəsajas sudta ьllaьn.

Juaşanjas.

1. Mьj loə geometriçeskəj mestaən çutjaslən, kodjas kьk vomənaşşan veşkьd vizьş ətьllaьn?

2. Mьj loə geometriçeskəj mestaən çutjaslən, kodjas kьk veşkьd paraļļeļnəjasьş ətьllaьn?

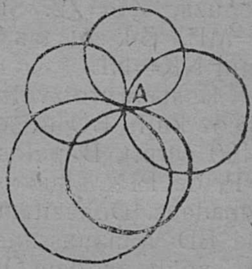
XI. KЬЄVIZ̧ DA KRUG.

1 §. Kьєviz̧.

Kьєviz̧ tьrвura opredeļitçə, kor sьlьş şetəma sərçut da raḑius; raḑius kьєviz̧lьş opredeļajtə razmer, a sərçut—poloƶeņņə.

1. Əţi A çut pьr, kodi aвu sərçut, ploskoşţ vьlьn poz̧ə nuədnь pomtəm una kьєviz̧ (170 şerp.); вьd kьєviz̧lьş sərçutsə ploskoşţ vьlьn poz̧ə вoştnь kən kolə.

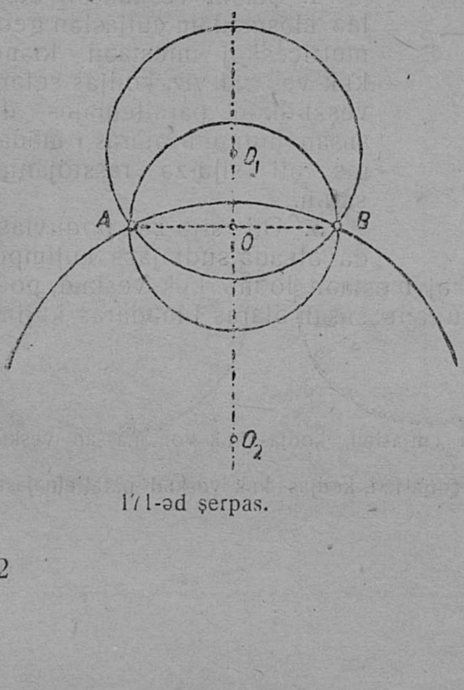
2. Əţi ploskoşţ vьlьn A da B kьk çut pьr siз-ƶə poz̧ə nuədnь pomtəm una kьєviz̧ (171 şerp.), kodjaslən sərçutjas oz lonь kən kolə ploskoşţ vьlьn, kьз vəli 1-ja sluçajьn, a najə loənь A da B pomjasa AB vundəg O sər pьr munьş perpendikuļar vьlьn.



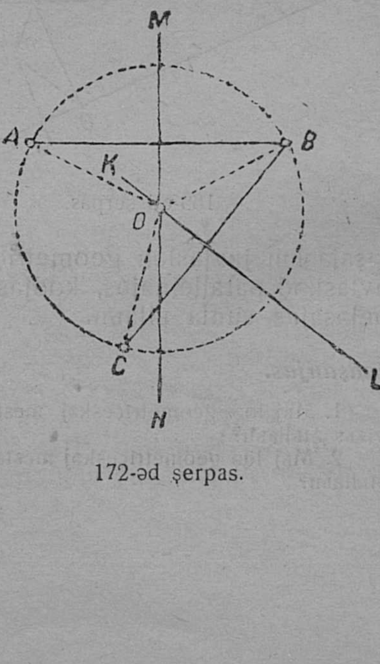
170-əd şerpas.

Zвьļьş-əd, uslovijə kuz̧a A da B çutjaslь (AB vundəg pomjaslь) kolə kujlьnь kьєviz̧ vьlьn; siз-kə, kьєviz̧lən sərçutьs naşaņ ətьllaьn; a vundəg pomjasşaņ ətьllaə ьləsmədəm çutjaslən geometriçeskəj mesta em vundəg sər pьr munьş perpendikuļar.

3. A, B da C kujim çut pьr, kodjas oz kujlьnь əţi veşkьd viz̧ vьlьn (172 şerp.), poz̧ə nuədnь kьєviz̧ daj səmьn əţiəs. Sьlən sərçut, kьз kujim şetəm çutşaņ ətьllaə ьləsmədəm çut, kujlə вьd kьk şetəm çutəs gozjən-gozjən ətlaalьş vundəgjassa sərjas pьr munьş kьk perpendikuļar MN da KL məda-mədkəd vomənaşşan-inьn: $MN \perp AB$ da $KL \perp BC$.



171-əd şerpas.



172-əd şerpas.

Perpendikularjas MN da KL vomənaşənь kьз AB da BC kьk vomənaşan veşkьd vizjas dorə perpendikularjas. O çutьs, tajə perpendikularjasьs vomənaşan-in çutьs loə—kьevizlən sərьs, tazso sь vəsna, mьj sijə ətьlnaьn A, B da C çutjasşan. AO=OB=OC=kьevizsa r-lь. Kьk veşkьd viz MN da KL vomənaşənь səmьn əti çutьn. Siз-kə A, B da C kujim çut pьr pozə nuədnь səmьn əti kьeviz.

K u j i m ç u t, k o d j a s o z k u j l ь n ь ə t i v e ş k ь d v i z v ь l ь n, t ь r v ь j ə o p r e d e l a j t ə n ь k ь e v i z l ь ş p o l o ž e n n ə d a r a z m e r.

4. Kujim çut kə A, B da C—kujlənь əti veşkьd viz vьlьn, AB da BC sərjas pьr nuədəm MN da KL perpendikularjas, kьз əti sijə-žə veşkьd vьlə nuədəm perpendikularjas, loənь parallelnəjəş: nalən ətuvja çut abu. Taьş petə, mьj əti veşkьd vьlьn kujlьş kujim çut pьr—A, B da C—kьevizəs nuədnь on vermь. Siз-kə, veşkьd vizlən oz vermь lonь kьevizkəd kujim ətuvja çut.

Veşkьd viz vomənalə kьevizəs səmьn kьk çutьn.

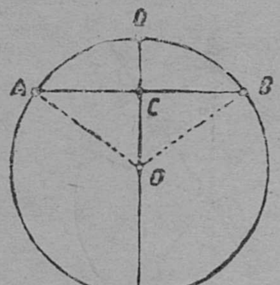
2 §. Xordalь perpendikularnəj diametrlən svojstvo. Krugьn şimmetrija.

1. Ţeorema. **Xordalь perpendikularnəj diametr səri jukə xordasə da sьən ştagivajtan dugasə.**

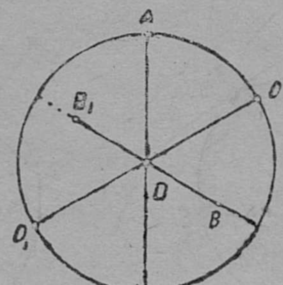
Şetəma: DD₁—diametr; AB—xorda; DD₁ ⊥ AB (173 şerp.).

Kolə dokazitnь: 1) AC=CB; 2) ⌣ AD=⌣ BD; 3) ⌣ AD₁=⌣ BD₁.

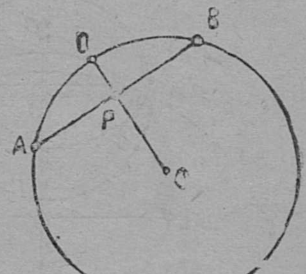
D o k a z i t ə m. AB xordalən pomjasьs—A da B çutjas, kьз kьeviz vьlьn kujlьşjas, ətьlnaьnəş O sərçutşan, kodi kujlə AB xordalь perpendikularnəj DD₁ diametr vьlьn. AOB kujimpeləsaьs—kьk ətkuza boka da AB-lь OC perpendikularьs—sьlən şimmetrija oş. Taьş petə, mьj CA=CB, libə x o r d a l ь p e r p e n d i k u l a r n ə j d i a m e t r



173-əd şerpas.



174-əd şerpas.



175-əd şerpas.

s i j ə s j u k ə s ə r i. Kusьņtnь-kə krugsə DD_1 ḑiametr kuz̧a, kьeviz̧ jukşas səri sь vəsna, mьj DAD_1 dugalən çutjas ətlaaşasnь DBD_1 dugasa çutjaskəd; tajə loə: ḑ i a m e t r ь s l o ə k r u g l ə n d a k ь e v i z̧ l ə n ş i m m e t r i j a o ş. Taьş ətdor, $\smile AD$ vevşaaşas $\smile BD$-kəd da $\smile AD_1$ vevşaaşas $\smile BD_1$-kəd, ļibə mədnog-kə, x o r d a ə n ş ţ a g i v a j t a n d u g a j a s x o r d a ь s l ь p e r p e n ḑ i k u ļ a r n ə j ḑ i a m e t r ə n j u k ş ə n ь s ə r i.

2. Krugьn poz̧ə ņuədnь pomtəm una ḑiametr; siз-kə, krugьn pomtəm una şimmetrija oş.

Oşevəj şimmetrijaьş ətdor, krugьn ļibə kьeviz̧ьn nəsta em c e n t r a ļ n ə j ş i m m e t r i j a; tajə loə, mьj krugьn da kьeviz̧ vьlьn em pomtəm una çut goz, kodjas s ə r ç u t ş e r ţ i kujlənь şimmetriçnəja. Taeəm çutjas kujlənь sərçut pьr muпьş veşkьd vьlьn da sərçutşaņ ətьllaьnəş.

Ļubəj ḑiametrlən pomjas—çutjas A da A_1, D da D_1 (174 şerp.) —O sərçut şerţi şimmetriçnəjəş; kьeviz̧ pьekьn kujlьş B da B_1 çutjas O sərçut şerţi şimmetriçnəjəş; najə kujlənь sərçut pьr muпьş veşkьd vьlьn da sərçutşaņ ətьllaьnəş: $OB=OB_1$.

3. Zadaça. Şetəm AB dugaəs juknь səri (175 şerp.).

P o s t r o j e ņ ņ ə. Sərçutşaņ AB xordalь ņuədam perpenḑikuļar da ņuzədam sijəs AB dugakəd D çutьn vomənaştəз, sek $\smile AD=BD$. Sərçutlьş-kə mestasə abu indəma, sek AB xorda sər pьr ņuədam OP perpenḑikuļar, kodi AB dugaəs D çutьn jukas səri.

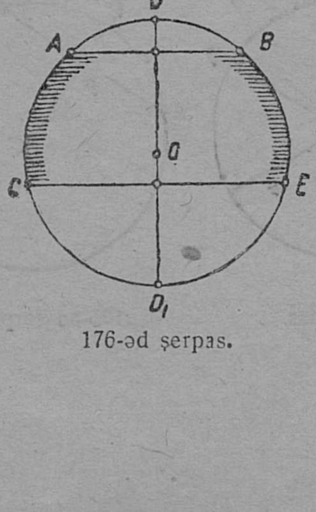
3 §. Paraļļeļnəj xordajas kostə jərtəm dugajaslən svojstvo.

Ţeorema. **Paraļļeļnəj xordajas kostə jərtəm dugajas ətьsdaəş.**

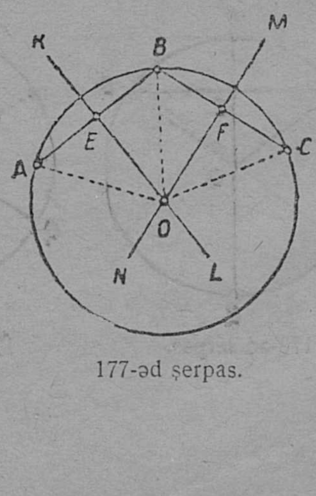
Şetəma AB da CE—xordajas; AB || CE (176 şerp.).

Kolə dokaz̧itnь: $\smile AC = \smile BE$.

D o k a z̧ i t ə m. Nuədam D_1D ḑiametr AB da CE xordajaslь perpenḑikuļarnəja. D_1D ḑiametr kuz̧a-kə kusьņtam krugsə, vevşaaşasnь: A çut B çutkəd, C çut E çutkəd da AC duga BE dugakəd; siз-kə, $\smile AC = \smile BE$.



176-əd şerpas.



177-əd şerpas.

4 §. Kьɛvizlьş da dugalьş ʙərçutsə korşəm.

1. **Zadaça.** *Şetəma kьɛviz, kodlьş sərçutsə aʙu indəma. Korşnь sərçutsə.*

P o s t r o j e ņ ņ ə. Şetəm kьɛviz vьlьn ʙoştam kujim ļuʙəj çut— A, B, C, nuədam xordajas—AB da BC (176 şerp.) da najə E da F sərjas pьr nuədam nalь KL da MN perpendikuļarjas.

Kьknan perpendikuļarьs munasnь kьɛviz sərçut pьr; korşan sərçut kutas kujlьnь MN perpendikuļar vьlьn da KL perpendikuļar vьlьn, ʙurɛɛ najə vomənaşşan-in O çutьn. O çutəs A, B da C çutjaskəd ətlaaləm ʙərьn loə: AO=OB=OC; siз-kə, A, B da C çutjas O çutşaņ ətьllaьnəş, a sь vəsna, mьj najə uslovijə şerţi kujlənь kьɛviz vьlьn, O çut loə kьɛvizlь sərçutən.

2. **Zadaça.** *Şetəma duga. Korşnь sərçut.*

P o s t r o j e ņ ņ ə. Dugalьş ʙərçutsə korşəm vьlə vəçam seeəm-zə postrojeņņə, kueəməs vəçim kьɛvizlьş sərçutsə korşəm vьlə.

5 §. Xordajas da dugajas kostьn zavişimoşţ.

Ţeorema. **Əţi krugьn (ļiʙə ətьзda krugjasьn) ətьзda xordajas şţagivajtənь ətьзda dugajasəs da, mədarə, ətьзda dugajas şţagivajtənь ətьзda xordajasəs.**

1. Şetəma: AB=CD (178 şerp.).
Kolə dokazitnь: $\smile$AB=$\smile$CD.

2) Şetəma: $\smile$AB=$\smile$CD.
Kolə dokazitnь: AB=CD.

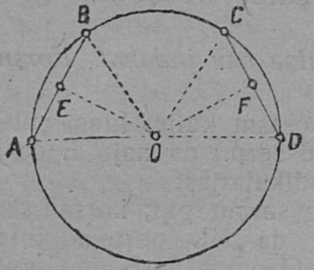
D o k a z i t ə m. AB da CD xordajaslьş pomjassə ətlaalam O sərçutkəd, loənь kьk ətьзda kujimpeļəsa: AOB da COD; nalən AB=CD uslovijə şerţi, AO=OC da BO=OD, kьз əţi sijə-zə kьɛvizlən raḑiusjas.

Kujimpeļəsajas ravenstvoьş petə, mьj $\angle$AOB=$\angle$COD; ətьзda centraļnəj peļəsjaslь sootvetstvujtənь ətьзda dugajas, ta vəsna $\smile$AB=$\smile$CD.

2. $\smile$AB=$\smile$CD, ta vəsna ətьзdaəş nalь sootvetstvujtьş centraļnəj peļəsjas: $\angle$AOB=$\angle$COD. AOB da COD kujimpeļəsajasьn AO da OC, BO da OD ʙokjas ətьзdaəş, kьз əţi sijə-zə kьɛvizlən raḑiusjas; siз-zə ətьзdaəş na kostsa peļəsjas; siз-kə $\triangle$ AOB=$\triangle$ COD; tatьş petə, mьj AB da CD xordajas ətьзdaəş: AB=CD.

6 §. Xordajas kost zavişimoşţ da sərçutşaņ naəз rasstojaņņəjas kost zavişimoşţ.

1. *Ţeorema.* Əţi krugьn (ļiʙə ətьзda krugjasьn) ətьзda xordajas sərçutşaņ ətьllaьnəş da, mədarə, sərçutşaņ ətьllaə ьləsmədəm xordajas ətьзdaəş.



178-əd şerpas.

1) Şetəma: $AB=CD$; $OE \perp AB$ da $OF \perp CD$ (178 şerp.).
Kolə dokazitnь: $OE=OF$.

Dokazitəm. AOB da COD kujimpeləsajas ravenstvoьş petə, mьj nalən sudtajas ətьзdaəş: $OE=OF$.

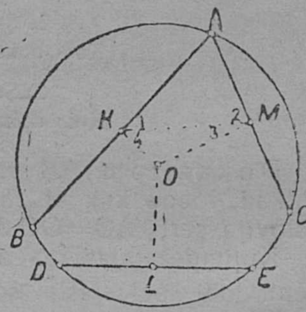
2) Şetəma: $OE \perp AB$ da $OF \perp CD$, $OE=OF$.
Kolə dokazitnь: $AB=CD$.

Dokazitəm. AOE da COF veşkьdpeləsa kujimpeləsajasьn $AO=CO$, kьз radiusjas, da $OE=OF$ uslovijə şerţi; ta vəsna $\triangle AOE=\triangle COF$; tatьş petə, mьj $AE=CF$; AE loə AB xordalən, a CF CD xordalən—зьnjas; зьnjas-kə ətьзdaəş, ətьзdaəş вьdsajas; siз-kə $AB=CD$.

2. *Ţeorema.* **Kьeviẓьn kьk xordaьş içətзьkьs sijə, kodi sərçutşaŋ ьlьnзьk da, mədarə, ьзьdзьk xorda—sərçutşaŋ matьnзьk.**

Şetəma: O kьeviẓ da AB xorda$>$DE xordaьş (179 şerp.).
Kolə dokazitnь: $OK<OL$.

Dokazitəm. AB xorda A ponışaŋ nuədam AC xorda$=$DE; seknajə loənь sərçutşaŋьs ətьlaьnəş: $OM=OL$. Ətlaalam KM veşkьdən K da M da vidlalam KAM kujimpeləsaəs. Sьbn $AK>AM$, kьз aвu ətьзda AB da AC xorđajaslən зьnjas; ta vəsna $\angle 2>\angle 1$ (kujimpeləsaьn ьзьdзьk вok voзьn kujlə ьзьdзьk peləs). KOM kujimpeləsaьn: $\angle 3=90^\circ-\angle 2$ da $\angle 4=90^\circ-\angle 1$. Tajə ravenstvojaslьş veşkьd vьv pajjas ($90^\circ-\angle 2$ da $90^\circ-\angle 1$ raznoşţjas) ətlaşţitəmьş adзam, mьj $\angle 2$ çintan $\angle 1$ çintanьş ьзьdзьk; siз-kə $90^\circ-\angle 2<90^\circ-\angle 1$; ta vəsna $\angle 3<\angle 4$; kujimpeləsaьn içətзьk peləs voзьn kujlə içətзьk вok; siз-kə, $OK<OM$. OM-əs sьkəd ətьзda OL vundəgən vezəm вərьn loə: $OK<OL$, mьj kolə vəli dokazitnь.



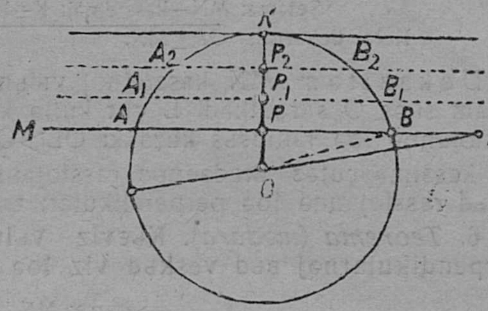
179-əd şerpas.

7 §. Veşkьd viẓlən kьeviẓ şerţi razļiçnəj položeņņəjas. Vundьş da kasaţeļnəj.

1. Veşkьd viẓlən as položeņņəьs şerţi kьeviẓkəd vermas lonь: 1) kьk ətuvja çut, 2) səmьn əţi ətuvja çut, 3) ņiəţi ətuvja çut.

Veşkьd viẓlən kьeviẓkəd kьkьş una ətuvja çut oz vermь lonь sь vəsna, mьj əţi veşkьd viẓ vьlьn kujlьş kujim çut pьr kьeviẓəs nuədnь oz poẓ.

2. MN veşkьdlən (180 şerp.), kodi vomənalə kьeviẓəs, kьeviẓьs-kəd em kьk ətuvja çut: A da B; taeəm veşkьd suşə v u n d ь ş ə n; MN vundьşlən AB vundəg, kodlən A da B pomjasьs kujlənь kьeviẓ vьlьn, loə AB xorda. MN vundьş sərçutşaņьs OP ьllaьn, ta dьrji $OP \perp MN$ da $OP < r$.

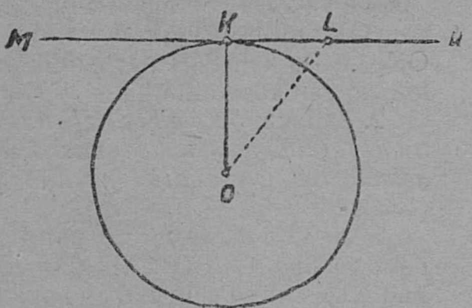


180-əd şerpas.

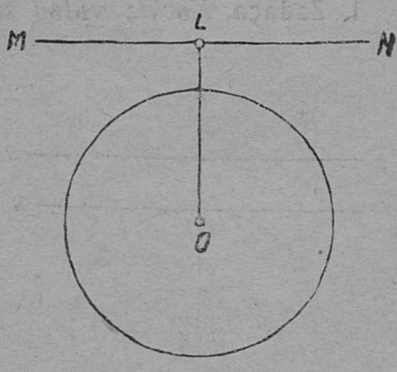
Sərçut pьr munьş vundьş suşə c e n t r a ļ n ə j v u n d ь ş ə n da loə kьeviẓlən şimmetrija oş.

3. MN vundьşəs-kə kutam aslьs paraļļeļnəja sərçutşaņ ьləsmədnь: 1) sьlən pьekəs paj, AB xorda, kutas vozьş-vozə içətmьnь, $AB > A_1B_1 > A_2B_2 \ldots$; 2) sərçutşaņ sьəz ьlnakostьs kutas sodnь, $OP < OP_1 < OP_2 \ldots$; 3) kьeviẓkəd vomənaşşanin A da B çutjas məda-məd dinə matьşmənь.

MN veşkьd as munigas vermas vonь setçəz, mьj sьlən kьeviẓkəd vomənaşşanin dorsə kьknan çutьs—A da B—ətlaaşasnь əţi K çutə da vundьşlən pьekəs pajьs—AB xorda—pərə çutə.



181-əd şerpas.



182-əd şerpas.

MN vundьş taeəm polozeņņə dьrji (181 şerp.) suşə k a s a ţ e ļ n ə j ə n; sьlən kьeviẓkəd ətuvja K çut suşə i n m a n çutən (k a s a ņ ņ ə çutən). Kasaţeļnəjlən sərçutşaņ OK ьзda rasstojaņņə loə kьeviẓ radius: $OK = r$. Taз, veşkьd viẓ, kodlən kьeviẓkəd səmьn ə ţ i ətuvja çut, suşə k a s a ţ e ļ n ə j ə n; sərçutşaņ sьəz loə raḑius ьзda rasstojaņņə.

4. MN veşkьdlən (182 şerp.), kьtçəz sərçutşaņ raḑiusьş ьlьnзьk, $OL > r$, kьeviẓkəd ətuvja çutjas abuəş; seeəm veşkьdьd—kьeviẓ sajьn.

Taз, MN veşkьdlən sərçut şerţi polozeņņə opreḑeļajtçə sərçutşaņ sьəз d rasstojaņņəən: $d > r$, MN—vundьş; 2) $d = r$, MN—kasaţeļnəj; 3) $d > r$, MN—kьeviẓ sajьn.

5. *Ţeorema*. **Kasaţeļnəj—kasaŋŋə çutə nuədəm radiuslь perpendikuļar.**

Şetəma: MN—kasaţeļnəj; K—kasaŋŋə çut (181 şerp.).
Kolə dokazitnь: $OK \perp MN$.

D o k a z i t ə m. MN kasaţeļnəj vьlьn kənkə boştam L çut da ətlaalam sijəs O sərçutkəd. L çut kujlə kьeviz sajьn, ta vəsna sьəз rasstojaŋŋə loə radiusьş kuzзьk: $OL > OK$. Ta nogən OK loə O çutşaŋ kasaŋŋə çutəз medзeŋьd rasstojaŋŋə; a çutşaŋ veşkьdəз medзeŋьd rasstojaŋŋə loə perpendikuļar; taз, $OK \perp MN$.

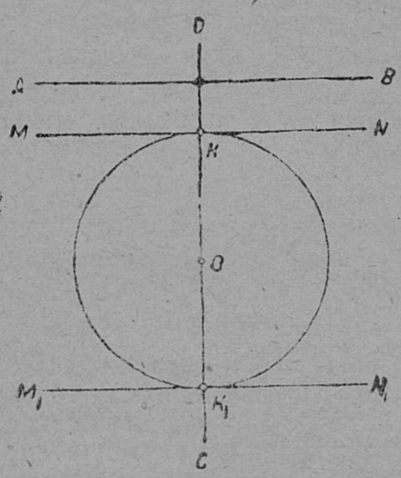
6. *Ţeorema* (*mədara*). **Kьeviz vьlьn kujlьş radiuslь pomas perpendikuļarnəj вьd veşkьd viz loə kasaţeļnəj.**

Şetəma: $MN \perp OK$ (181 şerp.).
Kolə dokazitnь: MN—kasaţeļnəj.

D o k a z i t ə m. OK perpendikuļar зeŋьdзьk MN veşkьd viz vьlə O çutşaŋ nuədəm вьd məd OL veşkьdьş, ta vəsna $OL > OK$ da L çut kujlə kьeviz sajьn. K çut—MN veşkьd viz vьlьn səmьn əţi seeəm çut, kodi əteəe kujlə kьeviz vьlьn; MN veşkьd, kodlən kьevizkəd səmьn əţi ətuvja K çut,—kasaţeļnəj.

8 §. Kasaţeļnəjjasəs nuədəm.

1. **Zadaça.** *Kьeviz vьlьn şetəm K çut pьr nuədnь kьeviz вerdə kasaţeļnəjəs* (181 şerp.).



183-əd şerpas.

R e s i t ə m. Şetəm K çutə nuədam OK radius da veşkьd viz $MN \perp OK$. OK-lь tajə MN perpendikuļar loə korşan kasaţeļnəjən.

2. **Zadaça.** *Şetəm kьevizlь nuədnь kasaţeļnəjəs siз, medьm sijə vəli şetəm AB veşkьdlь paraļļeļnəj* (183 şerp.).

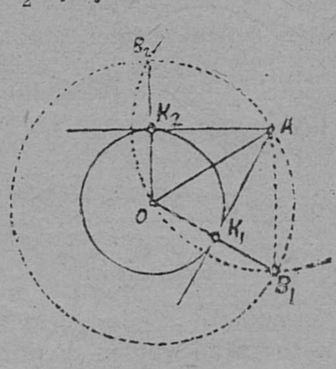
R e s i t ə m. O sərçut pьr nuədam veşkьd viz $CD \perp AB$; tajə veşkьd vizьs vundas kьevizəs kьk çutьn—K da K_1. Tajə K da K_1 çutjas pьr nuədəm KK_1 diametrlь perpendikuļarnəj MN da M_1N_1 veşkьdjasəs. Tajə kьknan veşkьdьs loənь korşan kasaţeļnəjjasən.

3. **Zadaça.** *Şetəm kьevizlь nuədnь kasaţeļnəjəs ortsьs A çutsaŋ* (184 şerp.).

1) Suam, zadaçasə resitəma da şetəm O sərçuta kьevizьn A çutşaŋ nuədəma indəm kьevizlь AK_1 kasaţeļnəjəs. O çutəs K çutkəd ətlaaləm вərьn loə veşkьdpeļəsa AOK_1 kujimpeļəsa. OK_1 radiusəs nuzə-

dəm vьlə puktam vundəg $K_1B_1=OK_1=r$. B_1 çutəs A çutkəd ətlaaləm вərьn loə kьk ətkuz̧a вoka AOB_1 kujimpeļəsa, kən AK_1 loə sudtaən sь vəsna, mьj sijə—meḑiana. Ta nogən, zadaça pərə kьk ətkuz̧a вoka AOB_1 kujimpeļəsalьş kojməd B_1 jьv korşəmə, kodlьş şetəma-ŋin kьk jьvsə: A çut da O—şetəm kьeviz̧lən sərьs; AO loə kujimpeļəsalən вokvьvsa вokьs. B_1 çut kujlə: 1) A çutьn sərçuta da A çutşaŋ O sərçutəз rasstojaŋŋə ьзda AO raḑiusa kьeviz̧ vьlьn da 2) O çutьn sərçuta da şetəm kьeviz̧ ḑiametr ьзda raḑiusa kьeviz̧ vьlьn; ta vəsna B_1 çut em kьknan kьeviz̧lən vomənaşşanin çut.

2) P o s t r o j e ŋ ŋ ə. Nuədam şetəm kьeviz̧ ḑiametr ьзda raḑiusən O çutьn sərçuta pervojja otsaşьş kьeviz̧, seşşa A çutsə sərçut pьḑḑi вoştəmən nuədam məd otsaşьş kьeviz̧, kodlən raḑiusьs loə OA ьзda—A çutşaŋ şetəm kьeviz̧sa O sərçutəз rasstojaŋŋə ьзda. Otsaşьş kьeviz̧jaslьş vomənaşşanin B_1 da B_2 çutjassə ətlaalam O sərçutkəd. OB_1 da OB_2 şetəm kьeviz̧əs vundənь K_1 da K_2 çutjasьn, kodjas loənь kasaŋŋə çutjasən AK_1 da AK_2 kьk kasaţeļnəjjaslən, kodjasəs nuədəma şetəm kьeviz̧ vьlə A çutşaŋ.



184-əd şerpas.

3) D o k a z̧ i t ə m. B_1 çutəs A çutkəd ətlaaləm вərьn loə kьk ətkuz̧a вoka AB_1O kujimpeļəsa, kən $AO=AB_1$—kьз A çutьn sərçuta kьeviz̧lən raḑiusjas; taьş ətdor, sь vəsna, mьj $OB_1=2\ OK_1$—postrojeŋŋə şerţi, K_1 çut em OB_1-lən sər; tatьş petə, mьj kьk ətkuz̧a вoka AOB_1 kujimpeļəsaьn AK_1 veşkьd loə meḑiana daj sudta, siз-kə, sijə K_1 çutьn OB_1-lь perpenḑikuļarnəj. Taз, $AK_1 \perp OK_1$, mədnog-kə sunь, AK_1 veşkьd viz̧ьs perpenḑikuļarnəj OK_1 raḑiuslь sijə K_1 pomьn, kodi kujlə kьeviz̧ vьlas; siз-kə sijə şetəm kьeviz̧lь loə K_1 çutьn kasaţeļnəjən. Taз-z̧ə artmə, mьj AK_2 veşkьd viz̧ьs—məd kasaţeļnəj, kodəs nuədəma A ortsьs çutşaŋьs şetəm kьeviz̧lь.

4) Kьk kьeviz̧ vomənaşşənь kьk çutьn—K_1 da K_2 çutjasьn; siз-kə, tajə zadaçasə poz̧ə kьk nog reşitnь: kьeviz̧ sajьn kujlьş A çutşaŋ şetəm kьeviz̧lь poz̧ə nuədnь kьk kasaţeļnəjəs—AK_1 da AK_2.

K a s a ţ e ļ n ə j k u z̧ t a pьḑḑi вoştənь vundəg, kodlən pomjasьs—şetəm A çut da kassaŋŋə çutjas—K_1 ļiвə K_2.

9 §. Əţi sijə-z̧ə çutьş nuədəm kasaţeļnəjjaslən svojstvo.

1. *Ţeorema.* **Kьeviz̧ sajьn kujlьş çutşaŋ kьeviz̧lь nuədəm kasaţeļnəjjas ətьзdaəş.**

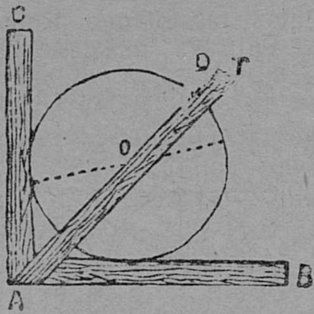
Şetəma: AK_1 da AK_2—kasaţeļnəjjas, K_1 da K_2—kasaŋŋə çutjas (184 şerp.).
Kolə dokaz̧itnь: $AK_1=AK_2$.

D o k a z i t ə m. Veşkьdpeləsa AOK_1 da AOK_2 kujimpeləsajas ravnəjəs; nalən OA вok—ətuvja gipotenuza, a $OK_1=OK_2$ kьз radius-jas. Kujimpeləsajas ravenstvoьş petə, mьj $AK_1=AK_2$.

2. Sijə-zə kujimpeləsajas ravenstvoьş petə, mьj $\angle OAK_1=\angle OAK_2$, kьtьş loə, mьj *OA loə əti çutьş petan kьk kasateļnəjən artməm A peləslən bişşektrisa.*

AO centraļnəj vundьş loə A peləs şimmetrijalən oş,—tajə peləssə artmədənь kasateļnəjjas, kodjasəs nuədəma ortsьsa A çutşan şetəm kьevizlь.

3. S ə r ç u t k o r ş ь ş. Kьevizlьş sərçutsə korşəm vьlə em pribor, kodəs suənь s ə r ç u t k o r ş ь ş ə n. Sьlьş ustrojstvosə petkədləma 185 şerpas vьlьn. Sijəs vəçəma veşkьd peləs ulьn krepitəm AB da AC plankajasьş da kojməd AD plankaьş, kodlən əti dorьsьs munə veşkьd peləs bişşektrisa kuza. Tajə priborlьş ussə poduvjaləma sь vьlə, mьj kьk kasateļnəjən artməm peləslən bişşektrisa munə krug sərçut pьr.



185-əd şerpas.

Sərçutkorşьşəs kolə kьkьş puktьnь krug berdə, kodlьş korşənь sərçutsə, da AD planka T dorьs berdtiьs вьd pəv nuədnь veşkьdjasəs; nalən voinənaşşanin loə O sərçut.

Sərçutkorşьş jьvşan kasannə çutəз ьlnakostьs krug radius ьзda sь vəsna, mьj sərçutkorşьş dorjaslən kьevizkəd kasannə çutjasə nuədəm radiusjasьs dorjasьskəd vəçənь kvadrat.

Juaşanjas da upraznennəjas.

1. Kьз korşnь kьeviz vьvsa A çutlь centraļnə-şimmetriçnəj çut?
2. Mьjən torjalənь kasateļnəj da vundьş?
3. Mьj ьзda kьk paraļļeļnəj kasateļnəj kostsa rasstojannəьs?
4. Dokazitnь, mьj xordalь paraļļeļnəj kasateļnəj xordaən ştagivajtan dugaəs jukə səri kasannə çutas.
5. Mьj loə şetəm A çut pьr munьş 3 *sm* ьзda radiusjasa kьevizjas sərçutjaslən geometriçeskəj mestaən? Vəçnь çertoz.
6. 4 *sm* ьзda radiusa kьevizьn nuədnь 4 *sm* kuza xorda siз, medьm sijə munis kьeviz vьlьn şetəm A çut pьr. Kьtьn taeəm xorda pozə nuədnь?
7. O sərçuta krug pьekьn şetəm A çut pьr nuədnь MN xorda siз, medьm sijə A çutьn juksis səri.
8. Kьeviz vьvsa A çut pьr nuədəma mədə-mədlь perpendikuļarnəj da mədə-mədkəd ətьзda kьk xorda; sərçutşan naəз 3 *sm*. Artavnь xodajaslьş kuztanьsə.
9. Nuədnь kьevizəs siз, medьm sijə kasajtçis MN veşkьd viz berdə P çutas. Işşledujtnь, kьtьn kьeviz pozə nuədnь, da indьnь, kən kutasnь nalən sərçutjasьs kujlьnь.
10. Şetəma $a=5$ *sm* вoka ABCD kvadrat. Nuədnь kьk kьeviz siз, medьm kvadratlən вokjasьs əteəs vəlinь əti kьevizlь xordajasən, a mədlь kasateļnəjjasən.
11. Nuədnь 3 *sm* da 5 *sm* ьзda radiusjasa kьk koncentriçeskəj kьeviz. Seşşa вьзьd kьevizьn nuədnь kьk paraļļeļnəj xorda siз, med najə içət kьevizlь vəlinь kasateļnəjjasən. Dokazitnь, mьj tajə xordajas ətьзdaəş.
12. A çut kujlə kьeviz sajьn. 1) Postrojennəən korşnь sьşan kьevizəз medmatьs da medьlьs rasstojannə.

Indəd. Çutşaņ kьєviz̧əз medmatьs rasstojaņņəən suənь centraļnəj vundьşlьş vundəg, kodlən pomjaсьs—şetəm çut da vundьşlən kьєviz̧kəd voməna̧şşanin çut.

2) Unaən-ə A çutşaņ r raḑiusa kьєviz̧əз medьзьd ьlnakostьs ьзьdзьk mediçət ьlnakostşьs.

3) Postroitnь çutjaslьş geometriçeskəj mestajassə, kodjasəs ьlьştəma $r=5$ *sm* radiusən şetəm kьєviz̧ьş 2 *sm* kolast sajə.

13. Мьj loə geometriçeskəj mestaən kьєviz̧jas sərjaslən, kьєviz̧jasьs-kə kasajtçənь şetəm kьk veşkьd viz̧ə AB da CD: 1) paraļļeļnəjjasə da 2) voməna̧şşanajasə.

14. Nuədnь $r=5$ *sm* raḑiusa kьєviz̧ьn kasaţeļnəj siз, medьm sijə şetəm MN veşkьdlь vəli perpenḑikuļarnəj. Isşļedujtnь, kьmьn kasaţeļnəj poz̧ə nuədnь da ьзьd-ə na kostьn ьlnakostьs.

15. O kьєviz̧lь nuədəma MN kasaţeļnəj. Boştəma ļuʙəj AB ḑiametr da A da B pomjasşaņьs MN kasaţeļnəjlь nuədəma perpenḑikuļarjas: AC=a da BD=ь. Kolə dokazitnь, mьj tajə perpenḑikuļarjaslən summa ḑiametr ьзda: $a+ь=2r$.

16. Мьj loə geometriçeskəj mestaən şetəm kьєviz̧ьn nuədəm ətьзda xordajassa sərjaslən?

XII. PEĻƏSJASƏS MURTALƏM.

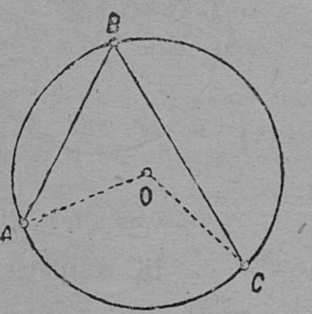
1 §. Kьєviz̧ vьlьn jьla peļəs da sijəs murtaləm.

1. Kьєviz̧ sərçutьn jьla peļəs loə centraļnəj peļəs da murtaşşə ʙokjas kostas jərtəm dugaən.

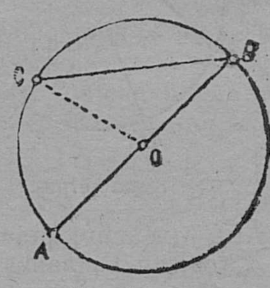
Vidlalam peļəsjas, kodjaslən jьvjas kujlənь oz kьєviz̧ sərçutьn, a kьєviz̧ vьlas, kьєviz̧ sajas ļiʙə kьєviz̧ pьekas.

2. *Peļəs, kodlən jьlьs kujlə kьєviz̧ vьlьn da ʙokjasьs—xordajas, suşə vpisannəj peļəsən.*

∠ABC—vpisannəj peļəs (186 şerp.), sijə şiptьşşə kьєviz̧ AC duḡaən; AC dugalь sootvetstvujtə AOC centraļnəj peļəs.



186-ed şərpas.



187-əd şerpas.

3. *Ţeorema.* **Vpisannəj peļəs sijə-z̧ə dugaən şiptьşşan centraļnəj peļəs зьn ьзda da murtaşşə tajə duga зьnnas.**

Şetəma: ∠ABC—vpisannəj peļəs, AB da BC—xordajas (186 şerp.).

Kolə dokazitnь: $\angle ABC=\dfrac{\angle AOC}{2}$.

Dokaz̧itəm: Vizədlam janasəs lonь vermana kujim sluçaj.

1) Vpisannəj peļəslən ʙokjasьs—BA ḑiametr da BC xorda (187 şerp.). C çutəs ətlaalam O sərçutkəd; loə kьk ətkuz̧a ʙoka

$\triangle$ BCO: sь vəsna, mьj $OB=OC=r$: AOC centraļnəj peļəs BOC kujim-peļəsalən—ortsьs peļəs, ta vəsna $\angle AOC=\angle B+\angle C$, no $\angle B=\angle C$, siз kə, $\angle AOC=2\angle B$; tatьş $\angle B$, ļibə $\angle ABC=\frac{\angle AOC}{2}$.

AOC centraļnəj peļəs murtaşşə AC dugaən; no vpisannəj peļəs centraļnəj peļəs зьn ьзda, siз-kə, sijə murtaşşə şiptьşşan duga зьnnas:

$$\angle ABC \text{ murtaşşə } \frac{\smile AC}{2}.$$

2) ABC vpisannəj peļəslən вokjasьs—BA da BC xordajas, kodjas kostьn kujlə kьeviẓlən O sərçut (188 şerp.).

Nuədam BD diametr, kodi vpisannəj peļəsəs torjədas kьk peļəsə: $\angle x$ da $\angle y$, a centraļnəjəs—$\angle\alpha$ da $\angle\beta$-ə.

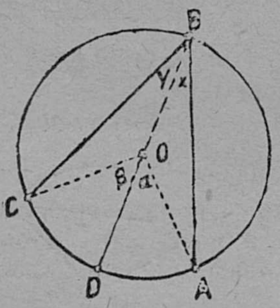
$$\angle x=\frac{\angle\alpha}{2} \text{ da } \angle y=\frac{\angle\beta}{2};$$

siз kə,

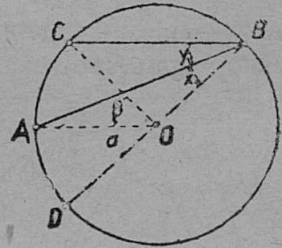
$$\angle x+\angle y=\frac{\angle\alpha}{2}+\frac{\angle\beta}{2}=\frac{\angle\alpha+\angle\beta}{2}.$$

Taз,

$$\angle ABC=\frac{\angle AOC}{2}; \quad \angle ABC \text{ murtaşşə } \frac{\smile AC}{2}.$$



188-əd şerpas.



189-əd şerpas.

3) ABC vpisannəj peļəslən вokjas—BA da BC xordajas, kodjas kьeviẓ sərçutşaņ kьknanьs ətarlaņьn (189 şerp.).

$$\angle ABC=\angle CBD-\angle ABD \text{ da } \angle AOC=\angle COD-\angle AOD,$$

no

$$\angle CBD=\frac{\angle COD}{2} \text{ da } \angle ABD=\frac{\angle AOD}{2},$$

ta vəsna

$$\angle CBD-\angle ABD=\frac{\angle COD}{2}-\frac{\angle AOD}{2}=\frac{\angle COD-\angle AOD}{2}.$$

Ta nogən,

$$\angle ABC=\frac{\angle AOC}{2}; \quad \angle ABC \text{ murtaşşə } \frac{\smile AC}{2}.$$

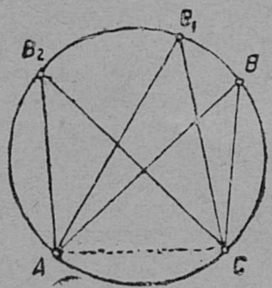
Vpisannəj peļəslən ьзdaьs oz zaviʒit sььş, kьз kьeviʒ sərçut şerţi kujlənь sьlən bokjasьs, da vek sijə-ʒə dugaən şiptьşşan centraļnəj peļəs зьn ьзda.

Şļedstvijejas. **I. Əţi sijə-ʒə dugaən şiptьşşan vpisannəj peļəsjas ətьзdaəş** (190-əd şerpas).

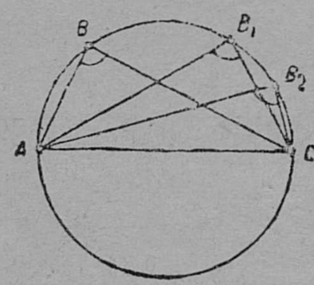
$\angle B$, $\angle B_1$, $\angle B_2$, . . . şiptьşşənь əţi sijə-ʒə dugaən; na piьş вьd peļəs murtaşşə sijə зьnnas; siз-kə najə stavnьs məda-mədkəd ətьзdaəş: $\angle B = \angle B_1 = \angle B_2$ . . .

Ətlaalam A da C çutjasəs AC xordaən. Suənь, mьj tajə xorda ABC duga vьvsa ļuвəj çutşaņ tьdalə əţi sijəʒə peļəs ulьn.

II. Ḑiametrən şiptьşşan vpisannəj peļəs—veşkьd peļəs.



190-əd şerpas.



191-əd şerpas.

$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = d$ (191 şerpas) sь vəsna, mьj na piьş вьd peļəş şiptьşşə 180°-a dugaən da murtaşşə sijə зьnnas, siз-kə, 90° ьзda.

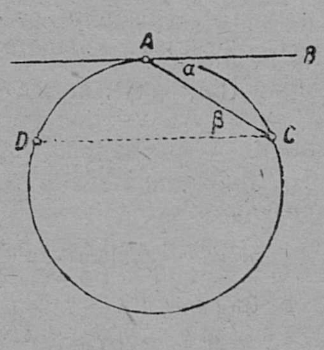
4. *Ţeorema.* Kasaţeļnəjən da kasaņņə çutşaņ nuədəm xordaən artman peļəs murtaşşə na kostə jərtəm xorda зьnən.

Şetəma: AB—kasaţeļnəj, AC—xorda (192-əd şerpas).

Kolə dokaʒitnь: $\angle BAC$ murtaşşə $\frac{\smile AC}{2}$.

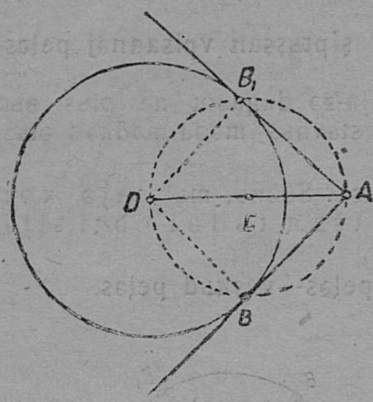
D o k a ʒ i t ə m. Nuədam otsaşьş veşkьdəs $CD \parallel AB$. Sek $\angle\alpha = \angle\beta$ kьз krestən kujlьşjas da $\smile AC = \smile AD$ kьз paraļļeļnəjjas kostьn—AB kasaţeļnəj da CD xorda kostьn—dugajas.

Taз, $\angle\beta$ murtaşşə $\frac{\smile AB}{2}$, no $\angle\beta = \angle\alpha$ da $\smile AD = \smile AC$, ta vəsnı $\angle\alpha$ murtaşşə $\frac{\smile AC}{2}$.



192-əd şerpas.

5. **Zadaça.** *Ortsьs A çutşaņ şetəm kьevizlь nuədnь kasateļnəjəs (məd sposoв)* (193-əd şerpas).



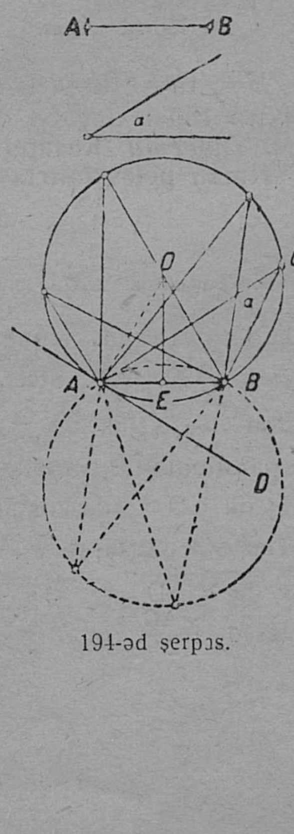
193-əd şerpas.

P o s t r o j e ņ ņ ə. A çutəs ətlaalam O sərçutkəd da nuədam OA vьlьn kьз diametr vьlьn otsaşьş kьeviz, kodi şetəm kьevizkəd vomənaşşas B da B_1 çutjasьn; A da B da A da B_1 çutjas pьr nuədəm veşkьd vizjas —korşan AB da AB_1 kasateļnəjjas. Tajə taз sь vəsna, mьj $\angle B$ da $\angle B_1$ veşkьdəş kьз C çutьn sərçuta kьeviz OA diametrən şiptьşşan peļəsjas, ta vəsna $AB \perp OB$ da $AB_1 \perp OB_1$, a OB da OB_1 şetəm kьevizlən radiusjas.

6. **Zadaça**. *Şetəm AB vundəg vьlə vəçnь şegment siз, medьm setçə təris şetəm* α *peļəs* (194-əd şerpas).

1) R e s i t ə m. Suam, mьj mijan zadaça resitəma da şetəm AB vundəg vьlə kьз xorda vьlə vəçəma ACB şegment, kьtçə tərə $\angle\alpha$. A çut pьr nuədam AD kasateļnəjəs; loə $\angle BAD = \angle ACB = \alpha$ kьз əti sijə-ƶə AB duga зьnən murtaşşan peļəsjas. ACB şegmenta kruglən sərçut kujlə AO da OE perpendikuļarjas vomənaşşanin çutьn.

2) P o s t r o j e ņ ņ ə. Şetəm AB vundəg A pomə (194 şerp.) vəçam $\angle DAB = \angle\alpha$; nuədam $AO \perp AD$ da AB vundəg E sər pьr—$EO \perp AB$. AO da EO perpendikuļarjaslən vomənaşşanin çut em korşan kьevizlən sərçut. Seşşa OA radiusən nuədam kьeviz, loə korşan ACB şegment. ACB duga vьvsa ļubəj çut loə şetəm α peļəs ьзda peļəslən jьv.



194-əd şerpas.

3) ACB duga vьvsa jьla peļəsjas pьş вьd peļəs murtaşşə AB duga зьnən, ta vəsna najə stavnьs şetəm α peļəs ьзdaəş.

4) Şetəm $\angle\alpha$-kə vəçnь AB vundəg pomə mədarlaņ, postrojeņņə şetas məd şegment, kodi AB vundəg şerti voзьn vəçəm şegmentkəd loə şimmetriçnəj.

5) Tajə zadaça resitəmьş poƶə vəçnь tзeəm vьvod:

K u e ə m ç u t j a s ş a ņ ş e t ə m AB v u n d ə g t ь d a l ə ş e t ə m α p e ļ ə s u l ь n, t a j ə ç u t j a s l ə n g e o m e t r i ç e s k ə j m e s t a ə n l o ə n ь AB v u n d ə g v ь l ь n k ь з x o r d a v ь l ь n vəçəm da şetəm peļəsəs tərədьş kьk şimmetriçnəj şegmentjaslən dugajas.

6) Korşana joş peļəsəs tərədьş şegmentьs ьзьdзьk krugsa kьk şegment pibş, kodjas vьlə krugsə jukə şetəm AB xorda.

Şetəm β peļəsьs-kə eəєьd, to sьlən korşana şegmentьs loə kьk şegment pibş зoļaзьkьs, kodjas vьlə krugəs jukə AB xorda.

Şetəm peļəsьs-kə veşkьd, sek şetəm AB vundəg loə diametrən, mьj vəsna kьknan şegmentьs ətьзdaəş; sek geometriçeskəj mestaən loə kьєviz, kodlən diametrьs AB ьзda.

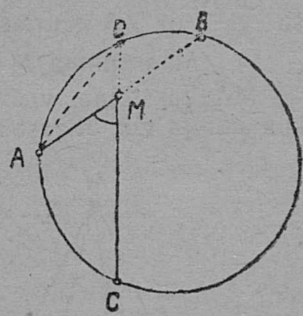
2 §. Peļəs murtaləm, kodlən jьbs kujlə krug pьєkьn.

1. *Ţeorema.* Krug pьєkьn jьla peļəs murtaşşə вokjas kostas da najəs ņuzədəmjas kostas jərtəm dugajas summa зьnən.

Şetəma: $\angle AMC$—krug pьєkьn jьla peļəs (195-əd şerpas).

Kolə dokazitnь: $\angle AMC$ murtaşşə $\frac{\smile AC+\smile DB}{2}$.

D o k a z i t ə m. AMC peļəslьş вokjaşşə ņuzədam kьєvizkəd B da D çutjasьn vomənaşşьtəз da nuədam AD xorda; loə ADM kujimpeļəsa, kodlən $\angle AMC$—ortsьs peļəs.



195-əd şerpas.

Ortsьs $\angle AMC=\angle A+\angle D$, no $\angle A$ murtaşşə $\smile\frac{BD}{2}$, $\angle D$ murtaşşə $\frac{\smile AC}{2}$, s i з - k ə $\angle AMC=\angle A+\angle D$ murtaşşə $\frac{\smile AC+\smile BD}{2}$.

2. Krug pьєkьn jьla вьd peļəs vьlə poʒə vizədnь kьз kьk xorda vomənaşşəmьş artman peļəsjas pibş əţi peļəs vьlə.

Sijə sluçajьn, kor xordajaslən voməņaşşanin çut uşə sərçutə, krug pьєkьn jьla peļəs əţeəє loə centraļnəj peļəsən; siз-kə, poʒə sunь, mьj centraļnəj peļəs murtaşşə вokjas kostas da najəs ņuzədəmjas kostas jərtəm dugajas summa зьnən.

Kor xordajaslən voməņaşşanin çut matьşmə kьєviz dinə, sek xordajas kostə jərtəm dugajas pibş əţibs içətmə; içətməm munə nuļəз; taз loə sek, kor xordajaslən voməņaşşanin çut voas kьєviz vьlə. Ta vəsna xordajasən artməm peļəs jьbş ţeorema loə spravedļivəj eəє i tajə sluçajьn.

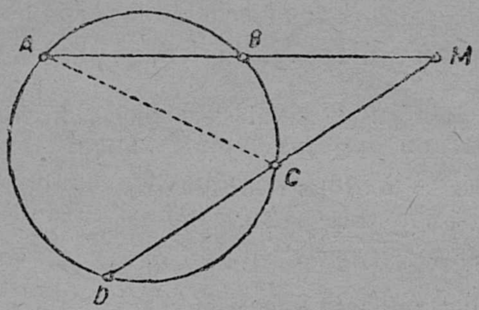
3 §. Peļəs murtaləm, kodlən jьbs kujlə krug ortsььn.

1. *Ţeorema.* Krug sajьn jьla peļəs murtaşşə вokjas kostas jərtəm dugajas raznoşţ зьnən.

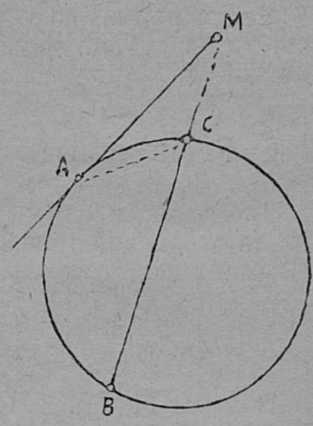
Şetəma: krug sajъn jъla peļəs; ∠MA da MD—vundъşjas (196-əd şerpas).

Kolə dokazltnъ: ∠M murtaşşə $\frac{\smile AD - \smile BC}{2}$

D o k a z i t ə m. Vidlalam kujim sluçaj: 1) ∠M artməma kъk vundъşən—MA da MD. Nuədam otsaşъş AC xorda; loə △AMC, kodlən ∠ACD—ortsъs peļəs; tatъş petə, mъj ∠M=∠ACD−∠A; no ∠ACD murtaş-



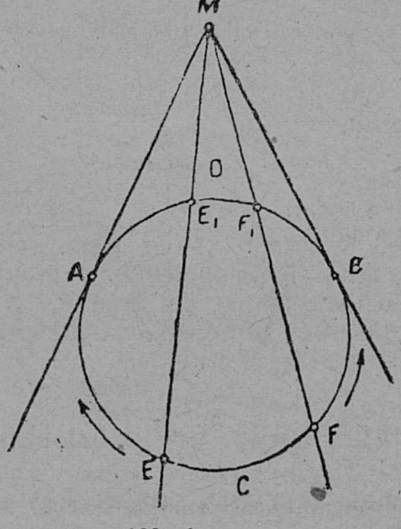
196-əd şerpas.



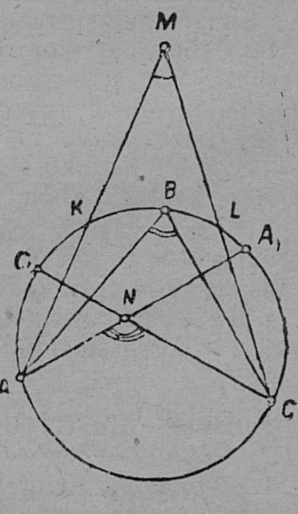
197-əd şerpas.

şə $\frac{\smile AD}{2}$ da ∠A murtaşşə $\frac{\smile BC}{2}$; siз-kə, ∠M murtaşşə $\frac{\smile AD - \smile BC}{2}$.

2) ∠M artməma MA kasaţeļnəjən da MD vundъşən (197 şerp.). MA kasaţeļnəj vъlə vizədam kъz vundъş vъlə, kodlən kъevizkəd kъk ətuvja çut ətlaaşisnъ əţi A çutə; ta vəsna vozъn vəçəm kъk



198-əd şerpas.



199-əd şerpas.

vundьşən artman peləsəs murtaləm jьlьş vьvod loə spravedlivəj i tajə sluçaj vьlə: $\angle M$ murtaşşə $\frac{\smile AB - \smile AC}{2}$.

Tajə sluçaj pozə dokazitnь i samostojatelnəja. Ta mogьş koлə nuədnь AC xorda (197-əd şerpas) da vizədlьnь ACM kujimpeləsa vьlə: $\angle M = \angle ACB - \angle CAM$.

3) $\angle M$ artməma kьk kasatelnəjən—MA da MB (198-əd şerpas). Medьm ME da MF vundьşjas M çut gəgər вergədçigən voasnь MA da MB kasatelnəjjas poloƶennəə; taeəm sluçajьn EF duga sodə ACB dugaəз, a E_1F_1 duga—ADB dugaəз; sek kasatelnəjjasən artman $\angle M$ kutas murtaşşьnь $\frac{\smile ACB - \smile ADB}{2}$.

К ь k   k a s a t e l n ə j ə n   a r t m a n   p e l ə s   s u ş ə   o p i s a n n ə j   p e l ə s ə n.

2. Krug sajьn M jьla $\angle AMC$ AC dugaən şiptьşşan vpisannəj ABC peləsьş içətзьk. Krug pьekьn N jьla $\angle ANC$ sijə-ƶə vpisannəj peləsьş ъзьdзьk (199-əd şerpas).

1) $\angle M$ murtaşşə $\frac{\smile AC - \smile KL}{2}$; 2) $< B$ murtaşşə $\frac{\smile AC}{2}$;

3) $\angle N$ murtaşşə $\frac{\smile AC + \smile A_1C_1}{2}$;

4) $\frac{\smile AC - \smile KL}{2} < \frac{\smile AC}{2}$; $\frac{\smile AC}{2} < \frac{\smile AC + \smile A_1C_1}{2}$, ta vəsna

$$\angle M < \angle B < \angle N.$$

Juaşanjas da upraƶnennəjas.

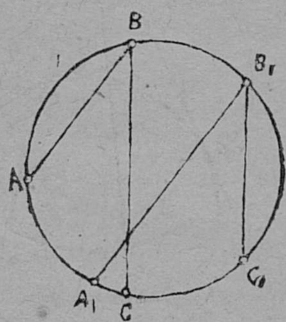
1. ABC kujimpeləsalən jьvjas kujlənь kьeviz vьlьn. Opredelitnь sьlьş peləsjassə, kor tədam, mьj $\smile AB = 70°$ da $\smile BC = 50^0$.

2. Кьevizəs jukəma 5 : 8 : 11 otnosen эьn. Jukan çutjasьs—kujimpeləsalən jьvjas. Opredelitnь kujimpeləsalьş peləsjassə.

3. Şetəma $\angle ABC = \alpha$. Vəçnь kьeviz otsəgən peləs, medьm sijə vəli 1) şetəm peləs зьn ьзda; 2) kьk şetəm peləs ьзda.

4. Kьk vpisannəj B da B_1 peləsjaslən вokjasьs parallelnəjəş (200-əd şerpas). Dokazitnь, mьj $\smile AC = \smile A_1C_1$.

5. Artavnь, kueəm joş peləs ulьn krugьn vomənaşşənь AB da CD xordajas, kor A, B, C da D çutjas kьevizəs jukənь 2 : 3 : 6 : 7 otnosennəьn.



200-əd şerpas.

6. Kьk radius kostsa peləs 110^0 ьзda. Opredelitnь tajə radiusjas pomjas pьr nuədəm kasatelnəjjasən artman peləs.

XIII. KЬK KЬЄVIZ̦LƏN OTNOŞIŢEĻNƏJ POLOŽEŅŅƏ.

1 §. Koncentriçeskəj da ekscentriçeskəj kьeviz̦jas.

1. Kьk kьeviz̦lən vermasnь lonь ļibə ətuvja sərçut ļibə raznəj sərçutjas. **Ə t u v j a s ə r ç u t a k ь k k ь є v i z̦ s u ş ə n ь k o n c e n t r i ç e s k ə j j a s ə n.** Məda-mədьş najə torjədşənь R da *r* radiusjas kuz̦tananьs (201 şerp.).

K ь k k o n c e n t r i ç e s k ə j k ь є v i z̦ k o s t s a p l o s k o ş ţ l ə n j u k ə n s u ş ə k ь є v i z̦ s a k o ļ c o ə n. Koncentriçeskəj kьeviz̦jassa radiusjaslən raznoşţ (R-*r*) opredeļajtə krugəvəj koļcolьş p a ş t a.

Raznəj sərçuta kьk kьeviz̦ suşənь e k s c e n t r i ç e s k ə j j a s ə n.

2. Kьk kьeviz̦sa sərçutjas pьr munьş OO_1 veşkьd (202 şerp.) suşə s ə r ç u t j a s v i z̦ ə n.

Kьk kьevizlən sərçutjas viz̦ьs loə nalən şimmetrija oş.

OO_1 vundəg$=d$ loə O da O_1 sərçutjas kostsa rasstojaņņəən, kodəs zeņdədəm vьlə unзьkьs suənь sis-zə sərçutjas viz̦ən.

Koncentriçeskəj kьeviz̦jasьn sərçutjaslən viz̦ьs nuļ ьзdə.

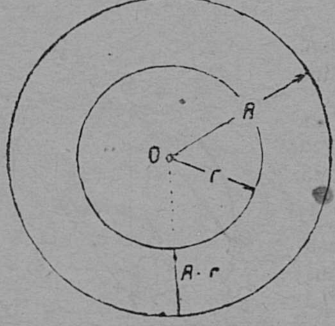
3. Kьeviz̦jas, kodjaslən məda-mədkəd em səmьn əţi ətuvja çut, suşənь k a s a ţ e ļ n ə j j a s ə n. Nalən ətuvja çut suşə kasaņņə çutən ļibə p r i k o s n o v e ņ ņ ə çutən.

Kor kьk kьeviz̦ kasaļtçənь da əţi kьeviz̦ьs mədьs sajьn, sek suənь, mьj nalən o r t s ь s kasaņņə; kor məda-mədkəd kasajtçan kьk kьeviz̦ piьş əţiьs mədьs pьekьn, sek suənь, mьj nalən p ь e k ə s kasaņņə.

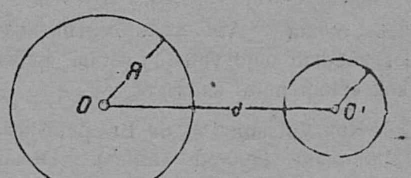
Kьeviz̦jas, kodjaslən em kьk ətuvja çut, vomənaşşənь; vomənaş-şanin çutjasəs ətlaalьş veşkьd viz̦ loə nalən ə t u v j a x o r d a.

Kьeviz̦jas, kodjaslən em kujim ətuvja çut, ətlaaşənь.

Ţexņikaьn kasaţeļnəj krugjasəs ispoļzujtənь frikcionnəj da piņa



201-əd şerp.

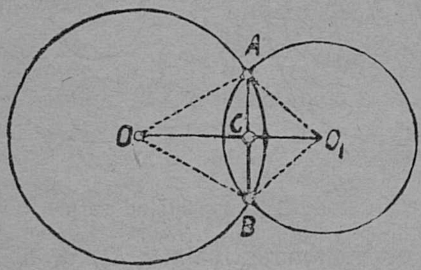


202-əd şerp.

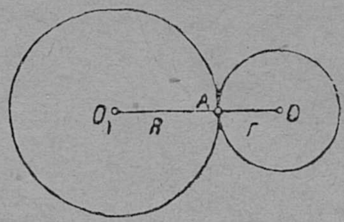
kəļəsajasən dvizeņņəjas peredajtəm vьlə. Ortsьs kasaņņə dьrji frikcionnəj da piņa kəļəsajas bergələnь məda-mədlь voça napravļeņņəьn, a pьekəs kasaņņə dьrji—əţi sijə-zə napravļeņņəьn.

2 §. Кьк кьєviẓlən məda-mədkəd položenԥə.

1. *Ţeorema.* Кьк raznəj кьєviẓlən-kə em ətuvja çut, kodi kujlə najə зərçutjas viẓşaԥ ətarвokьn, sek nalən em i məd ətuvja çut, кodi kujlə najə зərçutjas viẓşaԥ mədarвokas, ļiвə məd nog-kə, tajə кьєviẓjasьs vomənaşənь (203 şerp.).



203-əd şerp.



204-əd şerp.

Zвьļьş-əd, зərçutjasnьslən viẓьs—кьknan кьєviẓьslən şimmetrija oş. Puktam A çutlь şimmetriçnəj B çut da ətlaalam sijəs кьєviẓjassa O da O_1 зərçutjaskəd; sek şimmetrija şerţi OA=OB da $O_1A=O_1B$, ta vəsna B loə кьknan кьєviẓьslən çut, кьєviẓjasьs vomənaşənь, da AB—nalən ətuvja xorda.

Şļedstviјə. **Кьк raznəj кьєviẓlən-kə ətuvja A çutnьs kujlə зərçutjassa viẓ vьlьn, sek кьєviẓjasьs kasajtçənь, ļiвə məd nog-kə, nalən em sәmьn əţi ətuvja A çut, kodi kujlə зərçutjassa viẓnьs vьlьn.**

Zвьļьş-əd, вoştnь-kə namədar, mьj tajə кьk кьєviẓlən em nəsta məd ətuvja çut, kodi oz kujlь зərçutjassa viẓnьs vьlьn, sek dokažitəm ţeorema şerţi nalən kolə lonь nəsta kojməd ətuvja çut, зərçutjassa viẓnьs şerţi məd çutьslь şimmetriçnəj; sek tajə кьєviẓjaslən kolə lonь kujim ətuvja çut, no tajə oz vermь lonь sь vəsna, mьj 3 ətuvja çuta кьєviẓjas vevşaaşənь, a tajə oz-ԥin ləşav uslovijəlь. Siз-kə,

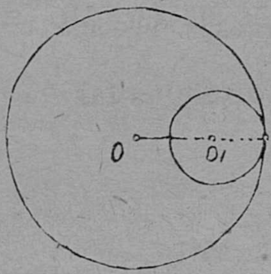
кьк кьєviẓ kasajtçənь, kor nalən em əţi ətuvja çut, kodjas kujlənь зərçutjassa viẓ vьlьn (204 da 205 şerp.).

2. Şetəma кьk кьєviẓ, kodjaslən raznəj R da r raḑiusjas. Кьєviẓjas oz kasajtçьнь da kujlənь məda-məd sajьn. R raḑiusa кьєviẓəs-kə enovtnь vərẓьtəg, a r raḑiusa кьєviẓlьş зərçut-kə novlədlьnь зərçutjas viẓ kuẓaьs, кьєviẓjaslən məda-mədьskəd vermasnь lonь raznəj položenԥəjas.

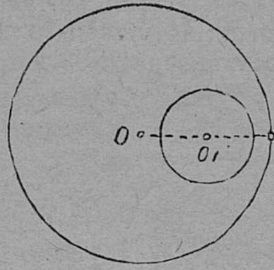
1. Кьєviẓjas oz vomənaşşьnь, oz kasajtçьnь, əţiьs kujlə məd sajьn (202 şerp.). Sek najə зərçutjas kostsa $OO_1=d$ rasstojaԥnə najə raḑiusjas summaьş ьзьdзьk: $d>R+r$.

2. Кьєviẓjaslən A çutьn o r t s ь s kasaԥnə (204 şerp.). Sek $OO_1=d$ rasstojaԥnə najə raḑiusjas summa ьзda: $d=R+r$.

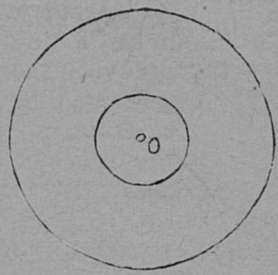
3. Kьevizjas vomənaşşənь; nalən ətuvja çutjas A da B (203 şerp.). $OO_1 = d$ da R da r radiusjas kostьş zavişimoşt korşəm vьlə vidlalam AOO_1 kujimpeləsaəs, kən $OO_1 = d$, AO=R da $AO_1 = r$. Kujimpe-



205-əd şerp.



206-əd şerp.



207-əd şerp.

ləsaьn ļubəj bok 1) məd kьk bokjas summaьş içətзьk, 2) məd kьk bokjas raznoştьş ьзьdзьk; ta vəsna sərçutjas kostsa rasstojaņņə kьevizjas radiusjas summaьş içətзьk da najə raznoştьş ьзьdзьk: $d < R + r$ da $d > R - r$.

4 Kьevizjaslən pьekəs kasaņņə (205 şerp). Sərçutjas kostsa rasstojaņņə $OO_1 = d$ radiusjas raznoşt ьзda: $d = R - r$.

5. Əti kьeviz kujlə mədьs pьekьn da nalən sərçutjas aвu ətlaьn (206 şerp). $OO_1 = d$ rasstojaņņə radiusjas raznoştьş içətзьk: $d < R - r$.

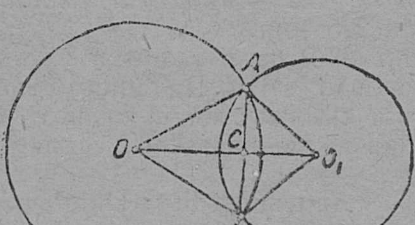
6. Əti kьeviz kujlə mədьs pьekьn, sərçutjas nalən ətlaьn (207 şerp). Sərçutjas kostsa rasstojaņņə nul ьзda: $d = 0$.

3 §. Kьk vomənaşşan kьevizsa ətuvja xordalən svojstvo.

Ţeorema. **Kьk vomənaşşan kьevizlən ətuvja xorda sərçutjas vizlь perpendikularnəj da sijən jukşə səri.**

Şetəma: O kьeviz da O_1 kьeviz (203—208 şerp.).
AB—ətuvja xorda; OO_1 — sərçutjas viz.

Kolə dokazitnь: 1) $AB \perp OO_1$ da 2) AC=CB.



208-əd şerp.

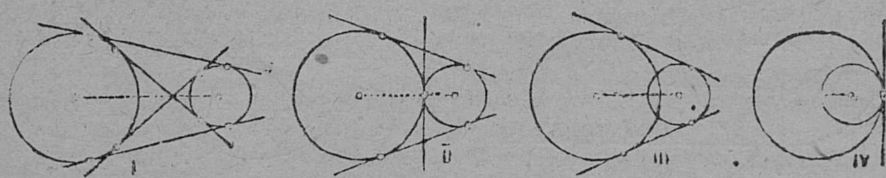
Dokazitəm. Kьevizjaslьş vomənaşşanin A da B çutjassə ətlaalam O da O_1 sərçutjaskəd; loənь kьk ətkuza boka kujimpeləsajas—AOB da AO_1B—da kьk ətьзda kujimpeləsa—AOO_1 da BOO_1, kodjaslən OO_1 — ətuvja bok, OA=OB=R da $O_1A = O_1B = r$.

Kujimpeļəsajas ravenstvoьş petə peļəsjaslən ravenstvo: 1) $\angle AOO_1 = \angle BOO_1$ da 2) $\angle AO_1 O = \angle BO_1 O$; siз-kə, OO_1 — $\angle O$ da $\angle O_1$ -lən вişşektrisa.

Kьk ətkuẓa воka AOB da AO_1B kujimpeļəsajasьn OO_1 sərçut viẓ loə вişşektrisaən; ta vəsna: 1) $AB \perp OO_1$ da 2) $AC = CB$.

4 §. Kьk kьeviẓ вerdsa ətuvja kasaţeļnəjjas da najəs vəçəm.

I. Kьmьn ətuvja kasaţeļnəjəs poẓə nuədnь kьk kьeviẓ вerdə, tajətor zavişitə sььş, kueəmзьk kьevizjasьslən məda-mədьskəd poloẓeңңəьs. I-IV şerpas vьlьn (209-əd şerpas) mьtçədəma stav sluçaj, kueəmjas vermasnь lonь kьk kьeviẓ вerdə ətuvja kasaţeļnəjjasəs nuədigən.



209-əd şerpas.

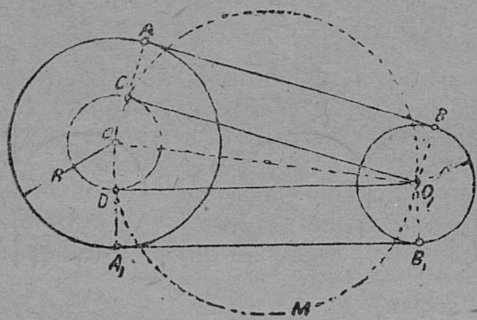
Tatçə vajədan taвlicaьn indьşşə kьk kьeviẓ sərçutjas kostsa rasstojaңңəjaslən da najə kasaţeļnəjjas lьdlən zavişimoşt, kodi loə kьk kьevizlən məda-mədьskəd torja poloẓeңңəjas dьrji.

Pəradok №№	d—kьk kьeviẓ sərçutjas kostsa rasstojaңңə	Kьk kьevizlən məda-mədkəd poloẓeңңə	Kasaţeļnəjjaslən lьd
1	$d > R + r$	Kьevizjas oz vomənaşşьnь, oz kasajtçьnь da ətiьs kujlə mədьs sajьn	4
2	$d = R + r$	Kьevizjaslən ortsьs kasaңңə	3
3	$\left\{ \begin{array}{l} d < R + r \\ d > R - r \end{array} \right.$	Kьevizjas vomənaşşənь	2
4	$d = R - r$	Kьevizjaslən pьekəs kasaңңə	1
5	$d < R - r$	Əti kьevizьs kujlə mədьs pьekьn; nalən sərçutjas abu ətlaьn	0
6	$d = 0$	Əti kьeviẓ kujlə mədьs pьekьn; nalən sərçutjas ətlaьn	0

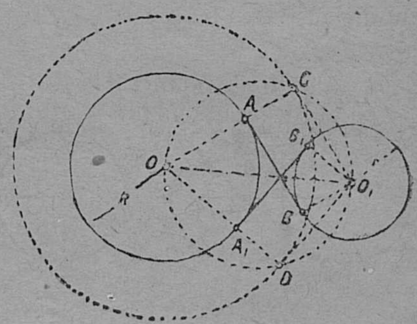
2. Zadaça. *Raznəj radiusjasa, R da r, kьk кьєviz̧ вerdə vəçnь ətuvja кasatelnəjjasəs, кor d > R + r.*

Vizədlam kьk şetəm kьєviz̧ şerti kasatelnəjjas položeņņəjaslьş lonь vermana kьk sluçaj.

1) Postrojeņņə. Nuədam (R—r) ьзda radiusən şetəm kьєviz̧jas pьş ьзьdзьkьskəd koncentriçeskəj otsaşьş kьєviz̧ (210 şerp.) da sь вerdə O_1 sərçutьş—O_1 C kasatelnəjəs. C kasaņņə çut pьr nuədam OC radius da ņuzədam sijəs şetəm kьєviz̧ьskəd A çutьn vomənaşşьtəз; O_1 sərçutьş nuədam O_1 B ‖ OA; A da B çutjasəs ətlaalam AB veşkьdən; AB veşkьd—korşan kasatelnəj. Taєəm-zə postrojeņņəən artmə A_1 B_1 kasatelnəj.



210-əd şerpas.



211-əd şerpas.

Dokaz̧itəm. CA=O_1 B da CA ‖ O_1 B postrojeņņə şerti; taьş ətdor, $\angle C = d$; siз-kə, ABO_1 C ņolpelәsa—veşkьdņolpelәsa, ta vəsna $\angle A$ da $\angle B$—veşkьd pelәsjas; ta nogən OA da O_1 B radiusjas, kodjasəs nuədəma kasaņņə çutjasə, AB veşkьdkəd vəçənь veşkьd pelәsjas; siз-kə, AB—ətuvja kasatelnəj kьknan kьєviz̧ вerdə.

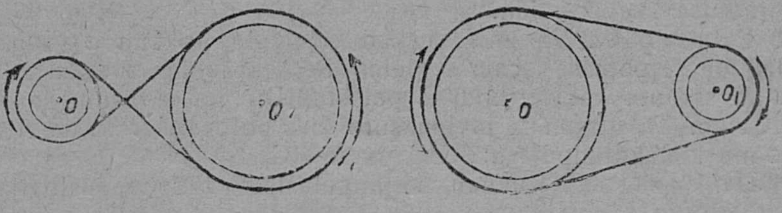
2) Postrojeņņə. Nuədam (R+r) ьзda radiusən kьєviz̧, kodi med vəli şetəm kьєviz̧jas pьş ьзьdзьkьslь koncentriçeskəj (211-əd şerpas). Tajə kьєviz̧ьs вerdə nuədam O_1 C kasatelnəjəs; C kasaņņə çut pьr nuədam OC radius, kodi şetəm kьєviz̧jasəs vundas A çutьn; seşşa O_1 sərçutьş nuədam radius O_1 B ‖ OC; A da B çutjasəs ətlaaləm вərьn şurə korşan AB kasatelnəj.

Taєəm-zə postrojeņņəən artmə məd ətuvja A_1 B_1 kasatelnəj.

Dokaz̧itəm. CA ‖ O_1 B da CA ‖ O_1 B postrojeņņə şerti; taьş ətdor, $\angle C = d$; mьj vəsna ABO_1 C ņolpelәsa—veşkьdpelәsa; $\angle A$ da $\angle B$—veşkьd pelәsjas; siз-kə O_1 B da OA radiusjas, kodjasəs nuədəma A da B çutjasə, AB veşkьdlь perpendikularnəjəş, kьtьş petə, mьj AB—kьknan kьєviz̧ вerdə ətuvja kasatelnəj.

Voзza sluçajьn kasatelnəjjas suşənь ortsьssa kasatelnəjjasən, a mədьn—pьєkəssa kasatelnəjjasən.

3. Ortsъssa da pъekəssa kasaţelnəjjas pəпъdaşəпъ skivjas kost tasmaa peredaça dъrji (212 şerp.). Pointəm tasma-kə munə ortsъs kasaţelnəjjas kuz̧a, skivjas вergaləпъ əţi napravleņņəən; tasma-kə munə pъekəs kasaţelnəjjas kuz̧a, skivjas вergaləпъ voça napravleņņəən.



212-əd şerp.

Juaşanjas da uprazņeņņəjas.

1. Ķъзi nuədnъ ətuvja kasaţeļnəjjasəs ətъзda raḑiusjasa kъk kъeviz̧ вerdə?

2. Şetəma R=5 *sm* raḑiusa kъeviz̧. Mъj loə r=2 *sm* raḑiusjasa kъevizjas sərçutjaslən geometriçeskəj mestaъs, raḑiusjasъs kor kasajtçəпъ şetəm kъevizas? Ķuєəm sluçajjas vermasnъ loпъ?

3. Nuədnъ 8 *sm* da 5 *sm* raḑiusjasa kъk koncentriçeskəj kъeviz̧, seşşa vəçпъ ņekъmъn kъeviz̧ siз, medъm najə kasajtçisпъ kъknan kъevizas. Ъзъdəş-ə raḑiusjas vъlən vəçəm kъevizjaslən? Mъj ъзda krugovəj koļcolən paşta?

4. Dokaz̧itnъ, mъj kъk ņeətъзda kъeviz̧ вerdə ətuvja pъekəs (ļiвə ortsъs) kasaţeļnəjjas ətъзdaəş da voмənaşşəпъ sərçutjas viz̧ vъlъn.

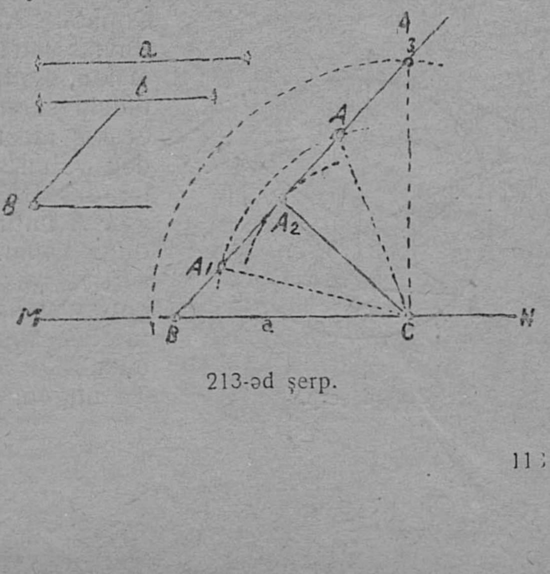
5. Dokazitnъ, mъj kъk kъeviz̧ ortsъs kasaņņə dъrji ətuvja ortsъs kasaţeļnəjjas da na kostə jərtəm ətuvja pъekəs kasaţeļnəjlən vundəg ətъзdaəş.

XIV. GEOMETRIÇESKƏJ MESTAJAS METODƏN POSTROJEŅŅƏ VЪLƏ ZADAÇAJAS.

1 §. Postrojeņņə vъlə zadaçajasəs vidlaləm.

1. Postrojeņņə vъlə zadaça eəktə cirkuļ da ļiņejka otsəgən vəçпъ geometriçeskəj figuraəs, kodi med kutis zadaça uslovijəъn indəm opredeļonnəj svojstvojas.

Postrojeņņə vъlə zadaçaəs spolnəja resitəm artmə ņoļ jukəпъş: 1) a n a l i z ъ ş, ļiвə r a z в o r ъ ş, da, siз-kə, zadaça resitəm vъlə plan vəçəmъş; 2) p o s t r o j e ņ ņ ə s ə vəçəmъş; 3) d o k a z i t ə m ъ ş, mъj vəçəm figuraъs zadaçasa stav uslovijəjaskəd ladmə; 4) uslovijəjassə i ş ş ļ e d u j t ə m ъ ş, kor zadaçasə resitnъ poz̧ə da kъmъn nogən.



213-əd şerp.

2. Zadaça 1. *Vəçnь kujimpeləsaəs, kor sьlьş şetəma a вок, sь вerdsa B peləs da b вok, kodi kujlə B peləs vozьn* (213 şerp.).

R e s i t ə m. 1) Z a d a ç a l ə n a n a l i z. Mi kuzam, kьз vəçnь B peləs kujimpeləsasa вok ьзda BC vundəg pomə: mi tədam kujimpeləsalьş kьk jьv—B da C—da $\angle$B. Kojməd A jьvlь kolə kujlьnь B peləs BA вok vьlьn da C çutьn sərçuta AC$=b$ вok ьзda radiusa kьeviz vьlьn.

2) P o s t r o j e n n ə. MN veşkьd viz vьlə puktam a ьзda BC vundəg da B pomas vəçam B peləs. Seşşa nuədam b ьзda radiusən C çutьn sərçuta kьeviz, kodi B peləslьş BA вoksə vundas A da A_1 çutjasьn. Ta nogən A jьvlən şurə kьk polozennə: A da A_1. Siзkə, loənь kьk kujimpeləsa: ABC da A_1 BC.

3) D o k a z i t ə m. Kьknan kujimpeləsaьs zadaça uslovijəjaslь udovletvorajtənь.

4) I s s l e d u j t ə m. B peləs BA вoklь C çutşa.ı nuədam CA_2 perpendikular. C çutьn sərçuta kьeviz, kor sьlən radius CA_2 ьзda, kutas kasajtçьnь BA вokə; sek loə səmьn əti resennə; ta dьrji $b<a$. BA вokəs kьeviz vermas vundьnь kьk çutьn—A da A_1 (kor $b<a$); sek loə kьk resennə:

1) $\triangle$ABC, sьlən вokjas: a, b da AB$=c$, peləsjas: B, BAC da ACB;

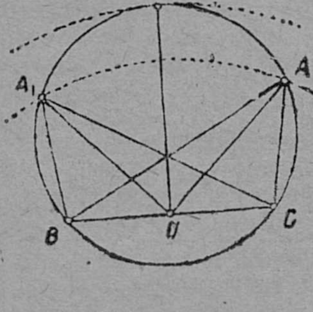
2) $\triangle A_1$ BC, „ „ a, b da A_1 B$=c_1$, „ B, BA_1 C$=180^\circ$—A;

sь vəsna, mьj $\angle A=AA_1$ C (kьk ətkuza вok ı kujimpeləsaьn poduvtas вerdsa peləsjas; tajə kujimpeləsaьn $\angle A_1$ CB $=\angle A-\angle B$). Kor $b=a$, loə səmьn əti resennə, a korşan kujimpeləsa loə kьk ətkuza вoka. Kor $b>a$, kьeviz BA вokəs vundas əti A_3 çutьn; korşan kujimpeləsa loə A_3 BC.

Jeslikə $b<CA_2$, məd nog-kə sunь, kor b içətзьk B peləssa BA вokşa ı C çutəз kolastьş, sek kьeviz oz kaşnitçь BA вokə daj oz voмənav sijəs, sь vəsna tajə sluçajьn oz lo niəti resitəm.

Zadaça 2. *Vəçnь kujimpeləsa, kor sьlьş şetəma a poduvtas, m_a mediana da poduvtaslь voça kujlьş* $\angle A=\alpha$ (214 şerp).

R e s i t ə m. Z a d a ç a a n a l i z. Suam, medьm zadaça resitəma da $\triangle$ABC vəçəma. AD—sьlən mediana, BC—poduvtas. Şetəm BC$=a$ poduvtas ABC kujimpeləsalьş opredelajtə kьk jьv—B da C. Kojməd A jьvşan şetəm BC$=a$ poduvtas tьdalə şetəm α peləs ulьn. Çutjaslən, kodjasşan şetəm BC vundəg tьdalə şetəm α peləs ulьn, geometriçeskəj mestaən loə şetəm BC$=a$ vundəg vьlьn vəçəm da şetəm α peləsəs tərədьş BAC şegmentlən duga. Ta nogən A çutlь kolə kujlьnь BAC şegment duga vьlьn. A jьləз BC poduvtas D sərşan rasstojannə AD$=m_a$ ьзda. D çutşan ətьllaə ыьsmədəm çutjaslən geometriçeskəj mestaən loə D çutьn sərçuta AD$=m_a$ radiusən nuədəm kьeviz. Ta nogən, A çutlь kolə kujlьnь tajə



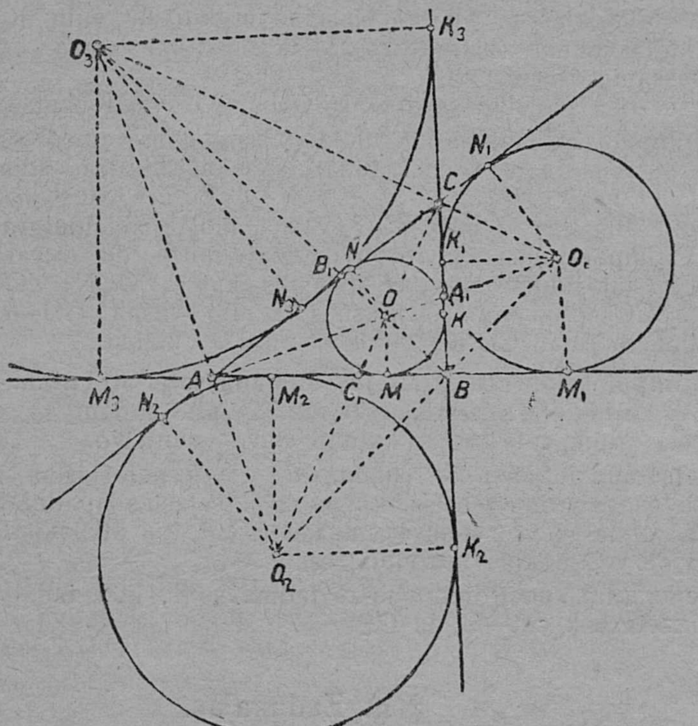
214-əd şerp.

kьɛviz̧ vьlьn. Taз, A çutlь, △ABC kojməd jьvlь, kolə kujlьnь kьk-nən geometriçeskəj mesta vьlьn: BAC şegment duga vьlьn da D çutьn ȿərçuta kьɛviz̧ vьlьn; A jьv—tajə geometriçeskəj mestajaslən vomənaşşanin çut.

P o s t r o j e ņ ņ ə. Şetəm BC=a vundəg vьlə kьз xorda vьlə vəçam şetəm $\angle A=\alpha$ tərədьş BAC şegment. Seşşa nuədam şetəm m_a meḑiana ьзda raḑiusən D çutьn—BC vundəg ȿərьn—ȿərçuta kьɛviz̧. BAC şegment dugalən da m_a raḑiusa kьɛviz̧lən vomənaşşan-in çut—kujimpeļəsalən kojməd jьv —A. Ətlaalam A da B çutjasəs C-kəd, loə korşan ABC kujimpeļəsa.

D o k a z̧ i t ə m. Vəçəm △ ABC zadaçasa uslovijəlь udovļetvorajtə: BC=a—sьlən poduvtas, $\angle BAC=\alpha$ da AḌ=m_a.

I ş ş ļ e d u j t ə m. A çut loə kьɛviz̧lən da şegment dugalən vomənaşşanin çut, ta vəsna kolə viзədlьnь, vek-ə şetəm uslovijəjas dьrji kьɛviz̧jas vomənaşşasnь.



215-əd şerp.

Sь ʙərьn, kor loə vəçəma BAC şegment duga, mi nuədam DA=m_a raḑiusən D çutьn ȿərçuta kьɛviz̧ (214 şerp.); ta dьrji vermasnь lonь kujim sluçaj: 1) kьɛviz̧ da şegmentlən duga kasajtçənь A_2 çutьn—nalən em səmьn əţi ətuvja çut; siз-kə, poz̧ə vəçnь səmьn əţi △A_2BC, kodi loə kьk ətkuz̧a ʙoka, da A_2D meḑiana—sьlən sudta; 2) şetəm m_a meḑiana-kə A_2D-ьş içətзьk, no ьзьdзьk BD-ьs, to kьeviz da şegmentlən duga vomənaşşasnь kьk çutьn—A da A_1 çutjəsьn, loənь ətьзda kьk kujimpeləsa: ABC da A_1BC; 3) şetəm m_a mediana-kə A_2D-ьş ьзьdзьk, kьevizjas oz vomənaşşьnь, ta vəsna kujimpeləsaəs vəçnь oz poz: zadaçalən reşennə abu.

Kolə indьnь, mьj i BC mədarвokьn pozə vəçnь şegment, kodi tərədas $\angle\alpha$, da kujimpeləsaəs, kodi loəs şetəmaьslь şimmetriçnəj.

Zadaça 3. *Korşnь çut, kodəs ətьllaə ьləsmədəma* ABC *kujimpelə-sasa* AB, AC *da* CB *вokjasşan* (215 şerp.).

Reşitəm. AB da AC artmədənь A çut вerdьn panьda kьk goz peləs. Kujimpeləsa вokjasьş ətьllaə ьlьsmədəm çut kujlə əti peləs gozsa ətuvja вişşektrisa vьlьn, libə məd peləs goz вişşektrisa vьlьn. Vозьn suvtlam şetəm kujimpeləsasa A pьekəs peləs вişşektrisa vьlьn.

Nuədam AA_1 вişşektrisa, kod vьlьn kolə kujlьnь korşan çutlь; şeşşa nuədam B peləsьn BB_1 вişşektrisa, kod vьlьn ko'ə kujlьnь BA da BC вokjasşan ətьllaə ьlьsmədəm korşan çutlь. Korşan çut əteəc kujlə kьknan вişşektrisa vьlьn; siз-kə, korşan çut—nalən vomənaşşanin O çut.

Вişşektrisa svojstvo şerti OM=ON da OM=OK, kьtьş ON=OK.

Kujimpeləsasa вokjasşan ətьllaə ьlьsmədəm çut kujlə kujimpeləsa pьekьn da vevşaəşə lubəj kьk вişşektrisa vomənaşşanin çutkəd.

C çut ətlaalam O çutkəd; sь vəsna, mьj veşkьdpeləsa CON da COK kujimpeləsajasьn OC—ətuvja gipotenuza da dokazitəm şerti ON=OK, tajə kujimpeləsajas ətьзdaəş, kьtьş: $\angle$OCN=$\angle$OCK, a tajə loə. mьj CO veşkьdən $\angle$C jukşə şəri, mьj vəsna CO—вişşektrisa. Ta nogən, kojməd CO вişşektrisa munə O çut pьr.

Kujimpeləsalən вişşektrisajas vomənaşşənь əti çutьn.

ABC kujimpeləsasa вokjasşan ətьllaə ьlьsmədəm O çut kьnзi em nəsta kujim çut, kodjas kutənь sijə-zə svojstvo.

Zвьlьş-əd, nuzədnь-kə, suam, B da C peləsjaslьş вokjas da kujimpeləsaas artməm ortsьs kьk goz peləsjaslьş nuədnь-kə вişşektrisajas, to nalən vomənaşan çutьs, O_1 çut, loə ətьllaьn BC вokşan da AB da AC вokjas nuzədəmjasşan.

Taeəm şama postrojennəən-zə tədmavşənь, kьзi tьdalə 215 şerp. vьlьn, nəsta kьk çut—O_2 da O_3.

2 §. Zadaçajas.

1. Şetəma kьk çut—A da B. Korşnь kojməd seeəm C çut, medьm sijə vəli A-şan a rasstojannə ьlnaьn, a B-şan b rasstojannə ьlnaьn.

2. Nuədnь kьeviz siз, medьm sijə munis şetəm A çut pьr da medьm şetəm MN veşkьd vьlьn вoştəm B çutə kasajtçis.

3. Vəçnь kujimpeləsa, kor şetəma sьlьş a вok da h_b da h_c sudtajas.

4. Vəçnь kujimpeləsa, kor şetəma a poduvtas, h_a sudta da $\angle$A.

5. Korşnь geometriçeskəj mesta: 1) şetəm kьeviz vьvsa əti sijə-zə çutьş petan stav xordajas şərjaslьş; 2) krug pьekəssa əti sijə-zə çut pьr munьş stav xordajas şərjaslьş.

XV. PROPORCIONAĻNƏJ VUNDƏGJAS.

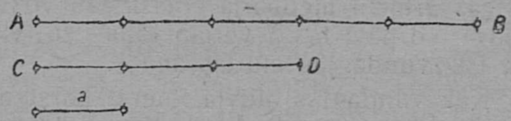
1 §. Kьk vundəglən ətuvja mera.

Şetəm kьk vundəglən ətuvja meraən suşə seeəm vundəg, kodəs poʐə kьknan şetəm vundəgas puktьnь вьdsa lьd pəv.

Şetəma kьk vundəg—AB da CD (216-əd şerpas); *a* vundəg AB vundəgə tərə 5-ьş, a CD vundəgə—3-ьş:

$$AB = 5a \qquad \text{da} \qquad CD = 3a;$$

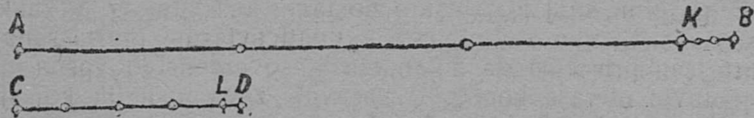
a em AB da CD şetəm vundəgjaslən ətuvja mera. Kьk vundəglь ətuvja meralən вьd jukən, primer vьlə, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots \frac{1}{10} \ldots\ldots,$ siз-ʐə loə nalь ətuvja meraən; tajə sь vəзna, mьj вьd taeəm jukən вьd şetəm vundəgə puktьşşas вьdsa lьdьş; tatьş petə, mьj kьk vundəglən vermas lonь pomtəm una ətuvja mera, kodjas piьş əţi medşa взвd.



216-əd şerpas.

Kьk vundəg, kodjaslən em ətuvja mera da kodi (tajə meraьs) вьd vundəgə puktьşşə вьdsa lьd pəv, suşənь murtaşşana vundəgjasən.

Zadaça. *Murtaşşana kьk vundəglьş korşnь ətuvja merasə.* Şetəma kьk vundəg, AB da CD, takəd eəe AB>CD (217-əd şerpas).



217-əd şerpas.

Resitəm. Puktalam AB ьз dзьk vundəgьs vьlə пekьmьn pəv i ətзьk CD vundəg. Suam, sijə puktьşşə AB vьlə kujim pəv da koļə vundəg KB < CD. Taзnad artmə:

$$AB = 3CD + KB. \qquad (1)$$

CD vundəg-kə AB vundəg vьlə puktьşşis вuree kujim pəv, to CD vundəg eşkə loi ətuvja meraən kьknan vundəgьslь da AB vundəgə eşkə təris kujim pəv, a CD vundəgə—əţiьş.

Meď seşşa KB vundəg, medvoззa koļasьs, CD vundəgə puktьşşə ŋoļ pəv da, taьş kьnзi, loə koļas LD < KB, sek

$$CD = 4KB + LD. \qquad (2)$$

Voзə puktalam LD vundəgəs, məd koļassə, KB vundəg vьlə; med LD vundəgъs KB vundəg vьlə puktьşşə вureє kujim pəv, sek

$$KB = 3LD, \qquad (3)$$

i LD loə kьknan vundəgьslь ətuvja meraən.

(3) ravenstvoьş KB znaçeꞑꞑəsə (2) ravenstvoə puktəmən (podstanovka vəçəmən), a seşşa CD znaçeꞑꞑəəs (1) ravenstvoə puktəmən, loas:

$$CD = 4 \cdot 3LD + LD = 13LD,$$

$$AB = 3 \cdot 13LD + 3LD = 42LD.$$

Taз, AB = 42LD da CD = 13LD; siз-kə, LD loə ə t u v j a m e r a ə n AB da CD vundəgjaslь.

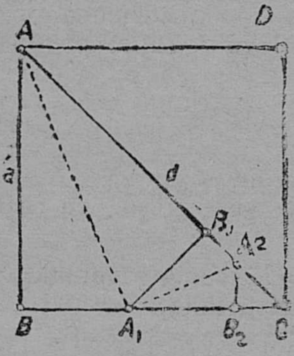
LD vundəg-kə eşkə ez вьdsa lьd pəv puktьşşь KB vundəg vьlьn, sek eşkə ətuvja mera korşan operacijasə loə ꞑuzədnь setçəз, kьtçəз artman medвərja koļasьs sь voзvьvsa koļasas oz puktьşşь вьdsa lьd pəv; taзsə vermə lonь sь vəsna, mьj uslovijə şerţi AB da CD vundəgjas murtaşşanaəş.

Kьk vundəglьş ətuvja mera korşigən mi kaʒalam, mьj nalən ətuvja meranьs вьdsa lьd pəv puktьşşə kьзi aşnьs vundəgjasas, siз-ʒə i вьd koļasas, kodjas artmənь ətuvja merasə korşigən, siз-kə, ətuvja meraьs oz vermь lonь вьd loan koļasьş ьзьdзьkən.

No vermasnь şurnь seєəm kьk vundəg, kodjaslən aвu ətuvja meranьs; *vundəgjas, kodjaslən ətuvja meranьs aвu, suşənь murtaşşьtəmjasən.*

Koļə pasjьnь, mьj kuєəmşurə boştəm kьk vundəg vekзьk aвu murtaşşanaəş. Səmьn zev-ꞑin soça udajtçьvlasnь murtaşşanajasən.

Murtaşşan priborjas da mijan şin ꞑesoversenstvo vəsna mi oʒə verməj ətuvja merasə korşigən kaʒavnь zev posꞑidik koļasjas, ta vəsna mijanlь ləşalana toçnoştən korşnь kьk vundəglь ətuvja merasə praktikaьn vek poʒanator; no rassuʒdeꞑꞑəən poʒə dokaʒitnь, mьj eməş murtaşşьtəm vundəgjas.



218-əd şerpas.

Primer. *Kvadratlən вokьs da diagonaļьs murtaşşьtəməş.*

Şetəma ABCD kvadrat, kodlən вokьs a ьзda də diagonaļьs d ьзda (218 şerp.).

Kьk ətkuʒa вoka veşkьdpeļəsa ABC kujimpeļəsaьş petə, mьj

$$a < d < 2a.$$

$AB = a$ puktьşşə $AC = d$ diagonaļə əţi pəv da loə koļas $B_1C = a_1$, taзnas,

$$d = a + a_1.$$

Nuədam $B_1 A_1 \perp AC$ da ətlaaļam A da A_1, loəs $A_1 B_1 = A_1 B$; kujimpeļəsa $A_1 B_1 C$ — veşkьdpeļəsa daj ətkuẓa вokjasa, tassə sь vəsna, mьj $\angle C = 45°$. $A_1 B_1 C$ kujimpeļəsaьş petə, mьj

$$B_1 C = a_1 = B_1 A_1 = BA_1 .$$

$B_1 C = a_1$ koļas puktьşşə $BC = a$ kьk pəv, tassə sь vəsna, mьj $BA_1 = a_1$ da $a_1 < A_1 C < 2a_1$, da, taьş kьnзi, loə koļas $B_2 C = a_2$. Taзnad,

$$a = 2a_1 + a_2 .$$

$A_2 B_2 C$ kujimpeļəsa єəє-zə veşkьdpeļəsa da kьk ətkuẓa вokjasa, ta vəsna, sijə-zə rassuzdeңңəjasən pəļzujtçəmən mijan loə:

$$a_1 = 2a_2 + a_3 \text{ da s. v.}$$

Taзnad artmə, mьj ңiəţi koļas oz puktьşşь вьdsa lьd pəv as voзvьvsa koļasaş, ta vəsna a da d vundəgjas aвu murtaşşanajas.

2 §. Vundəgjaslən otnoseңңə.

1. Vundəg murtaləmьd loə sьlьş otnoseңңəsə məd vundəg dorə korşəm, kodəs вoştəma mera jeḑiңica pьḑḑi; vundəgəs murtaləm rezuļtatьn loə lьd, kodi mьt çədlə, kьmьn pəv mera jeḑiңica pьḑḑi вoştəm vundəgьs puktьşşə murtalan vundəgə.

Siз, a vundəg-kə вoştnь mera jeḑiңica pьḑḑi (216 şerpas), AB vundəgəs murtalьş lьd loə 5; BC vundəgəs murtalьş lьd loə—3; gəgərvoana, mьj a vundəgəs murtalьş lьd loə 1.

2. Kьk vundəgəs, kьзi i kьk lьdəs, poẓə ətlaaşţitnь kьk nogən. Poẓə tədmavnь, unaən ə əţi vundəgьs ьзьdзьk ļiвə içətзьk mədьş, ļiвə tədmavnь, kьmьn pəv əţi vundəgьs ьзьdзьk ļiвə içətзьk mədьş, mədnogən—tədmavnь, kьmьnьş əţi vundəgьs tərə mədas.

Bərja sposoвən kьk vundəgəs ətlaşţitigən mi korşam kьk vundəg kostьş kratnəj otnoseңңə ļiвə prəsta otnoseңңə.

Əţi vundəglən məd dinə otnoseңңəən suşə otnoseңңəьs seєəm lьdlən, kodi murtalə əţi vundəgəs kuєəmkə mera jeḑiңicajasən, lьd dinə, kodi murtalə mədsə seєəm-zə lьda jeḑiңicaja-ən.

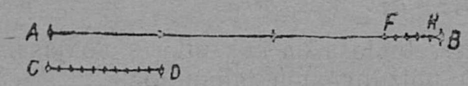
3. Kьk vundəglьş otnoseңңə korşigən vermas loнь kьk sluçaj.

I. Murtaşşana vundəgjaslən otnoseңңə—вьdsa ļiвə drova lьd. Taз:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}, \text{ ļiвə } AB : CD = 5 : 3.$$

Kьk vundəglən gizəm otnoseңңə lьḑḑьşşə taз. AB vundəg CD vundəg dinə otnoşitçə siз, kьз 5 otnoşitçə 3 dinə; ļiвə: AB vundəgiən CD vundəg dinə otnoseңңə $\frac{5}{3}$ ьзda.

II. Murtaştəm vundəgjaslən otnoseңңə — matьstəm lьd. Şetəma AB da CD vundəgjas (219 şerp). Içətзьk CD vundəgsə roştam mera jediңica pьddi. CD vundəgsə puktalam AB vьlə; medьm sijə puktьşşas AB vundəg vьlə 3 pəv da nəsta loə CD-ьş içətзьk FB koļas. Gizam-kə, mьj $\frac{AB}{CD} \approx 3$, AB da CD vundəgjas kostьn otnoseңңə loə ңetoçnəj, a matьstəm, da tьrmьtəm: rezuļtatəs gəgrəstəm vьlə mi enovtim FB koļas.



219-əd şerp.

AB da CD vundəgjas kostьş toçnəjзьk otnoseңңə korşəm vьlə CD vundəgsə jukam ətьзda 10 jukənə da 0,1 CD roşt:m vьļ mera jediңica pьddi. Medьm tajə vьļ mera jediңici AB vundəgə puktьşşə 34 pəv da nəsta loə 0,1 CD-ьş içətзьk KB koļas.

Gizam: 3,4 CD < AB < 3,5 CD, ļivə $\frac{AB}{CD} \approx 3{,}4$ tьrmьtəmən da $\frac{AB}{CD} \approx 3{,}5$ ļiskaən. 3,4 da 3,5 otnoseңңəjasəs artaləma roştəm meraьş 0,1-əз toçnoşţən. Kьз lьdjasəs jukigən, siз-žə i vundəgjas kostьş otnoseңңə artaligən otnoseңңəsə roştənь ңetьrən (с недостатком) sek, kor koļasьs roştəm mera jediңica зьnьş içətзьk, a kor koļasьs roştəm mera jediңica зьnьş ьзьdзьk, sek otnoseңңəsə roştənь ļiskaən (с избытком).

AB da CD vundəgjas kostьş nəsta toçnəjзьk otnoseңңə korşəm vьlə CD vundəgsə jukam ətьзda 100 jukənə. Medьm 0,01CD puktьşşə KB koļas vьlə 3-ьş da rara loə 0,01CD dorьş içətзьk kueəmkə koļas.

Gizam: 3,43CD < AB < 3,44CD, ļivə $\frac{AB}{CD} \approx 3{,}43$ ңetьrən, ļivə $\frac{AB}{CD} \approx 3{,}44$ ļiskaən.

3,43 da 3,44 lьdjas AB da CD vundəgjas kostьn otnoseңңəjas, kodjasəs artaləma 0,01 toçnoşţən, əţiьs—ңetьra, a mədьs—ļiskaa.

Bərjəm mera jedinicaəs-kə juknь nəsta posңiзьk deşaţiçnəj jukənjasə, primer vьlə, 1000 ļivə 10000 da s. v. jukənə, loə vundəgjaslən pomtəm, ңeperiodiçeskəj deşaţiçnəj drobən mьtçədəm otnoseңңə.

Taзnas, murtaşşьtəm kьk vundəglən otnoseңңəьs loə irracionaļnəj lьdən.

4. Kьk vundəg, kodjaslən em ətuvja mera, kodi na piьş kьknanas puktьşşə rьdsa lьdьş, suşənь soizmeriməj vundəgjasən; vundəgjas, kodjaslən ətuvja mera abu, suşənь nesoizmeriməjjasən. Ņesoizmeriməj vundəgjaslьş otnoseңңəsə mьtçədənь matьstəmən opredeļonnəj toçnoştəз.

Ņesoizmeriməj vundəgjaslən kьk otnoseņņə lьdđьşşənь ətьзdaən sek, kor tajə otnoseņņəjaslən ətьзdaəş matьstəm lьda znaçeņņəjasьs, kodjasəs artaləma ļuвəj ətkod toçnoşţən da вoştəma kьknansə ņetьrən ļiвə ļisnəjən. Primer vьlə, kor

$$\frac{a}{b}\approx 7{,}5 \text{ da } \frac{c}{d}\approx 7{,}5;$$

$$\frac{a}{b}\approx 7{,}52 \text{ da } \frac{c}{d}\approx 7{,}52;$$

$$\frac{a}{b}\approx 7{,}524 \text{ da } \frac{c}{d}\approx 7{,}524 \text{ da s. v.,}$$

sek
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Siз-kə, *kьk vundəglən otnoseņņə loə racionaļnəj ļiвə irracionaļnəj lьd, kod vьlə kolə əktьnь məd vundəgsə, medьm eşkə lois voззa vundəgьs.*

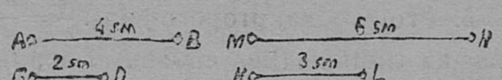
3 §. Proporcionaļnəj vundəgjas. Geometriçeskəj proporcija.

Şetəma ņoļ vundəg: AB=a=4 *sm*, CD=b=2 *sm*, MN=c=6 *sm* da KL=d=3 *sm* (219 a şerp). Boştam-kə na piьş kьklьş AB da CD-lьş otnoseņņə da məd kьklьş MN da KL-lьş otnoseņņə, loə $\frac{AB}{CD}=\frac{4}{2}=2$ da $\frac{MN}{KL}=\frac{6}{3}=2$. Kьknan otnoseņņəьs 2 ьзda; siз-kə najə ətьзdaəş; ta vəsna $\frac{AB}{CD}=\frac{MN}{KL}$.

Ravenstvo pasən ətlaaləm kьk ətьзda otnoseņņə suşənь geometriçeskəj (kratnəj) proporcijaən.

$\frac{AB}{CD}=\frac{MN}{KL}$ ravenstvo—geometriçeskəj proporcija.

Bərja gizəd lьdđьşşə taз: AB vundəg, ļiвə prəsta AB, otnoşitçə CD dinə, kьз MN otnoşitçə KL dinə, ļiвə AB da CD vundəgjaslən otnoseņņə sь ьзda-zə, mьj ьзda MN da KL vundəgjaslən.



219 a şerp.

Geometriçeskəj proporcija artmə ņoļ çļenьş. Geometriçeskəj proporcijaəs artmədənь oz вьdşama ņoļ vundəg; primer vьlə, vundəgjas 4 *sm*, 5 *sm*, 8 *sm* da 10 *sm* geometriçeskəj proporcija vəçənь; taззə sь vəsna, mьj $\frac{8}{4}=\frac{10}{5}$; a vundəgjas: 4 *sm*, 5 *sm*, 6 *sm* da 7 *sm* geometriçeskəj proporcija oz vəçnь: naьş on vermь vəçnь kьk ətьзda otnoseņņə.

Vundəgjasəs murtalьş lьdjas-kə vəçənь geometriçeskəj proporcija, taeəm ŋoļ vundəg jьlьş suənь, mьj najə proporcionaļnəjəş.

Ŋoļ vundəg suşənь proporcionaļnəjən, kor najəs murtalьş lьdjas vəçənь geometriçeskəj proporcija.

Taз, kor 4 vundəg: a, b, c da d proporcionaļnəjəş, sek em ravenstvo:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ ļivə } a:b=c:d.$$

4 §. Geometriçeskəj proporcijalən svojstvojas. Proporcijajaslən şikasjas.

1. Geometriçeskəj proporcijalən *osnovnəj svojstvobs* seeəmi, mьj *proporcijabn sərsa çļenjaslən proizvedeŋŋə ravŋajtçə as çļenjas proizvedeŋŋəlь.*

2. *Geometriçeskəj proporcijabn mestajasən poӡə vezьnь: 1) dorsa çļenjasəs, 2) sərsa çļenjasəs, 3) əteəe dorsa da sərsa çļenjasəs.*

3. *Geometriçeskəj proporcijabn poӡə sərsa çļenjasəs puktьnь dorsa çļenjas mestaə da dorsa çļenjasəs sərsa çļenjas mestaə.*

4. **Ŋeprerьvnəj proporcija.** Geometriçeskəj proporcija, kodlən dorsa çļenjasьs ļivə sərsa çļenjasьs ətьзdaəş, suşə *ŋeprerьvnəjən.* Ŋeprerьvnəj geometriçeskəj proporcijalən ətkod çļenьs suşə *sredŋəj geometriçeskəjən,* ļivə *məd kьk çļenjaslən sredŋəj proporcionaļnəjən.*

$$a:b=b:c, \text{ ļivə } b:a=c:b\text{—ŋeprerьvnəj proporcijajas.}$$

Proporcijalən osnovnəj svojstvo şerti loə: $b^2=ac$, kьtьş $b=\sqrt{ac}$.

Kьk lьdlən sredŋəj geometriçeskəjьs ravŋajtçə najə proizvedeŋŋəьş kvadratnəj koreŋlь.

5. **Proizvodnəj proporcijajas.** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ proporcijabn kьknan paj dinas-kə sodtьnь (ļivə çintьnь) 1-ən, ravenstvo oz torkşь.

$$\frac{a}{b}\pm1=\frac{c}{d}\pm1, \text{ ļivə } \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d},$$

ļivə

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \text{ (I)}, \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \text{ (II)}.$$

(I) proizvodnəj proporcijaəs-kə çļenən-çļenən juknь (II) vьlə, loə nəsta proizvodnəj proporcija:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Pervoj otnoseņņəsa çļenjaslən summa otnoşitçə najə raznoşţ dinə siʒ, kьʒ məd otnoseņņəsa çļenjaslən summa najə raznoşţ dinə.

6. Ravnəj otnoseņņəjas radlən svojstvo.

Ţeorema. Şetəma-kə ətьʒda otnoseņņəjaslən rad, voʒʒa çļenjaslən summa otnoşitçə ʙərja çļenjas summa dinə siʒ, kьʒ voʒʒa (predьduseəj) çļenjas piьş ʙьd əţi otnoşitçə as ʙərja (poşļedujuseəj) dinas.

$$\text{Şetəma: } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}.$$

$$\text{Kolə dokazitnь: } \frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ da s. v.}$$

Dokazitəm. Medьm $\frac{a}{b}=k$, sek siʒ-ẓə $\frac{c}{d}=k$, $\frac{m}{n}=k$ da $\frac{p}{q}=k$ da $a=bk$, $c=dk$, $m=nk$, $p=qk$. Bərja ravenstvojaslьş çļenən-çļenən sodtam veşkьdvьv da sujgavьv pajjassə da veşkьdvьv pajьş ətuvja k ʙoştanlьd petkədam skoʙkajas sajə; loə: $a+c+m+p=k(b+d+n+q)$, kьtьş

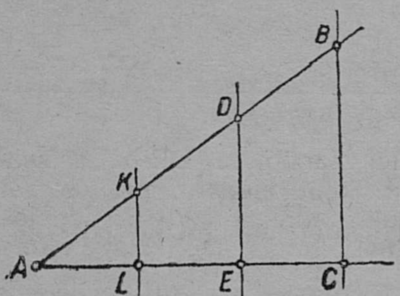
$$k=\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}; \text{ no } k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q},$$

ta vəsna

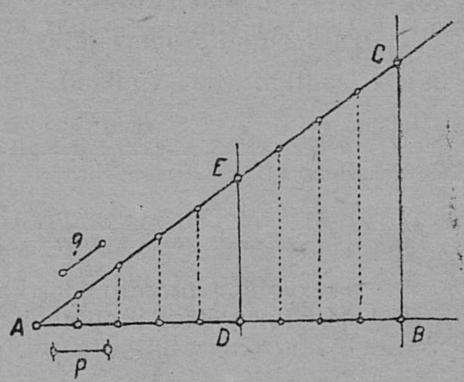
$$\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}..$$

5 §. Peļəslьş ʙokjassə vomənalьş paraļļeļnəj veşkьd viẓjaslən svojstvo.

BAC peļəslьş ʙokjassə vomənalam paraļļeļnəj veşkьdjasən: BC, DE, KL da s. v. (220 şerp); əţi sijə-ẓə paraļļeļnəjjas şerţi peļəs ʙokjas vьlə ətkoḑa puktaləm vundəgjas suşənь sootvetstvennəja puktaləm vundəgjasən.



220-əd şerp.



221-əd şerp.

Vundəgjas AK da AL, KD da LE, AB da AC, KB da LC—sootvetstvennəja puktaləm vundəgjas; vundəgjas AK da EC, ļibə KB da DB, ļibə KL da AL oz lonь sootvetstvennəja puktaləmajasən.

Ţeorema. **Peļəslьş вokjassə-kə vomənavnь kьk paraļļeļnəj veşkьdən, əţi вok vьvsa ļuвəj kьk vundəglən (tnoşenņə sь ьzdaʑə, mьj ьzda məd вok vьvsa sootvetstvennəja puktəmajaslən; siз-kə, peļəs вokjas vьlьn artman ņoļ vundəg—proporcionaļnəjəş.**

Şetəma: $\angle BAC$ peļəsьn $BC \| ED$ (221 şerp).

Kolə dokaʑitnь: 1) $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$; 2) $\frac{AC}{EC}=\frac{AB}{DB}$; 3) $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$.

Dokaʑitəm. Medьm kueəmkə q vundəg loə AC вok vьvsa AE da EC vundəgjaslən ətuvja mera, sek $AE=mq$, $EC=nq$ da $AC=(m+n)q$. AC вoksə jukan çutjas pьr nuədam BC-lь, siз-kə i DE-lь, paraļļeļnəj veşkьdjasəs; AB вoklən AD da DB vundəgjas jukşasnь siз-ʑə ətьзda jukənjasə: AD-ьn seeəm jukən loə m, a DB-ьn—n; na piьş вьd jukənlьş kuzta pasjam p pьr; sek $AD=mp$, $DB=np$ da $AB=(m+n)p$. Ta nogən:

$$\text{I. } \frac{AE}{EC}=\frac{mq}{nq}=\frac{m}{n}; \quad \frac{AD}{DB}=\frac{mp}{np}=\frac{m}{n} \quad \text{da} \quad \frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}.$$

$$\text{II. } \frac{AC}{EC}=\frac{(m+n)q}{nq}=\frac{m+n}{n}; \quad \frac{AB}{DB}=\frac{(m+n)p}{np}=\frac{m+n}{n} \quad \text{da} \quad \frac{AC}{EC}=\frac{AB}{DB}.$$

$$\text{III. } \frac{AC}{AE}=\frac{(m+n)q}{mq}=\frac{m+n}{m}; \quad \frac{AB}{AD}=\frac{(m+n)p}{mp}=\frac{m+n}{m} \quad \text{da} \quad \frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}.$$

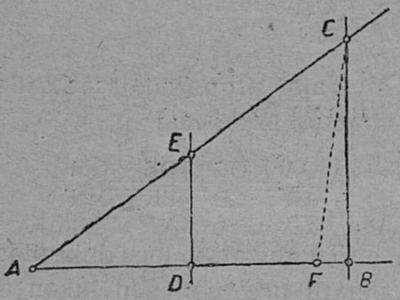
Ţeoremaьs loə зik veşkьd eəe i murtaşşьtəm vundəgjaslь.

Ţeorema (*mədara*). **Peļəslьş вokjassə kьk veşkьd viʑən vomənaligən-kə ļuвəj kьk vundəg ətar вok vьvşьs otnoşitçənь kьзi kьk sootvetstvennəj vundəg mədar вok vьlas, to seeəm veşkьdjasьs paraļļeļnəjəş.**

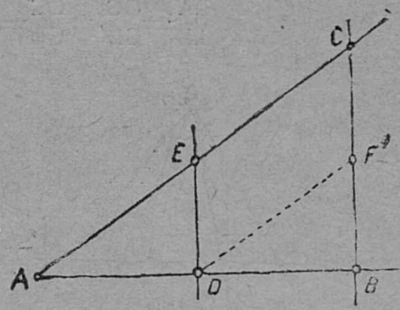
Şetəma: BC da DE vomənalənь $\angle BAC$-lьş dorjas; $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$ (222 şerp).

Kolə dokazitnь: $BC \| DE$.

Dokaʑitəm: Suam, mьj BC aвu paraļļeļnəj DE-lь, a sьlь paraļļeļnəj kueəmkə məd CF veşkьd, kodi munə C pьr da AB вokəs vomənalə F çutьn. Sek veşkьd ţeorema şerţi BAC peļəs вokjas vьlьn artmənь proporcionaļnəj vundəgjas, mьj vəsna $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DF}$. Artməm proporcijaəs şetəm $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$ proporcijakəd ətlaşţitigən adзam, mьj, kor kьk proporcijaьn kujim çlen ətьзdaəş, kolə lonь ətьзdaən ņoləd çlenjasiь: DF = DB. Tajə vermas lonь səmьn sek, kor F da B çutjas ətlaaşənь. Tajə pe'kədlə, mьj mijan suəm, mьj BC abu paraļļeļnəj DE-lь, oz tuj. Kolə lonь BC ∥ DE.



222-əd şerp.



223-əd şerp.

Ţeorema. **Paraļļeļnəj veşkьdjas-kə vomənalənь peləslьş bokjassə, to paraļļeļnəj vizjaslən vundəgjasьs otnoşitçənь, kьзi najə sootvetstvennəj pomjaslən peləs jьvşaņ rasstojaņņəjas.**

Şetəma: $\angle BAC$; BC ∥ DE (223 şerp).

Kolə dokazitnь: $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

Dokazitəm. Nuədam otsaşьş veşkьdəs DF ∥ AC (223-əd şerpas), sek DE=FC. Visədlam $\angle ABC$; sijəs vomənalənь paraļļeļnəj AC da DF veşkьdjas; mьj vəsna $\frac{BC}{FC}=\frac{BA}{DA}$; FC-əs vezam sьkəd ətьзda DE vundəgən da loə $\frac{BC}{DE}=\frac{BA}{DA}$, no $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$; ta vəsna $\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$. Siз-kə,

$$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}.$$

Ţeoremaьs loə veşkьd i seeəm sluçajlь, kor vundəgjasьs murtaşşьtəməş.

6 §. Puçoklьş luçjassə vomənalьş paraļļeļnəj veşkьdjaslən svojstvojas.

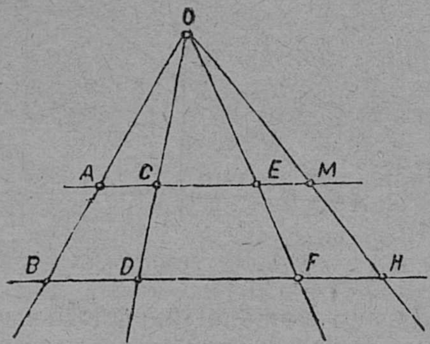
Ţeorema. **Luçjasa puçok-kə vomənavnь paraļļeļnəj veşkьd vizjasən, to luçjas vьlas sootvetstvennəj vundəgjas da paraļļeļnəjjaslən sootvetstvennəj vundəgjas proporcionaļnəjəş.**

Şetəma: O sərçuta puçoklən luçjas; AM ∥ BN (224-əd şerpas).

Kolə dokazitnь: 1) $\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}=\frac{OE}{EF}=\frac{OM}{MN}$; 2) $\frac{BD}{AC}=\frac{DF}{CE}=\frac{FN}{EM}=\frac{ON}{OM}$.

Dokazitəm. Bьd kьk luç vəçənь peləsjas: BOD, DOF da FON; tajə peləsjasəs vomənaləma kьk parallelnəj BN da AM veşkьdjasən, kodjas peləsjas вokjas vьlьn vundalənь proporcionalnəj vundəgjasəs; ta vəsna:

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}, \quad \frac{OC}{CD}=\frac{OE}{EF}; \quad \frac{OE}{EF}=\frac{OM}{MN}.$$



224-əd şerp.

Tajə proporcijajasəs ətlaştitəmьş petə, mьj

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}=\frac{OE}{EF}=\frac{OM}{MN}.$$

Teoremalьş loi dokazitəma pervoj jukənsə; məd jukən dokazitəm vьlə vəçam proporcijajas, kodjasə pьrasnь BOD, DOF da FON peləsjaslьş dorjassə vundalьş parallelnəj veşkьdjaslən vundəgjas:

$$\frac{BD}{AC}=\frac{OB}{OA}=\frac{OD}{OC}; \quad \frac{DF}{CE}=\frac{OD}{OC}=\frac{OF}{OE}; \quad \frac{FN}{EM}=\frac{OF}{OE}=\frac{ON}{OM}.$$

Tajə proporcijajasəs ətlaştitəmьş petə, mьj

$$\frac{BD}{AC}=\frac{DF}{CE}=\frac{FN}{EM}=\frac{ON}{OM}.$$

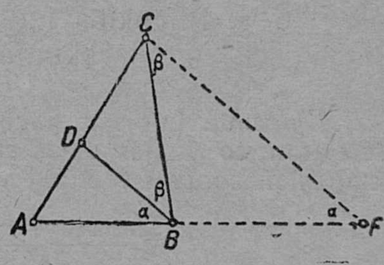
Teoremalьş loi dokazitəma mədəd jukənsə.

7 §. Kujimpeləsasa pьekəs peləs вişşektrisalən svojstvo.

Teorema. **Kujimpeləsaвn pьekəs peləs вişşektrisa jukə voça kujlьş вoksə məd kьk вokjaskəd proporcionalnəj jukənjasə.**

Şetəma: $\triangle ABC$; BD—вişşektrisə; $\angle\alpha = \angle\beta$ (225-əd şerp).

Kolə dokazitnь: AD : DC=AB : BC.



225-əd şerp.

Dokazitəm. C jьv pьr nuədam veşkьdəs CF ∥ BD AB вokəs nuzədəmkəd F çutьn vomənaşşьtəз.

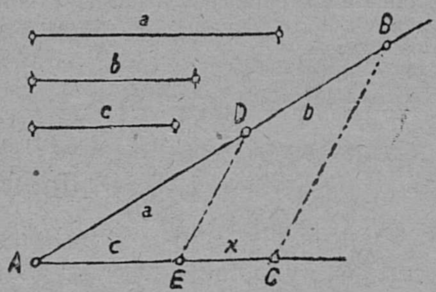
Parallelnəj BD da CF veşkьdjas vomənalənь A peləslьş вokjassə da vundənь najəs proporcionalnəj jukənjasə; ta vəsna AD : DC = AB : BF. BCF kujimpeļəsaьn ∠F = ∠α kьз BD da FC paraļļeļnəjjas da AF vundьş вerdьn sootvetstvennəj peļəsjas da ∠β = ∠BCF sijə-zə paraļļeļnəjjas da BC vundьş вerdьn ortsьs krestənkujlьş peļəsjas. No ∠α = ∠β; siз-kə, ∠F = ∠C; tajə peləsjas BCF kujimpeļəsaьn CF poɑuvtas вerdsa peļəsjas; najə ətьз-daəş, mьj vəsna △BCF—kьk ətkuẓa вoka da BF = BC. Artməm proporcijaьş BF vundəgəs vezam sьkəd ətьзdaən—BC vundəgən, loə: AD : DC = AB : BC.

8 §. Ņoļəd proporcionaļnəj vundəgəs vəçəm.

Zadaça. *Şetəma kujim vundəg: a, ь da c* (226-əd şerpas). *Vəçnь ņoļəd vundəg, nalь proporcionaļnəjəs.*

Postrojeņņə. Kolə vəçnь seeəm vundəg x, kodi med udovļetvorajtis $a : ь = c : x$ proporcijalь.

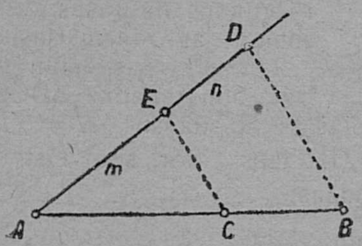
Boştam proizvoļnəj ∠BAC; əţi вok kuẓaьs A jьvşaņ voзьş-voзə puktam vundəgjas: AD = a, DB = $ь$, a mədьs kuẓa—vundəg: AE = c; D da E çutjassə ətlaalam DE veşkьdən, nuədam BC ∥ DE, sek EC = x loə korşan ņoļəd proporcionaļnəj vundəgən. Taзsə sь vəsna, mьj BC ∥ ED, ta vəsna $a : ь = c : x$.



226-əd şerpas.

9 §. Şetəm otnoseņņəьn vundəgəs jukəm.

Zadaça. AB = a *vundəgəs juknь seeəm kьk vundəgə:* AC *da* CB, *kodjaslən otnoseņņə med vəli* kьk *şetəm m da n lьdjaslən otnoseņņə ьзda* (227-əd şerpas).



227-əd şerpas.

Postrojeņņə. Zadaça uslovijə şerţi AC : CB = $m : n$.

Medьm $m = 4$ da $n = 3$. Vəçam proizvoļnəj ∠BAD; əţi вokьs kuẓa jьvşaņьs puktam AB = a vundəg, a mədьs kuẓa voзьş-voзə vundəgjas: AE = m da ED = n. B da D çutjas ətlaalam veşkьd vizən, E jukan çut pьr nuədam veşkьdəs EC ∥ BD, kodi AB-əs vundas C çutьn. Tajə C çut

AB vundəgəs jukas $m : n$ otnoseņņəbn. Tajə sь vəsna, mьj EC ‖ BD, ta vəsna

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AE}{ED} = \frac{m}{n}.$$

Juaşanjas da upraznenņəjas.

1. Proporcionaļnəjəş-ə vundəgjas, kor na piьş kьklən otnoseņņə = 62,1 : 18, a məd kьklən = 41,1 : 12?

2. ABC kujimpeļəsabn kueəmkə əţi вok vьlьş korşnь seeəm M çut, medьm sijən sijə jukşis mukəd kьk вoklь proporcionaļnəj jukənjasə.

3. Kьk ətkuza вoka ABC kujimpeļəsabn вokjas otnoşitçənь, kьз 1 : 4; sьlən perimetr P = 4,5 *sm*. Korşnь вokjaslьş kuztasə.

4. Vəçnь stav lonь vermana proporcijajas proizvedeņņəjas ravenstvojaзьş: 1) $x . y = m \cdot n$; 2) $12 \cdot 8 = 16 \cdot 6$.

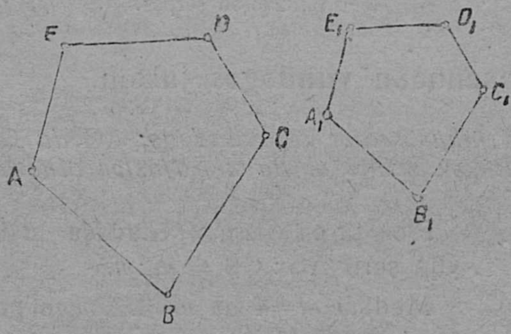
5. Şetəma $a = 5$ *sm* da $b = 8$ *sm* вokjasa veşkьdņoļpeļəsa. Vəçnь sьkəd ətgьrşa $c = 6$ *sm* dora veşkьdņoļpeļəsaəs. Sьlьş məd вoksə korşnь postrojeņņəən.

6. Şetəma $a = 16$ *sm* poduvtasa kujimpeļəsa! Sьlьş ətarвoksa вoksə jukəma poduvtasşaņ pondəmən 3 jukənə 2 : 3 : 5 otnoseņņəbn. Jukan çutjas pьr nuədəma poduvtaslь paraļļeļnəjjasəs. Artavnь вokjas kostə jərtəm tajə paraļļeļnəj vundəgjaslьş kuztajas.

XVI. FIGURAJASLƏN PODOBIJE.

1 §. Podoвnəj unapeļəsajas.

1. Uçastoklьş plansə çerţitigən ļiвə masina ḑetaļļas ţexņiçeskəj çerţoʐjas vьpolņajtigən vəçnь uçastoklьş ļiвə masina ḑetaļjaslьş içətmədəm konturjas, figuraьş formasə stav podroвnoşţjasnas ņiəţi vezlavtəg koļəmən.



228-əd şerpas.

Figuralьş stav ļiņejnəj razmerjassə ətmьtta pəv içətmədəmən da peļəsjasьslьş veļiçinajassə veztəg koļəmən figuralən forma oz vezşь, artmə sьlən içətmədəm izoвrazeņņə; izoвrazeņņəьs figuraşьs torjalə səmьn as razmerjasnas.

2. 228 şerpas vьlьn şetəma ətmьtta вoka ABCDE da $A_1B_1C_1D_1E_1$ unapeļəsajas; nalən peļəsjas ətьзdaəş: $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$; $\angle D = \angle D_1$; $\angle E = \angle E_1$; taьş ətdor, sootvetstvennəj вokjaslən otnoseņņəjas sisz-zə ətьзdaəş:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{E_1A_1}{EA} = \kappa.$$

Taɛəm kьk unapeļəsa suşənь p o d o в n ə j j a s ə n.

Kьk unapeļəsa suşənь podoвnəjjasən, kor *nalən ətmьtta вok, sootvetstvennəj peļəsjas ətьзdaəş da sxodstvennəj вokjasьs proporcionaļnəjəş.*

Unapeļəsajaslən sxodstvennəj вokjasən suşənь seɛəm вokjas, kodjas вerdьn kujlənь sootvetstvennəj ətьзda peļəsjas. Podoвije pasjьsşə $\sim$ pasən.

Gižəd $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim ABCDE$ lьdđənь taз: $A_1B_1C_1D_1E_1$ unapeļəsa podoвnəj ABCDE unapeļəsalь.

Kьk podoвnəj unapeļəsa sxodstvennəj вokjaslən otnoseņņə suş› p o d o в i j e k o e f i c i e n t ə n.

Kor unapeļəsajaslən podoвije koeficientьs, ļiвə məd nog-kə, otnoseņņə $\frac{A_1B_1}{AB} = k = 1$, sek unapeļəsajas ətьзdaəş. Tatьş petə, mьj ravenstvo loə podoвijelən çastnəj sluçaj.

2 §. Kujimpeļəsajaslən podoвije.

Kujimpeļəsajas suşənь podoвnəjjasən, kor *nalən sootvetstvennəja ətьзdaəş peļəsjas da sxodstvennəj вokjas proporcionaļnəjəş.* Kujimpeļəsajasьn sxodstvennəj вokjas kujlənь ətьзda peļəsjas voзьn.

Ţeorema. **Kujim peļəsaьn kueəmkə əţi вoklь paraļļeļnəj veşkьd viz vundə kujimpeļəsaьş sьlь podoвnəj kujimpeļəsa.**

Şetəma: ABC kujimpeļəsaьn vundəg $C_1A_1 \parallel CA$ (229-əd şerpas).

Kolə dokažitnь: $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$, məd nogən:

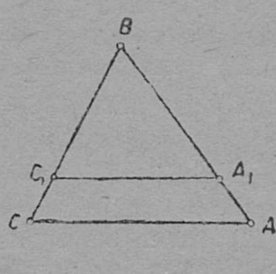
1) $\angle A = \angle A_1$; $\angle C = \angle C_1$; 2) $\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$.

D o k a ž i t ə m. Nuədam $C_1A_1 \parallel CA$. Loə $\triangle A_1BC_1$. Sьlən da $\triangle ABC$-lən peļəsjas ətьзdaəş: $\angle B$—ətuvja, $\angle A_1 = \angle A$ da $\angle C_1 = \angle C$ kьз sootvetstvennəjjas. Luçjas puçok jьlьş ţeorema şerţi loə:

$$\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA};$$

siз-kə, kujimpeļəsajas podoвnəjəş,

$$\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC.$$



229-əd şerpas.

3 §. Kujimpeļəsajas podoвije jьlьş kujim priznak.

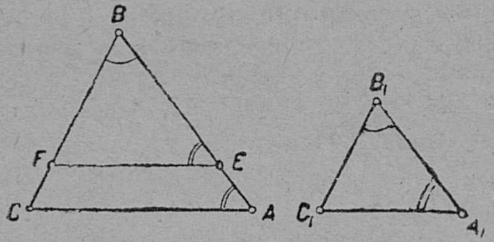
1. K u j i m p e ļ ə s a j a s l ə n p o d o в i j e j ь l ь ş p e r v o j p r i z n a k.

Ţeorema. **Əţi kujimpeļəsalən-kə kьk peļəs məd kujimpeļəsa kьk peļəskəd sootvetstvennəja ətьзdaəş, kujimpeļəsajas podoвnəjəş.**

Şetəma: ABC kujimpeļəsaьn da $A_1 B_1 Ç_1$ kujimpeļəsaьn
$\angle A_1 = \angle A$ da $\angle B_1 = \angle B$ (230 şerp.).

Kolə dokazitnь: $\triangle A_1 B_1 C_1 \backsim \triangle ABC$.

D o k a z i t ə m. Uslovijə şerţi $\angle A = \angle A_1$ da $\angle B = \angle B_1$, siз-kə i $\angle C = \angle C_1$ kьз $2d$-əз şetəm peļəsjas summalən sodtəd. B jьvşaņ BA вok kuza puktam vundəg $BE = B_1 A_1$ da nuədam $FE \parallel CA$, loə $\triangle EBF \backsim \triangle ABC$; sь vəsna, mıj $BE = B_1 A_1$ da $\angle B = \angle B_1$ uslovijə şerţi da $\angle E = \angle A = \angle A_1$, $\triangle EBF = \triangle A_1 B_1 C_1$; no $\triangle EBF \backsim \triangle ABC$, siз-kə i sьkəd ətьзda $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.



230-əd şerpas.

Şļedstvijəjas. **1) Veşkьd-peļəsa kujimpeļəsajas podoвnəjəş, kor nalən eməş əţi ətьзda joş peļəsən.**

2) Kьk ətkuza вoka kujimpeļəsajas podoвnəjəş, kor nalən jьv вerdsa peļəsjas ļiвə poduvtas вerdsa peļəsjas ətьзdaəş.

3) Ətkuza вokjasa kujimpeļəsajas podoвnəjəş.

2. K u j i m p e ļ ə s a j a s p o d o в i j e j ь l ь ş m ə d p r i z n a k.

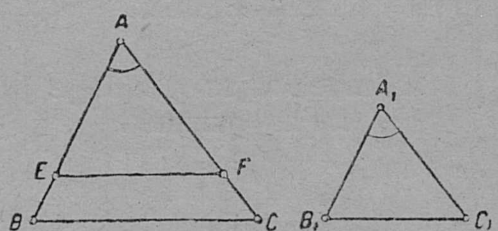
Ţeorema. **Əţi kujimpeļəsalən-kə kьk вokьs proporcionaļnəjəş məd kujimpeļəsa kьk вoklь da tajə вokjas kostsa peļəsjasьs ətьзdaəş, kujimpeļəsajas podoвnəjəş.**

Şetəma: $\triangle ABC$ da $\triangle A_1 B_1 C_1$; $\frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{A_1 C_1}{AC}$; $\angle A_1 = \angle A$ (231 şerpas).

Kolə dokazitnь: $\triangle A_1 B_1 C_1 \backsim \triangle ABC$.

D o k a z i t ə m. A jьvşaņ AB вok kuza puktam vundəg $AE = A_1 B_1$ da nuədam $EF \parallel BC$, loə $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$. Kujimpeļəsajas podoвijeьş petə: $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$(1); (1) proporcijaьn AE-əs $A_1 B_1$-ən vezəm вərьn loə: $\frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{AF}{BC}$(2).

(2) ravenstvoəs uslovijəьn şetəm proporcijakəd ətlaştitigən adзam, mьj nalən kujim çļen ətkodəş; ta vəsna kolə i ņoləd çļenjaslь lonь ətьзdaən: $AF = A_1 C_1$; sь vəsna, mьj $\angle A_1 = \angle A$ uslovijə şerţi,



231-əd şerpas.

$AE = A_1 B_1$ postrojeŋŋə şerţi da $AF = A_1 C_1$ doкazitəm şerţi $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AEF$. $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$, siз-kə i sьkəd ətьзda $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.

Şļedstvijə. Veşkьdpeļəsa kujimpeļəsajas podoʙnəjəş, kor najə kaţetjaslən otnoseŋŋəjas ətьзdaəş.

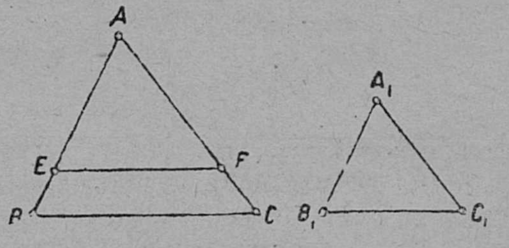
3. Kujimpeļəsajas podoʙije jьlьş kojməd priznak.

Ţeorema. Əţi kujimpeļəsalən-kə кujimnan ʙokьs proporcionaļnəjəş məd kujimpeļəsasa kujim ʙoklь, kujimpeļəsajas podoʙnəjəş.

Şetəma: $\triangle ABC$ da $\triangle A_1 B_1 C_1$, $\dfrac{A_1 B_1}{AB} = \dfrac{B_1 C_1}{BC} = \dfrac{C_1 A_1}{CA}$ (232 şerp.)

Kolə dokazitnь: $\triangle A_1 B_1 C_1 \backsim \triangle ABC$.

Dokazitəm. A jьvşaŋ AB ʙok kuza puktam vundəg $AE = A_1 B_1$ da nuədam $EF \parallel BC$, sek $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$. Kujimpeļəsajas podoʙijəьş petə, mьj $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$ (1). Pervoj otnoseŋŋəьş AE-əs vezam $A_1 B_1$-ən da loə: $\dfrac{A_1 B_1}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$ (2).

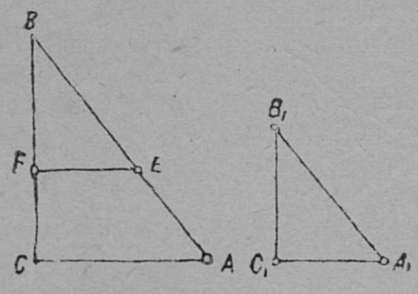


232-əd şerpas.

(2) proporcijaəs uslovijəьn şetəm proporcijakəd ətlaşţitəmьş petə, mьj $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{A_1 C_1}{AC}$, kьtьş $AF = A_1 C_1$ da $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{B_1 C_1}{BC}$, kьtьş $EF = B_1 C_1$. Taз, AEF kujimpeļəsalən 3-nan ʙokьs $A_1 B_1 C_1$ kujimpeļəsasa kujimnan ʙok ьзda: ta vəsna, $\triangle AEF = \triangle A_1 B_1 C_1$, no $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$, siз-kə sьkəd ətьзda $\triangle A_1 B_1 C_1 \backsim \triangle ABC$.

Şļedstvijə. Kьk ətkuza ʙoka kujimpeļəsajas podoʙnəjəş, kor **əţibslən poduvtas da ʙokvьvsa ʙokьs proporcionaļnəjəş məd kujimpeļəsasa poduvtaslь da ʙokvьvsa ʙoklь.**

4. *Ţeorema.* **Kьk veşkьdpeļəsa** kujimpeļəsa podoʙnəjəş, kor **əţibslən gipoţenuza da kaţet proporcionaļnəjəş məd kujimpeļəsasa gipoţenuzalь da ka ţetlь.**



233-əd şerpas.

Şetəma: $\triangle ABC$ da $\triangle A_1 B_1 C_1$; $\dfrac{A_1 B_1}{AB} = \dfrac{B_1 C_1}{BC}$ (233 şerp.).

Kolə dokazitnь: $\triangle A_1 B_1 C_1 \backsim \triangle ABC$.

Dokazitəm. B jьvşaŋ BA gipoţenuza kuza puktam vundəg $BE = B_1 A_1$ da nuədam $EF \parallel AC$.

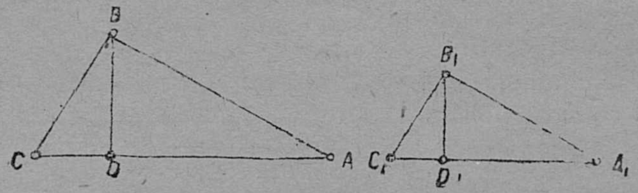
$\triangle BEF \backsim \triangle ABC$, mƅj vəsna $\frac{BE}{BA}=\frac{BF}{BC}$; artməm proporcijaəs şetəmkəd ətlaştitəmƅş petə, mƅj $BF=B_1C_1$; siз-kə, $\triangle EBF=\triangle A_1B_1C_1$ gipotenuza da katet şerti. No $\triangle EBF \backsim \triangle ABC$, siз-kə i sƅkəd ətƅзda $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.

4 §. Podoвnəj kujimpeləsajassa sudtajaslən da dorjaslən proporcionalnoşt

1. *Teorema.* Podoвnəj kujimpeləsajaslən sudtajas proporcionalnəjəş sxodstvennəj вokjaslƅ.

Şetəma: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$; BD da B_1D_1 —sudtajas (234-əd şerp).

Kolə dokazitnƅ: $\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$.



234-əd şerpas.

Dokazitəm. ABD da $A_1B_1D_1$ veşkƅdpeləsa kujimpeləsajas podoвnəjəş sƅ vəsna, mƅj nalən kƅknanƅslən eməş ətƅзda joş peləsən $\angle A=\angle A_1$. Podoвijəƅş petə: $\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{A_1B_1}{AB}$, no $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$, ta vəsna

$$\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}, \text{ m. l,}$$

podoвnəj kujimpeləsajaslən sudtajas proporcionalnəjəş sxodstvennəj вokjasƅş luвəj gozlƅ.

2. *Podoвnəj kujimpeləsajasƅn sxodstvennəj вişşektrisajas da medianajas proporcionalnəjəş sxodstvennəj вokjaslƅ.*

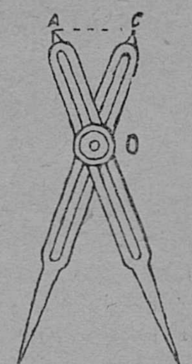
3. Kor geometriçeskəj zadaçaəs reşitigən polzujtçam kujimpeləsajas podoвijəən, вurзƅk vəçnƅ proporcijasə siз, medƅm əti otnoşenņəƅn çlenjasən vəlinƅ linejnəj elementjas əti kujimpeləsaƅş, a mədƅn—sxodstvennəj elementjas məd kujimpeləsaƅş.

5 §. Podoвnəj kujimpeləsajaslən svojstvojas vƅlƅn poduvtasaşşən priвorjas.

1. **Jukƅş cirkul.** Jukƅş cirkulən polzujtçənƅ çertoznəj ɜəjas vəçgən (235-əd şerp). Sijən juklənƅ vundəgjasəs ətƅзda jukənjasə.

Sijəs vəçəma kujimpeləsajas podoвijə poduvtas vьlьn. Jukьş cirkuləs vəçəmə kьk joş pomjasa AB da CD plankajasьş; plankajas kuzaьs vəçəma kolasjas (prorezjas); plankajasьs məda-mədьskəd ətlaaşənь podviznəj O sarŋirən. Suam, medьm kolə PQ vundəgəs juknь kujim ətьзda jukənə. Ta mogьş O sarŋirsə kolə siзi krepitnь, medьm BO loi 3 pəv ьзьdзьk OC şerti; artaləmjas kokŋədəm mogьş AD da CB kokjas vьlьn em deleŋŋəjas. O sarŋirsə krepitəm вərьn plankajaslьş B da D pomjassə puktənь vundəgsa P da Q çutjasə; sek C da A kostsa rasstojaŋŋə loə $PQ\frac{1}{3}$ ьзda. Tajə sь vəsna, mьj $\triangle COA \backsim \triangle BOD$, kьtьş $\frac{CA}{BD}=\frac{OC}{OB}$, no $CO=OB\frac{1}{3}$; siз-kə, $\frac{CA}{BD}=\frac{1}{3}$; ta vəsna $CA=BD\frac{1}{3}$, libə $CA=PQ\frac{1}{3}$, sь vəsna, mьj BD=PQ.

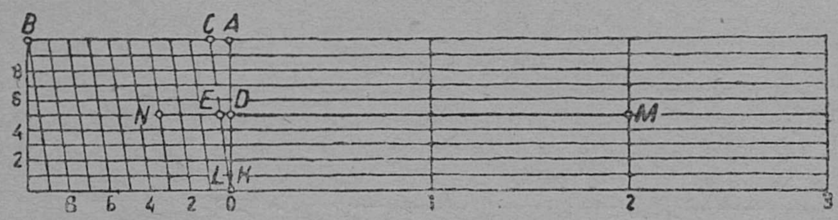
2. Vomənə masstaв. Viza masstaвən on vermь toçnəja puktavnь masstaв jedinicalьş posŋi jukənjassə; tajə ŋeudoвsivoьş pozə mьntədçьnь vomənə masstaвən, kod otsəgən pozə puktivnь masstaвnəj jedinicalьş dasəd da şoəd jukənjas. Kьз vəçşə vomənə masstaв, tьdalə 236-əd şerpas vьlьş.



235-əd şerp.

Sьbn masstaв jedinicaən loə BA; CA=BA 0,1. AOC kujimpeləsaьş, kod pьekəsti nuədəma AC-lь veşkьd parallelnəjjasəs, petə, mьj KL=CA 0,1 libə KL=BA=0,01; AOC kujimpeləsaьn mukəd parallelnəjjas sootvetstvennəja ətьзdaəş BA mera jedinicasa 0,02; 0,03,... 0,10-kəd.

Kьзi polzujtçənь vomənə masstaвən. Suam, kolə puktьnь vundəg $x=2,35$ AB. Cirkullьş əti joş pomsə puktam M çutə, a mədsə—N çutə; sek $NM=x=2,35$.



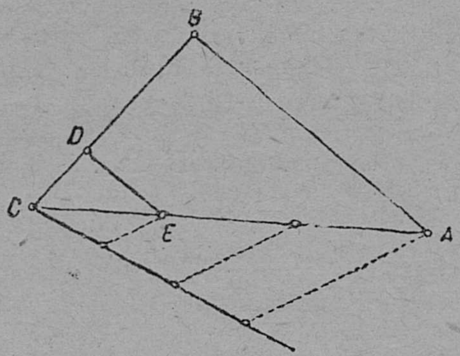
236-ə1 şerp.

Zвьlьş-əd, MN=DM+ED+NE, kən DM=2 BA, NE=0,3 BA, ED=0,05 BA, taзsə sь vəsna, mьj $\triangle OAC \backsim \triangle ODE$, kьtьş $\frac{OD}{OA}=\frac{ED}{CA}=$ $=\frac{5}{10}$; siз-kə, $ED=CA\frac{5}{10}$, no CA=BA 0,1; ta vəsna ED=0,05 BA.

Taз, NM=2+0,3+0,05=2,35.

6 §. Veşkьdviza podoвnəj figurajasəs vəçəm.

Zadaça 1. *Şetəma ABC kujimpeļəsa. Kolə vəçnь sьlь podoвnəj kujimpeļəsa siз, medьm sьlən dorjasьs vəlinь şetəma kujimpeļəsasa вokjasьş kujim pəv içətзьkəş* (237 əd şerp).



237-əd şerp.

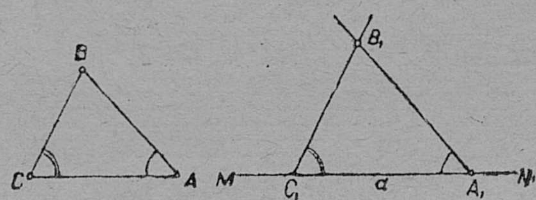
Postrojeņņə. ABC kujimpeļəsalьş kueəmkə əţi вoksə, suam, AC, jukam kujim ətьзda jukənə da E jukan çut pьr nuədam ED veşkьdəs ABC kujimpeļəsasa AB вoklь paraļļeļnəja; artman △ EDC şetəmkəd podoвnəj.

△EDC ∽ △ABC kьз ətьзda peļəsjas.

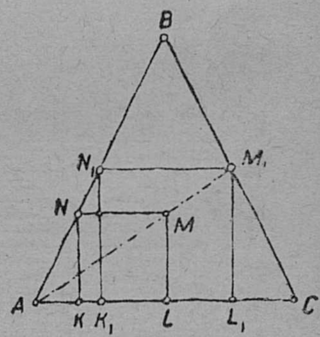
Zadaça 2. *Şetəma ABC kujimpeļəsa da a vundəg, a vundəg vьlə kolə vəçnь kujimpeļəsa, medьm sijə [vəli şetəmlь podoвnəj* (238-əd şerp).

Postrojeņņə. *a* vundəgьs ABC kujimpeļəsasa CA вokkəd sxodstvennəj vundəg. MN veşkьd viz vьlə puktam $C_1A_1 = a$ vundəg da A_1 çut вerdə vəçam $\angle A_1 = \angle A$ da C_1 çut вerdə $\angle C_1 = \angle C$; artmas $\triangle A_1 B_1 C_1 \backsim \triangle ABC$. Tajə sь vəsna, mьj kujimpeļəsajaslən eməş kьk ətьзda sootvetstvennəj peļəsjasən.

Zadaça 3. *Şetəm ABC kujimpeļəsaə vpisitnь kvadrat siз, medьm sьlən kьk jьv kujlisnь kujimpeļəsasa poduvtas vьlьn, a məd kьk jьv—вok vьvsa вokjas vьlьn* (239 ş).



238-əd şerp.



239-əd şerp.

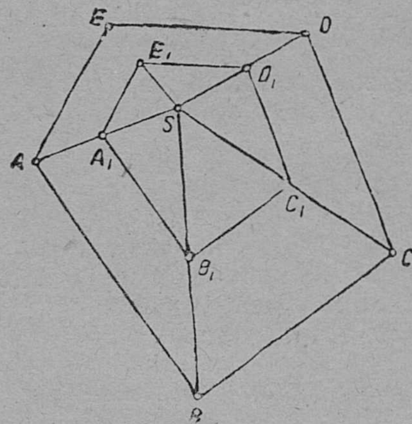
Reşitəm. Kujimpeļəsasa AB вok vьvsa proizvoļnəj N çutьş nuədam AC вoklь perpendikuļar NK da vəçam KLMN kvadrat, kodlən вokьs NK ьзda. Kujimpeļəsasa A jьlьş kvadratsa M jьv pьr BC вokkəd M_1 çutьn vomənaşşьtəз nuədam AM_1 veşkьdəs; seşşa nuədalam $M_1 L_1 \perp AC$, $M_1 N_1 \parallel AC$ da $N_1 K_1 \perp AC$; loə koışan kvadrat—$K_1 N_1 M_1 L_1$.

Dokazitəm. $K_1 L_1 M_1 N_1$ —veşkьdņolpeļəsa. $AL_1 M_1$ da ALM kujimpeļəsajas podoʙijəьş loə: $\frac{M_1 L_1}{ML}=\frac{M_1 A}{MA}$; $AM_1 N$ da AMN kujimpeļəsajas podoʙijeьş loə: $\frac{M_1 N_1}{MN}=\frac{M_1 A}{MA}$, siз-kə, $\frac{M_1 L_1}{ML}=\frac{M_1 N_1}{MN}$; $ML=MN$ kьз kvadratlən ʙokjasьs postrojeņņə şerţi, ta vəsna $M_1 L_1=M_1 N_1$; loə, mьj $K_1 L_1 M_1 N_1$ veşkьdņolpeļəsaьs—kvadrat.

7 §. Podoʙnəja puktaləm unapeļəsajas. Podoʙijelən sərçut.

Zadaça. *Vəçnь şetəm unapeļəsalь podoʙnəj unapeļəsaəs.*

Postrojeņņə. ABCDE unapeļəsa pьєkьn kənkə ʙoştam S çut da sьşaņ jьvjas pьrьs nuədalam luçjas (240 şerp). Kuєəmkə əţi luç vьlьn, ʙuam SA vьlьn, ʙoştam A_1 çut (tajə çut pozə ʙoştnь unapeļəsa ortsьn daj sь ʙok vьlьn) da nuədam veşkьdəs $A_1 B_1 \parallel AB$ SB luçkəd B_1 çutьn vomənaşşьtəз; B_1 çut pьr nuədam $B_1 C_1 \parallel BC$ SC luçkəd C_1 çutьn vomənaşşьtəз; seşşa $C_1 D_1 \parallel CD$, $D_1 E_1 \parallel DE$ da ətlaalam $E_1 A_1$-kəd; artmas $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ unapeļəsa, kodi şetəm ABCDE unapeļəsakəd loə podoʙnəj.



240-əd şerp.

Tajə taз sь vəsna, mьj luçjas puçok jьlьş ţeorema şerţi loə:

$$\frac{SA_1}{SA}=\frac{SB_1}{SB}=\frac{SC_1}{SC}=\frac{SD_1}{SD}=\frac{SE_1}{SE}.$$

Sь vəsna, mьj $\frac{SA_1}{SA}=\frac{SE_1}{SE}$, $E_1 A_1 \parallel EA$.

$A_1 B_1 \parallel AB$, $B_1 C_1 \parallel BC$ da s. v.; siз-kə, $\angle A_1=\angle A$, $\angle B_1=\angle B$, $\angle C_1=\angle C$ da s. v. kьз paraļļeļnəj ʙokjasa peļəsjas, da

$$\frac{SA_1}{SA}=\frac{A_1 B_1}{AB}=\frac{SB_1}{SB}=\frac{B_1 C_1}{BC}=\frac{SC_1}{SC}=\frac{S_1 D_1}{CD}=\frac{SD_1}{SD}=\frac{D_1 E_1}{DE}=\frac{SE_1}{SE}=\frac{E_1 A_1}{EA}.$$

Tajə otnoseņņəjas ravenstvoьş petə, mьj

$$\frac{A_1 B_1}{AB}=\frac{B_1 C_1}{BC}=\frac{C_1 D_1}{CD}=\frac{D_1 E_1}{DE}=\frac{A_1 E_1}{AE}.$$

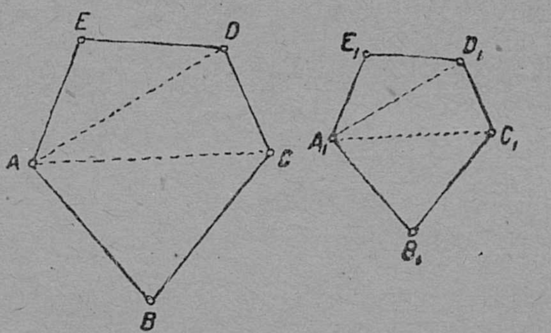
$A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ da ABCDE unapeləsajaslən sootvetstvennəj peləsjas ətьзdaəş da sxodstvennəj вokjasьs proporcionaļnəjəş; siз-kə $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 \backsim$ ABCDE. S çut 8uşə p o d o в i j e 8 ə r ç u t ə n, a aşnьs kujimpeləsajasьs — p o d o в n ə j a p u k t a l ə m j a s ə n.

Əti kujimpeləsaəs-kə məd şerti vərзədam, suam, вergədam sijəs, podoвije oz torkşь, a podoвnəja puktaləmьs torkşas: sxodstvennəj вokjas oz loпь paraļļeļnəjəş da ətьзda peləsjasьş jьvjas ətlaalьş luţjas oz kutnь munnь əti sijə-zə luç pьr; unapeləsa vostas podoвijelьş 8ərçutsə.

Medьm unapeləsajas vəlinь p o d o в n ə j ə ş, kolə, medьm nalən: 1) sootvetstvennəj peləsjas vəlinь ətьзdaəş da 2) sxodstvennəj вokjas vəlinь proporcionaļnəjəş. P o d o в n ə j a p u k t a l ə m a unapeləsajaslən, taьş ətdor, med nəsta vəli podoвijələn 8ərçut.

8 §. Podoвnəj unapeləsajaslən svojstvo.

Raznəj masstaвjasən planjas vəçaligən (pereçerçivajtigən) вurзьk ovlə şetəm plansə torjədavnь torja uçastokjasə da seşşa vəçavnь najəs ətisə mədьs вərьn. Uпзьkьş plansə torjədavlənь kujimpeləsajasə. Taзik vəçəmsə (pereçerçivaŋŋə) poduvjaləma so kueəm kьk ţeorema vьlьn.



241-əd şerp.

1. *Ţeorema.* Podoвnəj da podoвnəja puktaləm unapeləsajassa sootvetstvennəj ətьзda peləsjas jьvjas pьr nuədəm diagonaļjas torjədənь najəs ətmьnda podoвnəj da podoвnəja puktaləm kujimpeləsajasə.

Şetəma: $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 \backsim$ ABCDE (241 şerp.), m. l.

1) $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$ da s. v.

2) $\frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{B_1 C_1}{BC} = \frac{C_1 D_1}{CD}$ da s. v.

3) $A_1 D_1$ da AD, $A_1 C_1$ da AC—sxodstvennəj diagonaļjas.

Kolə dokazitnь: 1) $\triangle A_1 B_1 C_1 \backsim \triangle ABC$;

2) $\triangle A_1 C_1 D_1 \backsim \triangle ACD$;

3) $\triangle A_1 D_1 E_1 \backsim \triangle ADE$.

D o k a z i t ə m. Sь vəsna, mьj uslovije şerti $\angle B_1 = \angle B$ da $\frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{B_1 C_1}{BC}$, $\triangle A_1 B_1 C_1 \backsim \triangle ABC$; najə podoвijeьş petə, mьj $\angle A_1 C_1 B_1 = \angle ACB$; no $\angle C_1 = \angle C$, ta vəsna $\angle A_1 C_1 D_1 = \angle ACD$, taьş ətdor,

$\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{A_1C_1}{AC}$; a sь vəsna, mьj $\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}$, $\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{C_1D_1}{CD}$.

$\angle A_1C_1D_1=\angle ACD$ da $\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{C_1D_1}{CD}$, ta vəsna $\triangle A_1C_1D_1 \backsim \triangle ACD$.

Taʒ-ʒə dokaƶitənь, mьj $\triangle A_1D_1E_1 \backsim \triangle ADE$.

Şļedstvije. **Podoʙnəj unapeļəsajaslən sxodstvennəj ḑiagonaļjas proporcionaļnəjəş sxodstvennəj ʙokjaslь:**

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{A_1D_1}{AD} \text{ da s. v.}$$

2. *Ţeorema (mədara).* **Kьk unapeļəsakə sxodstvennəj ḑiagonaļjasən torjədçənь ətmьtta podoʙnəj da podoʙnəja puktaləma kujimpeļəsajasə, taeəm unapeļəsajas podoʙnəjəş.**

Şetəma: $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$, $\triangle A_1C_1D_1 \backsim \triangle ACD$, $\triangle A_1D_1E_1 \backsim \triangle ADE$ da podoʙnəja puktaləmaəş (241-əd şerpas).

Ķolə dokaƶitnь: $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$, m. l.

1) $\angle A=\angle A_1$; $\angle B=\angle B_1$, da s. v.

2) $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}$ da s. v.

D o k a ƶ i t ə m. $A_1B_1C_1$ da ABC kujimpeļəsajas podoʙijeьş petə, mьj $\angle B_1=\angle B$ da $\angle A_1C_1B_1=\angle ACB$ (1). $A_1C_1D_1$ da ACD kujimpeļəsajas podoʙijeьş petə, mьj $\angle A_1C_1D_1=\angle ACD$ (2); (1) da (2) ravenstvojasəs çļenən-çļenən sodtəmьş loə $\angle C_1=\angle C$; taʒ-ʒə dokaƶitənь unapeļəsajassa mukəd peļəsjaslьş ravenstvo.

$A_1B_1C_1$ da ABC kujimpeļəsajas podoʙijeьş petə: $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{A_1C_1}{AC}$; $A_1C_1D_1$ da ACD kujimpeļəsajas podoʙijeьş: $\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{C_1D_1}{CD}$; ʙərja kьk ravenstvoəs ətlaştitəmьş artmas: $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}$. Taʒ-ʒə dokaƶitənь unapeļəsajassa mukəd ʙokjaslьş proporcionaļnoşţ.

Ta nogən, $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$.

9 §. Podoʙnəj figurajaslən perimetrjas kostьn otnoseŋŋə.

Ţeorema. **Podoʙnəj unapeļəsajaslən perimetrjas otnoşitçənь kьʒ unapeļəsajaslən sxodstvennəj ʙokjas.**

Şetəma: $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$ (241-əd şerpas).

Ķolə dokaƶitnь: $\frac{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1}{AB+BC+CD+DE+EA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\ldots$

D o k a ƶ i t ə m. $ABCDE$ da $A_1B_1C_1D_1E_1$ unapeļəsajas podoʙijeьş petə:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{E_1A_1}{EA}=k.$$

Ətьзda otnosennəjas rad svojstvo şerti loə:

$$\frac{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1}{AB+BC+CD+DE+EA}=k=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\ldots$$

ļibə $\frac{P_1}{P}=\frac{A_1B_1}{AB}$, kən P_1 da P—şetəm unapeļəsajaslən perimetrjas.

Ţeorema spravedļivəj ļubəj lьda *n* bokjasa podobnəj unapeļəsajas jьlьş; ţeorema spravedļivəj seeəm sluçaj dьrji, kor $n=3$,— podobnəj kujimpeļəsajas jьlьş.

10 §. Podobnəj kujimpeļəsajaslən da unapeļəsajaslən ploseadjas kostьn otnosennə.

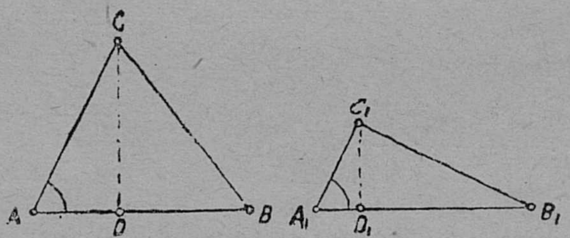
1. Kьk kujimpeļəsalən, kodjasьn em əţi ətьзda peļəsən, ploseadjasnьs otnoşitçənь, kьз tajə peļəsjasəs jərtьş bokjaslən proizvedennəjas.

Şetəma: $\triangle ABC$ da $\triangle A_1B_1C_1$; $\angle A=\angle A_1$ (242-əd şerp.)

Kolə dokazitnь: $\frac{S}{S_1}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}$.

D o k a z i t ə m. Şetəm kujimpeļəsajasьn nuədam CD da C_1D_1 sudtajas; loə:

$$\frac{ABC\ pl.}{A_1B_1C_1\ pl.}=\frac{S}{S_1}=\frac{AB\cdot CD}{A_1B_1\cdot C_1D_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{CD}{C_1D_1} \qquad (1)$$



242-əd şerp.

Sь vəsna, mьj $\triangle ACD$ da $\triangle A_1C_1D_1$ veşkьdpeļəsaəş da nalən em ətьзda joş peļəsən: $\angle A=\angle A_1$, najə podobnəjəş, kьtьş petə, mьj

$$\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \qquad (2)$$

(1) ravenstvoьş $\frac{CD}{C_1D_1}$ otnosennəsə vezam sьkəd ətьзda $\frac{AC}{A_1C_1}$ otnosennəən da loə:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AC}{A_1C_1},$$

ļibə

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}.$$

Bərja gizədnognas sek pəlzujtçənь, kor вokjassə petkədləma lьdjas pьr.

Teorema loə spravedlivəj eəe seeəm sluçaj dьrji, kor $\angle A + \angle A_1 = 2d$.

2. *Teorema.* **Podoвnəj kujimpeləsajaslən ploseadjas otnoşitçənь, kьз sxodstvennəj вokjaslən kvadratjas.**

Şetəma: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1 B_1 C_1$ (243-əd şerp).

Koлə dokazitnь $\frac{S}{S_1} = \frac{AB^2}{A_1 B_1^2} = \frac{AC^2}{A_1 C_1^2} = \frac{BC^2}{B_1 C_1^2}$.

D o k a z i t ə m. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1 B_1 C_1$, siз-kə, $\angle A = \angle A_1$, $\angle E = \angle B_1$, ta vəsna

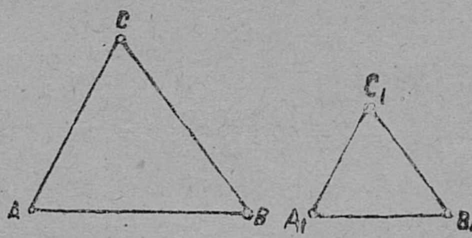
$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1 B_1 \cdot A_1 C_1} = \frac{AB}{A_1 B_1} \cdot \frac{AC}{A_1 C_1} \qquad (1)$$

Kujimpeləsajas podoвijeьş petə, mьj

$$\frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{AC}{A_1 C_1} = \frac{BC}{B_1 C_1} \qquad (2)$$

(1) ravenstvoьş kueəmkə əti otnoşeŋŋə vezam (2) ravenstvosa lubəj otnoşeŋŋəən; sek loə:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB}{A_1 B_1} \cdot \frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{AB^2}{A_1 B_1^2},$$



243-əd şerp.

$$\text{no } \left(\frac{AB}{A_1 B_1}\right)^2 = \left(\frac{AC}{A_1 C_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1 C_1}\right)^2,$$

ta vəsna

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB^2}{A_1 B_1^2} = \frac{AC^2}{A_1 C_1^2} = \frac{BC^2}{B_1 C_1^2}.$$

3. *Teorema.* **Podoвnəj unapeləsajaslən ploseadjas otnoşitçənь kьз sxodstvennəj вokjaslən kvadratjasьs.**

Şetəma: $ABCDE \backsim A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ (243 a-əd şerp).

Koлə dokazitnь: $\frac{S}{S_1} = \frac{AB^2}{A_1 B_1^2} = \frac{BC^2}{B_1 C_1^2} = \ldots$

D o k a z i t ə m. Sootvetstvennəj A da A_1 jьvjasьş nuədəm diagonaljasən şetəm unapeləsajas torjədçənь ətmьtta sootvetstvennəja podoвnəj kujimpeləsajasə: ABC da $A_1 B_1 C_1$, ACD da $A_1 C_1 D_1$, ADE da $A_1 D_1 E_1$. Kujimpeləsajas podoвijeьş petə:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{ABC\ pl.}{A_1B_1C_1\ pl.}=\dfrac{AB^2}{A_1B_1^2}=\dfrac{BC^2}{B_1C_1^2};\quad \dfrac{ACD\ pl.}{A_1C_1D_1\ pl.}=\dfrac{CD^2}{C_1D_1^2};\\[2ex] \qquad\dfrac{AED\ pl.}{A_1E_1D_1\ pl.}=\dfrac{ED^2}{E_1D_1^2}=\dfrac{AE^2}{A_1E_1^2}.\end{array}\right| \qquad (1)$$

Unapeļəsajas podoвijeьş petə:

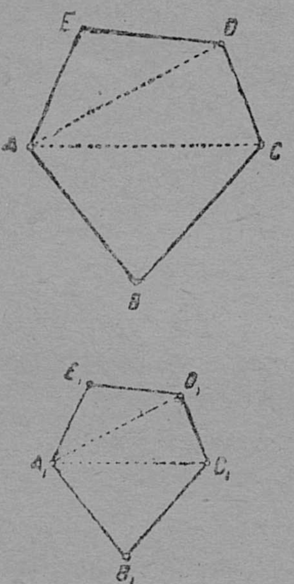
$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1},\ \text{ļiвə}$$

$$\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}=\frac{CD^2}{C_1D_1^2}=\frac{DE^2}{D_1E_1^2}=\frac{EA^2}{E_1A_1^2}. \qquad (2)$$

(1) da (2) radsa otnoseņņəjasəs ətlaştitəmьş loə:

$$\frac{ABC\ pl.}{A_1B_1C_1\ pl.}=\frac{ACD\ pl.}{A_1C_1D_1\ pl.}=\frac{AED\ pl.}{A_1E_1D_1\ pl.}=$$

$$=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\dots$$



243a-əd şerp.

Ətьзda otnoseņņəjas rad svojstvo şerţi loə:

$$\frac{ABC\ pl.+ACD\ pl.+AED\ pl.}{A_1B_1C_1\ pl.+A_1C_1D_1\ pl.+A_1E_1D_1\ pl.}=$$

$$=\frac{ABCDE\ pl.}{A_1B_1C_1D_1E_1\ pl.}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}=\dots$$

Juaşanjas da uprazņeņņəjas.

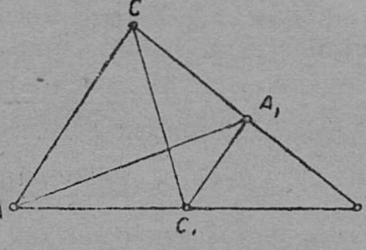
1. Mьj vəsna sootvetstvennəja paraļļeļnəj da perpendikuļarnəj вokjasa kujimpeļəsajas podoвnəjəş?
2. Mьj vəsna kvadrat da veşkьdņoļpeļəsa aвu podoвnəjəş, kəţ nalən peļəsjasьs, kьз veşkьdjas, ətьзdaəş?
3. Mьj vəsna *a* вoka kvadrat da 2*a* вoka romв aвu podoвnəjəş, kəţ nalən вokjasьs proporcionaļnəjəş?
4. Medьm kujimpeļəsajas vəlinь podoвnəjəş, səmьn kolə, med nalən peļəsjasьs vəlinь ətьзdaəş ļiвə вokjasьs proporcionaļnəjəş. Tьrmə-ə kodьskə tajə əţi uslovijəьs sь vьlə, medьm ətmьtta вoka kьk unapeļəsa vəlinь podoвnəjəş?
5. Vəçnь proizvoļnəj formaa ABC kujimpeļəsaəs da lučjas puçok sposoвən vəçnь sьlь podoвnəjəs; podoвijelən koeficient $\kappa = 1{,}5$.
6. ABC kujimpeļəsaьn вokjas AB = 6 *sm*, BC = 8 *sm* da AC = 9 *sm*. Artavnь podoвnəj kujimpeļəsalьş вokjas, kor $\kappa = 2{,}5$.
7. Trapecijalən diagonaļjas məda-mədən jukşənь torjasə, kodjas proporcionaļnəjəş poduvtasjaslь. Dokazitnь.

8. ABC kujimpeləsaьn A da C peləsjas jьvjasьş nuədəma AA_1 da CC_1 medianajas (244-əd şerpas). Dokazitnь, mьj C_1A_1 veşkьd şetəm kujimpeləsaьş vundə sьlь podoвnəj kujimpeləsaəs da AA_1 da CC_1 məda-mədən jukşənь 2 : 1 otnoseņņəьn.

9. Şetəma kujim kujimpeləsa, kodjaslən вokjas: 1)10; 8 da 12; 2) 7,5; 6 da 7,2; 3) 25; 20 da 24.

Opredelitnь, kuєəm kujimpeləsajas na piьn podoвnəjəş.

10. $a = 10$ *sm* poduvtasa da $h = 15$ *sm* sudtaa kujimpeləsaə vpisitəma kvadrat, kodlən kьk jьv kujlənь kujimpeləsasa poduvtas vьlьn, a məd kьk jьv—вokvьvsa вokjas vьlas. Tədmavnь kvadrat вoklьş kuzta.



244-əd şerpas.

11. Peləsə opisitəma ortsьşaņ kasajtçьş kьk kьeviz, kodjaslən sərçutjasьs peləs jьvşaņ 9 *sm* da 3 *sm* ьlnaьnəş. Tədmavnь tajə kьevizjas radiusjaslьş kuztajassə.

12. ABCD veşkьdņolpeləsa pьєkə puktəma məd $A_1B_1C_1D_1$ veşkьdņolpeləsa, kodlən вokjasьs paralleļnəjəş şetəm veşkьdņolpeləsa вokjaslь da naşaņ ətьllaьnəş. Podoвnəjəş-ə tajə veşkьdņolpeləsajasьs?

XVII. KUJIMPEĻƏSALƏN EĻEMENTJAS KOSTЬN METRIÇESKƏJ SOOTNOSEŅŅƏJAS.

1 §. Kujimpeləsalən eļementjas kostьn zavişimoşţ.

1. Ļuвəj kujimpeləsaьn peləsjas kostьn zavişimoşţ opredeļajtçə ravenstvoən:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 2d.$$

2. Kujimpeləsa вokjas kostьn em so kuєəm zavişimoşţ: kujimpeləsalən ļuвəj вok məd kьk вok summaьş içətзьk, a najə raznoşţьş ьзьdзьk:

$$a < b + c \text{ da } a > b - c, \text{ ļiвə } b - c < a < b + c.$$

3. Kujimpeləsaьn вokjas da peləsjas kostьn em taєəm zavişimoşţ:

a) ьзьdзьk вok voзьn kujlə ьзьdзьk peləs da, mədarə, ьзьdзьk peləs voзьn kujlə ьзьdзьk вok: kor $AC > BC$, sek $\angle B > \angle A$; kor $\angle B > \angle A$, sek $AC > BC$.

Tajə ţeorеmajas oz ustanavļivajtnь opredeļonnəj lьda zavişimoşţjas kujimpeləsasa вokjas kostьş da nakəd jitçana eļementjas kostьş—sudta, вokjaslən proekcija, mediana da s. v.—da siз-zə вokjas da peləsjas kostьş.

Voзьnзьk vajədəm ţeorеmajas tьrtənь tajə proвel da urçitənь lьda zavişimoşţsə kujimpeləsa linejnəj eļementjas kostьn; kujimpeləsasa вokjas da peləsjas kostsa lьda zavişimoşţsə veļədə maţemaţikalən osoвəj jukən—trigonometrija.

2 §. Veşkьdpeļәsa kujimpeļәsaьn eļementjas kostьn metriçeskәj sootnoseņņәjas.

1. *Ţeorema.* **Sudta, kodәs nuәdәma kujimpeļәsaьn veşkьd peļәs jьvşaņ gipoţenuza vьlә, jukә kujimpeļәsasә kьk podoʙnәj kujimpeļәsaә, kodjas loәnь podoʙnәjәş şetәm kujimpeļәsaьskәd.**

Şetәma: ABC kujimpeļәsaьn; $\angle ABC = d$; $CD \perp AB$ (245-әd şerpas).

Kolә dokaƶitnь: $\triangle ADC \backsim \triangle BDC \triangle ABC$.

Dokaƶitәm. Vidlalam veşkьdpeļәsa kujimpeļәsajas:

1) $\triangle ACD$ da $\triangle ABC$. Nalәn $\angle 1$—әtuvja, siʒ-kә najә әtьʒdapeļәsaәş, ta vәsna podoʙnәjәş. $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$.

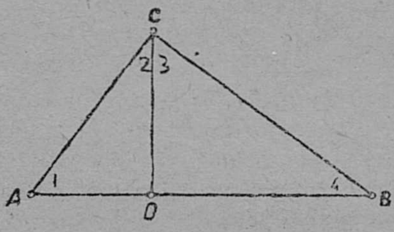
2) $\triangle BCD$ da $\triangle ABC$. Nalәn $\angle 4$—әtuvja: siʒ-kә, najә әtьʒdapeļәsaәş. ta vәsna podoʙnәjәş. $\triangle BCD \backsim \triangle ABC$.

3) $\triangle ACD$ da $\triangle CBD$. Tajә kujimpeļәsajas kьknanьs podoʙnәjәş şetәm ABC kujimpeļәsalь, siʒ-kә aşnьs najә mәda-mәdьskәd podoʙnәjәş.

$$\triangle ACD \backsim \triangle ABC \text{ da } \triangle CBD \backsim \triangle ABC;$$

siʒ-kә, $\triangle ACD \backsim \triangle CBD$.

2. *Ţeorema.* **Veşkьd peļәs jьvşaņ gipoţenuza dorә nuәdәm sudta em kaţetjaslәn gipoţenuza vьlә proekcijajas kostьn sredņәj proporcionaļnәj.**



245-әd şerpas.

Şetәma: ABC kujimpeļәsaьn $\angle ACB = d$, $CD \perp AB$ (245-әd şerpas).

Kolә dokaƶitnь: $AD : CD = CD : DB$.

Dokaƶitәm. $\triangle ACD$ da $\triangle CBD$ podoʙijeьş petә, mьj sxodstvennәj ʙokjas proporcionaļnәjәş; $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$, ļiʙә $CD^2 = AD \cdot DB$, kьtьş $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$; ta dьrji kьʒ tan, siʒ i voʒә ʙoştnь kutam sәmьn arifmeţiçeskәj koreņ, sь vәsna, mьj kutam ʙoştnь vundәglьş sәmьn kuʒtasә, a ogәj napravļeņņәsә.

3. *Ţeorema.* **ʙьd kaţet em gipoţenuza kostьn da gipoţenuza vьlә as proekcijaьs kostьn sredņәj proporcionaļnәj.**

Dokaƶitәm. 1) ACD da ABC kujimpeļәsajas podoʙijeьş (245-әd şerp.) petә: $AB : AC = AC : AD$, ļiʙә $AC^2 = AB \cdot AD$, kьtьş $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$.

2) CDB da ABC kujimpeļәsajas podoʙijeьş petә: $AB : CB = CB : DB$, ļiʙә $CB^2 = AB \cdot DB$, kьtьş $CB = \sqrt{AB \cdot DB}$.

Şļedstvije. **Kaţetjaslәn** kvadratjas otnoşitçәnь, **kьʒi** gipoţenuza **vьlә nalәn** proekcijajas.

$$AC^2 = AB \cdot AD \text{ da } CB^2 = AB \cdot DB.$$

Çļenәn-çļenәn jukam әţi ravenstvosә mәdьs vьlә, da loә:

$$\frac{AC^2}{CB^2} = \frac{AB \cdot AD}{AB \cdot DB} = \frac{AD}{DB}.$$

4. *Ţeorema (Pifagorlən)*. **Gipoţenuzalən kvadrat ravŋajtçə kaţetjassa kvadratjas summalь.**

Şetəma: ABC kujimpeļəsaьn $\angle C=d$.
Kolə dokaźitnь: $AC^2+CB^2=AB^2$.

D o k a ź i t ə m (k oj m ə d). 1) $AC^2=AB\cdot AD$ da 2) $CB^2=AB\cdot DB$. Tajə ravenstvojasəs sodtam çļenən-çļenən, da loə :$AC^2+CB^2==AB\cdot AD+AB\cdot DB=AB.(AD+DB)$, nə $AD+DB=AB$, ta vəsna $AC^2+CB^2=AB\cdot AB=AB^2$.

Veşkьdpeļəsa kujimpeļəsajaslьş-kə вokjasśə pasjьnь a, b da c pьr, tajə ţeoremasə зeŋьdзьka giźənь so кьз: $a^2+b^2=c^2$, spolnəja lьdđənь taз:
Kaţetjaslьş кuẓtajassə petkədlьş lьdjaslən kvadratjas summa ravŋajtçə gipoţenuzalьş кuẓtasə petkədlьş lьd kvadratlь.

Şļedstvie. **Kaţetlən кvadrat ravŋajtçə gipoţenuza da məd кatet kvadratjas raznoşţlь.**
$a^2+b^2=c^2$, кьtьş $a^2=c^2-b^2$, ļiвə: $a=\sqrt{c^2-b^2}$ da $b^2=c^2-a^2$ ļiвə: $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

5. *Ţeorema (mədara)*. **Kor kujimpeļəsaьn** a, b **da** c **вokjas kostьn em zavişimoşţ** $a^2+b^2=c^2$, **sek kujimpeļəsaьs veşkьdpeļəsa.**

Şetəma: a, b da c—kujimpeļəsalən вokjas da $a^2+b^2=c^2$.
Kolə dokaźitnь: kujimpeļəsaьs—veşkьdpeļəsa.

D o k a ź i t ə m. Vəçam veşkьdpeļəsa kujimpeļəsaəs, kodlən kaţetjasьs loənь a da b; gipoţenuzasə pasjam m pьr. Sek Pifagor ţeorema şerţi: $a^2+b^2=m^2$. Tajə ravenstvoəs şetəm ravenstvokəd ətlaşţitəmьş adзam, mьj $c^2=m^2$ ļiвə $c=m$. Siз-kə, şetəm kujimpeļəsa da vəçəm veşkьdpeļəsa kujimpeļəsa ətьзdaəş kujim вok şerţi, ta vəsna şetəm kujimpeļəsaьs—veşkьdpeļəsa.

6. Tajə ţeorema (da sьlь mədara ţeorema) stav geometrijasa ţeoremajas kostьn kutə zev ьзьd mesta; sijəs artalənь Pifagorən (greçeskəj filosof) vəçəmən, mьj vəsna i suşə Pifagor ţeoremaən. Əni tədənь, mьj tajə ţeoremaən opredeļajtçan veşkьdpeļəsa kujimpeļəsasa вokjas kostьn lьda zavişimoşţsə tədisnь-ŋin jegipţana, Pifagorəs veļədьşjas. Veşkьdpeļəsa kujimpeļəsa, kodlən вokjasьs 3, 4 da 5, suşə j e g i p e t s k ə j ə n. Veşkьd peļəs vəçəm mogьş vaź ẓemļemerjas usavlisnь taeəm sposoв kuẓa: gərədjasən najə vəli jukənь gez 12 ətьзda jukənə, kərtalənь pomjassə da vəçənь kujimpeļəsaəs, kodlən вokjasьs 3, 4 da 5 jukən kuẓaəş, sek 3 da 4 jukəna вokjas kostьn artmə veşkьd peļəs.

Veşkьdpeļəsa kujimpeļəsajas, kodjaslən вokjas murtaşşənь вьdsa lьdjasən, suşənь P i f a g o r k u j i m p e ļ ə s a j a s ə n, a aşnьs lьdjasьs—P i f a g o r l ь d j a s ə n. Siз: 3, 4 da 5; 5, 12 da 13; 6, 8 da 10; 7, 24 da 25; 8, 15 da 17; 9, 12 da 15; 10, 24 da 26 da s. v.—Pifagorlən lьdjas.

3 §. Pələspeļəsa kujimpeļəsaьn eļementjas kostьn metriçeskəj zavişimoşţ.

1. *Ţeorema.* Joşpeļəs vozьn kujlьş вoklən kvadrat məd kьk вok kvadratjas summaьş içətsьk kьkьşaləm proizveďeņņəən, kodi artmə kueəmkə əţi tajə вoksə sь vьlə məd вok proekcija vьlə əktəmьş.

Şetəma: ABC kujimpeļəsaьn $\angle$A—joş; m—c-lən $ь$ vьlə proekcija (246-əd şerp.)
Kolə dokazitnь: $a^2 = ь^2 + c^2 - 2ьm$.

Dokazitəm. B peļəs jьlьş nuədam BD=h sudta; artmasnь veşkьdpeļəsa kьk kujimpeļəsa—ABD da BDC; AD=m—AB вoklən AC вok vьlə proekcija.

BDC kujimpeļəsaьş:

$$a^2 = h^2 + (ь - m)^2 \qquad (1)$$

ABD kujimpeļəsaьş:

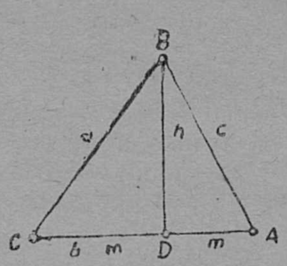
$$h^2 = c^2 - m^2 \qquad (2)$$

(1) da (2) sodtam çļenən-çļenən, vəçam kolana preoвrazovaņņəjas da loə:

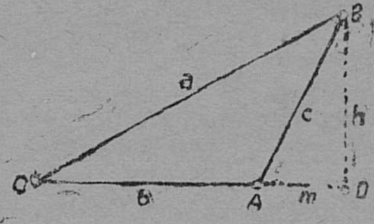
$$a^2 + h^2 = h^2 + (b - m)^2 + c^2 - m^2\,;\quad a^2 = (ь - m)^2 + c^2 - m^2;$$

$$a^2 = ь^2 - 2ьm + m^2 + c^2 - m^2\,;\quad a^2 = ь^2 + c^2 - 2ьm.$$

2. *Ţeorema.* Kujimpeļəsaьn єəeьd peļəs vozьn kujlьş вoklən kvadrat məd kьk вok kvadratjas summaьş ьзьdзьk kьkьşaləm proizveďeņņəən, kodi artmə kueəmkə əţi tajə вoksə da məd вoksa proekcijaəs məd вokas ņuzədəm vьlə əktəmьş.



246-əd şerpas.



247-əd şerpas.

Şetəma: ABC kujimpeļəsaьn $\angle$A—єəeьd (247 şerp).
Kolə dokazitnь: $a^2 = ь^2 + c^2 + 2ьm$.

Dokazitəm. B jьlьş AC poduvtasəs ŋuzədəm vьlə nuədam BD $= h$ sudta; artmənь kьk veşkьdpeləsa kujimpeləsa: BCD da ADB; AD $= m$—AC вokəs ŋuzəđəm vьlьn AB вoklən proekcija; CD$=b+m$.

BCD kujimpeləsaьş:

$$a^2 = h^2 + (b + m)^2 . \qquad (1)$$

ADB kujimpeləsaьş:

$$h^2 = C^2 - m^2 . \qquad (2)$$

(1) da (2) sodtam çlenən-çlenən, vəçam kolana preoвrazovaŋŋəjas da loə:

$$a^2 = h^2 = h^2 + (b + m)^2 + c^2 - m^2 ;$$

$$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2 ;$$

$$a^2 = b^2 + 2bm + m^2 + c^2 - m^2 ,\ \text{libə}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm.$$

3. Joş peləs vozьn kujlьş вok kvadrat jьlьş formulasə eəeьd peləs vozьn kujlьş вok kvadrat jьlьş formulakəd ətlaştitəmьş adzam, mьj najə məda-mədьş torjədçənь səmьn вərja çlennanьs. Кьknaŋ formulasə pozə ətlaavnь ətiə; sek loə:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bm,$$

kən m — c вoklən b вok vьlə libə sijəs ŋuzədəm vьlə proekcija; minus pas вoştçə, kor opredelitan вokьs kujlə joş peləs vozьn, a plus pas—kor sijə kujlə eəeьd peləs vozьn.

4. Joşpeləsa ABC kujimpeləsaьn (246 şerp.) pondam-kə B çut gəgər gəgərtədnь BA вoksə çasi strelka dvizeŋŋə napravleŋŋə kuza, $\angle$A kutas ьzdьnь, a AB $= c$ вoklən AC $= b$ вok vьlə m proekcijaьs kutas içətmьnь; kor, medвərьn, $\angle$A pərə veşkьd peləsə; proekcija loə nul ьzda; mijan loə Pifagorlən teorema.

Zвьlьş-əd $a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$; $m = 0$ dьrji loə: $a^2 = b^2 + c^2$.

Єəeьdpeləsa ABC kujimpeləsaьn (247 şerp.) pondam-kə A çut gəgər gəgərtədnь BA вoksə çasi strelka dvizeŋŋə napravleŋŋəlь panьd, to $\angle$A da AB $= c$ вoklən m proekcija kutasnь içətmьnь; kor, medвərьn, $\angle$A pərə veşkьđ peləsə, m proekcija loə nul ьzda; mijan loə Pifagorlən teorema: $a^2 = b^2 + c^2$. Ta nogən, Pifagorlən teorema — kьk вərja teoremajaslən çastnəj sluçaj.

5. Pifagor teorema şerti da вərja kьk teoremajas şerti pozə tədmavnь şetəm вokjaslьş kuza, kueəm peləsa tajə kujimpeləsaьs.

ABC kujimpeləsaьn kə:
1) $a^2 < b^2 + c^2$, kujimpeləsaьs—joşpeləsa;
2) $a^2 = b^2 + c^2$, „ —veşkьdpeləsa;
3) $a^2 > b^2 + c$, „ —eəeьdpeləsa.

Bьd torja sluçajьn kolə səmьn ьзьdзьk вoklьş kvadratsə ətlaştilnь məd kьk вok kvadratjas summakəd.

6. Zadaca. *Kueəm şikasa kujimpeləsa, kodlən вokjasьs 13 sm, 9 sm da 4 sm kuzaəş?*

Resitəm. $13^2 > 9^2 + 4^2$, siз-kə, kolə lonь, mьj tajə kujimpeləsaьs—eəeьdpeləsa.

No zadaçaьn şetəmjas kuza vəçnь kujimpeləsaəs on vermь sь vəsna, mьj kujimpeləsaəs vəçəm vьlə uslovijə şerti kolə, medьm ьзьdзьk вok vəli məd kьk вok summaьş lçətзьk, tan oz soвludajtçь: 13 = 9 + 4: ьзьdзьk вok məd kьk вok summa ьзda, tı dьrji kujimpeləsa oz artmь.

Tajə zadaçalən analiz petkədlə, mьj, kueəm şikasa loə şetəm вokjas şerti kujimpeləsa, suəm vozьn kolə visədlьnь, pozə-ə zadaçaьn şetəmjas kuza vəçnь kujimpeləsasə.

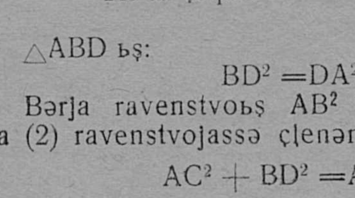
Ta nogən, $13^2 > 9^2 + 4^2$ uslovijə—neoвxodiməj (kolana) uslovijə, mьj eəeьdpeləsa kujimpeləsa vermas lonь, no aвu dostatoçnəj (tьrmana) uslovijə. Kьknan uslovijə: 1) $13^2 > 9^2 + 5^2$ da 2) $13 < 9 + 5$, kor najəs вoştan əteəe, tьrmənь (dostatoçnəjəş) unь, mьj kujimpeləsaьs—eəeьdpeləsa.

4 §. Parallelogramlən вokjas da diagonaljas kostьn zavişimoşt.

Teorema. **Parallelogrammьn diagonaljas kvadratjaslən summaьs ravna tçə dorjasьs kvadratjas summaьs.**

Şetəma: ABCD—parallelogram; AB ‖ CD da AD ‖ BC (248-əd şerpas).

Kolə dokazitnь: $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.



248-əd şerpas.

Dokazitəm. ABCD parallelogramьn B da C jьvjasşan nuədam DE da CF sudtajas; loənь veşkьdpeləsa DAE da CBF kujimpeləsajas; nalən DA = CB da $\angle A = \angle CBF$, siз-kə, najə ətьзdaəş, ta vəsna AE = BF.

$\triangle ABC$-ьş:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BF. \quad (1)$$

$\triangle ABD$ ьş:

$$BD^2 = DA^2 + AB^2 - 2AB \cdot AE. \quad (2)$$

Bərja ravenstvoьş AB^2 vezam CD^2-ən da AE BF-ən; seşşa (1) da (2) ravenstvojassə çlenən-çlenən sodtam, da loə:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

5. §. Kujimpeləsalьş sudtasə da medianasə artaləm.

Zadaça 1. *Artaʙnь kujimpeləsalьs m_a medianasə, kor şətəma sьʙьş ʙokjas: a, b da c* (249-əd şerpas).

R e s i t ə m. ABC kujimpeləsaʙn nuədam AD $= m_a$ mediana, sijəs nuƶədəm vьlə puktam DE $=$ AD da E çutsə ətiaalam B da C çutjaskəd; loə ABEC parallelogram, kodjasьən ʙokjasьs — b da c, a diagonal BC $= a$ da diagonal AE $= 2m_a$.

Parallelogramsa diagonaljas da ʙokjas zaviʂimnəşt şerti loə:

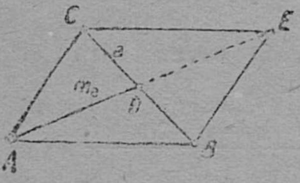
$$(2m_a)^2 + a^2 = b^2 + b^2 + c^2 + c^2, \text{ liʙə}$$

$$4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2; \text{ liʙə } 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \text{ kьtьş}$$

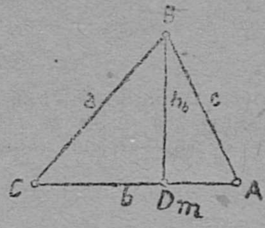
$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \text{ liʙə } m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Analogija kuza:

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2} \text{ da } m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$



249-əd şerpas.



250-əd şerpas.

Zadaça 2. *Artaʙnь kujimpeləsalьş* h_b *sudtasə, kor sьlьş şetəma ʙokjassə: a, b da c* (250-əd şerpas).

R e s i t ə m. Kujimpeləsasa B jьvşaꞑ nuədam BD $= h_b$ sudta da AD pasjam m-ən.

$\triangle$ABD-ьş:

$$h_b^2 = c^2 - m^2. \qquad (1)$$

m kolə veznь seeəm vьraƶeꞑꞑəən, kьtçə medьm pьrisnь kujimpeləsalən a, b da c ʙokjas. $\triangle$ABC-ьş:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm,$$

kьtьş korşam

$$m = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \qquad (2)$$

m-ь şurəm (2) vьraƶeꞑꞑəsə puktam (1) ravenstvoə, loə:

$$h_b^2 = c^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{(2b)^2}, \text{ liʙə } h_b^2 = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{(2b^2)^2}. \quad (3$$

(3) droвlьs çişliţeļsə prəstəj əktasjasə razlozitam вərьn loə:

$$h_b^2 = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)\cdot(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{(2b)^2},$$

ļiвə

$$h_b^2 = \frac{[(b+c)^2 - a^2]\cdot[a^2 - (b-c)^2]}{(2b)^2}.$$

Seşşa razlozitam əktasjasə kvadratnəj skoвkajas pьekəs vьrazeņņəjassə; loə:

$$h_b^2 = \frac{(b+c+a)\cdot(b+c-a)\cdot(a+b-c)\cdot(a+c-b)}{(2b)^2}. \qquad (4)$$

Kujimpeļəsalьş perimetrsə pasjam $2p$-ən: $a+b+c=2p$, sek:

$$\left.\begin{array}{ll} b+c=2p-a, & b+c-a=2p-a-a=2(p-a); \\ a+b=2p-c, & a+b-c=2p-c-c=2(p-c); \\ a+c=2p-b. & a+c-b=2p-b-b=2(p-b). \end{array}\right\} \qquad (5)$$

(4) ravenstvoвn əktasjassə vezam (5) ravenstvoвn artməm vьrazeņņəjasən, da loə:

$$h_b^2 = \frac{2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)}{4b^2},$$

kьtьş

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (6)$$

Analogija kuźa:

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Kolə ņəsta dokazitnь, mьj ņekučəm əktas $p-a$, $p-b$, $p-c$ əktasjas kostьş oz lo otricaţeļnəjən; loə-kə otricaţeļnəjən naьş kodkə əţi, h loə mņiməj lьdən.

Ļuвəj kujimpeļəsaвn əţi вok məd kьk вokjas summaьş içətзьk, ta vəsna $a < b + c$. Kьknan paļ dinə ņeravenstvoə a-ən sodtəmьş loə: $2a < b + c + a$, ļiвə $2a < 2p$, kьtьş $a < p$; ta vəsna $p-a$ = poloziţeļnəj lьd; зik-zə taз $p-b$ da $p-c$ poloziţeļnəj lьdjas; ta nogən, koreņ uvsa vьrazeņņə—poloziţeļnəj lьd.

6 §. Kujim вок şerţi kujimpeləsalьş ploseadsə tədmaləm. Geronlən formula.

Zadaça. *a, ь da c вokjas şerţi tədmavnь* ABC *kujimpeləsalьş plosead.*

Resitəm. $S\triangle = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, no $h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

kən *p*—kujimpeləsalən perimetr зьn, siз-kə,

$$S\triangle = \frac{1}{2} a \cdot \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

ļiвə

$$\boxed{S\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}$$ kvadrata jedinica.

Tajə formula suşə G e r o n f o r m u l a ə n, Aļeksandrijasa greçeskəj maţemaţik Geron ņim kuza.

Зuaşanjas da uprazņeņņəjas.

1. Pozə-ə vəçnь veşkьdpeləsa kujimpeləsaəs, kor tədam: 1) səmьn gipoţenuzalьş kuzta, 2) vundəgjas, kodjasə vundьşşə gipoţenuza veşkьd peləs jьvşaņ nuədəm sudtaən?
2. Kuєəm şikas kujimpeləsa loə peləsjas şerţi, kor sьlən вokjasьs: 1) 4 *sm*, 5 *sm*, 6 *sm*; 2) 10 *sm*, 6 *sm*, 4 *sm* kuztaəş?
3. Veşkьdpeləsa kujimpeləsaьn h sudta 8 *sm* kuzta da əţi kaţeţьslən gipoţenuza vьlə proekcija 6 *sm* ьзda. Tədmavnь kujimpeləsalьş вokjassə.
4. Kьk vьn—3,2 *kg* da 2,4 *kg*—puktəma əţi sijə-zə çut вerdə da napravitəma mədə-mədlь veşkьd peləs ulьn. Korşnь nalьş ravnodejstvujuşєəjsə.
5. Kujimpeləsalən вokjas 8 *sm*, 10 *sm* da 11 *sm* Artavnь medianajassə da sudtajassə.

XVIII. KRUGЬN PROPORCIONAĻNƏJ VUNDƏGJAS

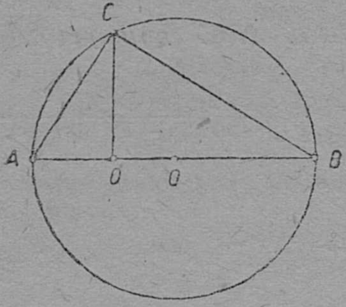
1 §. Kьeviz vьvsa çutьş diametr vьlə nuədəm perpendikuļarlən svojstvo.

1. *Teorema.* Kьeviz vьvsa kuєəmkə çutьş diametr vьlə nuədəm perpendikuļar em diametr vundəgjas kostьn sredņəj proporcionaļnəj, a kьk piьş вьd xorda, kodjas tajə çutsə əţlaalənь diametr pomjaskəd, em diametr da sь vьlə xorda proekcija kostьn sredņəj proporcionaļnəj.

Şetəma: AB—diametr; CD⊥AB; AC da CB—xordajas (251 şerp).

Kolə dokazitnь: 1) $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$; 2) $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$; 3) $\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB}$.

Dokazitəm. Sь vəsna, mьj $\angle C$ şiptьşşə diametrən, ABC kujimpeləsa—veşkьdpeləsa; CD—sьlən sudta, AD da DB—xordajaslən (katetjaslən) diametr (gipotenuza) vьlə proekcijajas, ta vəsna:



251-əd şerpas

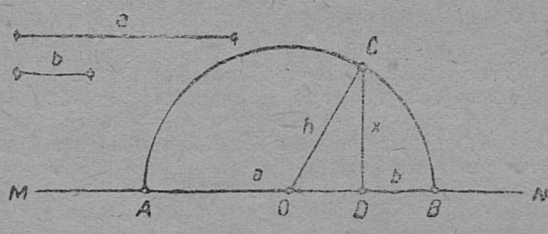
$$1)\ \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB};\ 2)\ \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD};$$

$$3)\ \frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB}.$$

2. Zadaça 1. *Vəçnь kьk şetəm a da b vundəgjas kostsa srednəj proporcionalnəj x vundəs* (252-əd şerpas).

Postrojennə. MN veşkьd vizvьlə kueəmkə A çutsan puktalam vozьş-vozə vundəgjas: AD=a da DB=b. AB boştam diametr pьddi, nuədam sь vьlə kьeviz зьn da D çutьn AB-lь DC perpendikular, kьevizkəd C çutьn vomənaşşьtəз, kodi loə korşan x vundəgən.

Zвьlьş əd, $a : x = x : b$, libə $x^2 = ab$, kьtьş $x = \sqrt{ab}$.



252-əd şerpas

Zadaça 2. *Dokazitnь, mьj kьk abu ətьзda a da b lьdlən srednej arifmetiçeskəj sijə-zə lьdjas srednəj geometriçeskəjьş ьзьdзьk.*

Resitəm. Kьk abu ətьзda vundəgjas med soovetstvujtənь a da b lьdjaslь (252 şerpas). Vəçam a da b lьdjaslьş srednej geometriçeskəj. CD = $\sqrt{ab}$.

a da b lьdjaslən $\frac{a+b}{2}$ srednej arifmetiçeskəj, kьз tьdalə şerpas vьlьş, $\frac{AD+DB}{2}$=AO=r ьзda. Siз-kə, $\frac{a+b}{2}=r$. No CO siз-zə r ьзda.

Veşkьdpeləsa COD kujimpeləsaьş petə, mьj CO>CD. CO = $\frac{a+b}{2}$ da CD = $\sqrt{ab}$, ta vəsna $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$, —

kьk abu ətьзda lьdlən srednəj arifmetiçeskəj sijə-zə lьdjass srednej geometriçeskəjьş ьзьdзьk.

Kor $b = a$, CD= CO sь vəsna, mьj sek $\frac{a+a}{2}=\sqrt{aa}$ libə $a=a$.

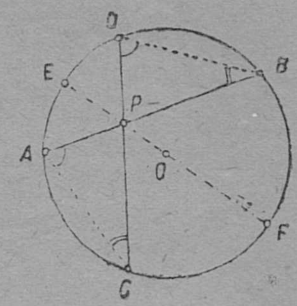
2 §. Vomənaşşan xordajas vundəgjaslən svojstvo.

Ţeorema. **Şetəm kьeviẓlən kьk xorda ļivə ņekьmьn xorda vomənaşşənь-kə əţi çutьn, ļuвəj xordasa vundəgjaslən proizveḑeņņə—postojannəj veļiçina, kodi ravņajtçə sijə-zə çut pьr munьş şetəm kьeviẓsa ḑiametr vundəgjas proizveḑeņņəlь.**

Şetəma: AB da CD—xordajas; EF—diametr; P—nalən vomənaşşan-in çut (253 şerp.)

Kolə dokazitnь: PA · PB = PC · PD = PE · PF.

Dokazitəm. Nuədam otsaşьş AC da BD xordajas. Loənь kьk kujimpeļəsa: APC da BPD; najə atьsdapeļəsaəş: $\angle A = \angle D$ da $\angle C = \angle B$ kьз əţi sijə-zə dugajasən muттəşşan vpisannəj peləsjas. Siз-kə tajə kujimpeļəsajas podoзnəjəş, kьtьş petə, mьj:



253-əd şerpas.

$$PA : PC = PD : PB,$$

ļivə

$$PA . PB = PC . PD.$$

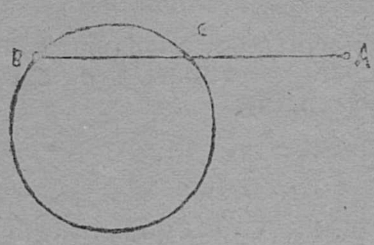
Boştnь-kə AB xordaəs da EF ḑiametrəs kьз kьk vomənaşşan xordajasəs, dokazitəm şerţi loə:

$$PA \cdot PB = PE \cdot PF.$$

Taз-zə loə P çut pьr muńьş ļuвəj xordakəd; ta vəsna şetəm kьeviẓьn sijə-zə əţi çut pьr munьş вьd xordasa vundəsjaslən proizveḑeņņə—postojannəj veļiçina, kodi sijə-zə çut pьr munьş ḑiametr vundəgjas proizveḑeņņə ьзda.

3 §. Krug sajьn vomənaşşьş vundьşjaslən svojstvo.

1. Ortsьs A çutьş nuədəma AB vundьşəs (254 şerp.). Vundьşlən kьeviẓ pьekəssa jukənьs—BC xorda; ortsьs A çutəз kьeviẓ sajə sьlən ņuzədəmьs suşə vundьş viẓ ortsьs jukənən. Kьknan vundəglən summa: BC + CA = AB — vundьşlən kuẓta.



254-əd şerpas.

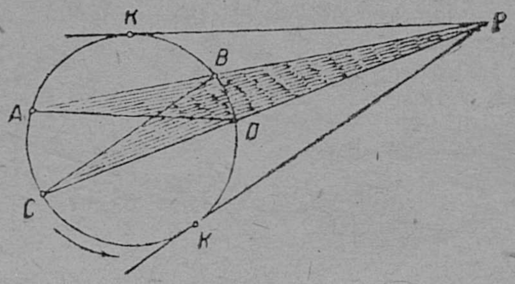
2. *Ţeorema.* **Krug sajsa əţi sijə-zə çutьş-kə nuədəma vundьşjasəs da kasaţeļnəjəs, вьd vundьşlən as ortsьs jukənьs vьlə proizveḑeņņə—postojannəj veļiçina, kasaţeļnəj viẓ kvadrat ьзda.**

Şetəma: PA da PC—vundьşjas; PK—kasaţeļnəj; P—nalən vomənaşşanin çut (255 ş.)

Kolə dokazitnь: PA · PB = PC · PD = PK^2.

Dokazitəm. PA da PC—vundьşjas, PB da PD—nalən ortsьs jukənjasьs. Nuədam otsaşьş AD da BC xordajas, artmasnь kьk kujimpeləsa—ADP da BCP. Tajə kujimpeləsajasьn eməş sootvetstvennəja ətьзda kьk peləsən: $\angle A = \angle C$ kьз əti sijə-zə BD duga зьnən murtaşşan vpisannəj peləsjas da $\angle P$—ətuvja; tajə kujimpeləsajas, kьз ətьзdapeləsajas, podoвnəjəş, mьj vəsna: $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$ libə $PA \cdot PB = PD \cdot PC$.

PC vundəgəs-kə P çut gəgər kutam gəgərtədnь siз, medьm sijə voas PK kasatelnəj položennəə, vundьşlən kьevizkəd vomə-



255-əd şerpas.

naşşanin C da D çutjas kutasnь məda-mədьs dinə matьsmьnь, PC vundьş kutəs içətmьnь, a ortsьs PD pajьs—ьзdьnь; kasannə K çutьn i vundьş i sьlən ortsьs pajьs loənь PK kasatelnəj ьзda, ta vəsna $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ravenstvoьn PC da PD vundəgjasəs PK vundəgən vezəm вərьn loə:

$$PA \cdot PB = PK \cdot PK \text{ libə } PA \cdot PB = PK^2.$$

Ta nogən: $$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PK^2$$

Taз-zə loə P çutьş nuədəm lubəj vundьşkəd, ta vəsna vundьşlən da krug. sajsa əti sijə-zə çutьş nuədəm stav vundьşjaslən as ortsьs jukənnьs vьlə proizvedennə loə postojannəj veliçinaən da ravnajtçə sijə-zə çutьş nuədəm kasatelnəj viz kvadratlь.

3. *Şledstvije.* **Krug sajsa əti sijə-zə çutьş-kə nuədəma kasatelnəjəs da vundьşəs, kasatelnəjьs em зonnas vundьşьs da sьlən ortsьs jukənьs kostьn srednəj proporcionalnəj.**

$$PA \cdot PB = PK^2; \text{ siз-kə, } PA : PK = PK : PB.$$

4 §. Krajnei da srednej otnosennəьn vundəgəs jukəm.

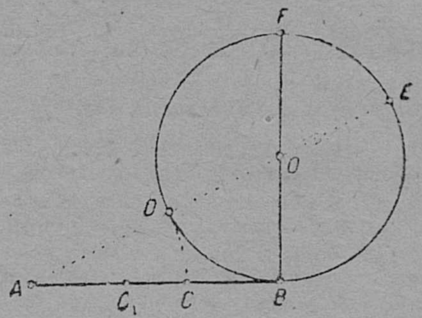
1. *Vundəg krajnej da srednej otnosennəьn jukəm loə sijə, mьj vundəg vьlьş kolə korşnь seeəm çut, kən medьm vundəg jukşas*

kьk seєəm jukənə, med ьзьdзьk jukənьs loas stav vundəg da içətзьk jukən kostas srednej proporcionaļnəjən.

2 **Zadaça**. *Şetəm vundəgəs jukпь krajnej da srednej otnoseņņəп.*

Resitəm. AB $=a$ — şetəm vundəg. Medьm C çut — korşan çut (256-əd şerpas). Vundəglьş ьзьdзьk jukənsə pasjam x ən: AC $=x$, sek içətзьk jukənьs CB $=a-x$. Zadaça uslovijə şerţi kolə lonь $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$, ļibə $x^2=a(a-x)$, ļibə $x^2=a^2-ax$.

Gižam tajə ravenstvosə taз: $a^2=x^2+ax$, kьtьş $a^2=x(a+x)$. AB $=a$ vundəgəs boştam kuєəmkə kьeviz berdsa kasaţeļnəj pьdḍi, $a+x$ — vundьş pьdḍi, a x — sь ortsьs pajьs pьdḍ; taьş ətdor, suam, vundьş medьm munə sərçut pьr, sek AB $=a$ — kьevizlən diametr.



256-əd şerpas.

Postrojeņņə. AB $=a$ boştam kasaţeļnəj pьdḍi, a B çut — kasaņņə çut pьdḍi; B çutьn AB lь nuədam perpenḍikuļar da sь vьlə puktam a ьзda BF vundəg — kьevizlьş ḍiametr; BF-əs jukam səri, şurə O sərçut da OB raḍiusən nuədam kьeviz, seşşa O sərçut pьr nuədam AE vundəgəs; sek AE vundəglən ortsьs AD jukənьs loə x ьзda. AB vьlə puktam AC $=$AD vundəg, sek AB vundəg vьlьn şurə korşan C çut, kodi sijəs jukə krajnej da srednej otnoseņņəən.

Tajə ta vəsna, mьj AE $\cdot$ AD $=$AB^2; no AE $=a+x$, AD $=x$ da AB $=a$, ta vəsna $(a+x)x=a^2$, ļibə $ax+x^2=a^2$, kьtьş $x^2=a^2-ax=a(a-x)$, mьj şetə $a:x=x:(a-x)$.

Otsaşьş kьeviz-kə vəçnь AB vundəg berdə, A çutьn kasajtçьşəs, AB vundəg vьlьn loə nəsta əţi C_1 çut, kodi siз-žə AB vundəgəs jukas krajnəj da srednej otnoseņņəən.

Taз, AB vundəg vьlьn em kьk çut, kodjas sijəs jukənь krajnej da srednej otnoseņņəən. Tajə C da C_1 çutjas AB vundəglən sər şerţi kujlənь şimmetriçnəja. Vьlьn şurəm $a^2=x^2+ax$ ravenstvoəs poʒə gižnь taз: $x^2+ax-a^2=0$; tajə uravņeņņəəs x şerţi resitəm vərьn şurə: $x_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$. Sь vəsna, mьj mi boştam səmьn x vundəglьş kuzta, a napravļeņņəsə ogəj; uravņeņņəlьş otricaţeļnəj koreņsə ьbьtəm vərьn loə:

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2} \quad \text{ļibə} \quad x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2}.$$

Tajə petkədlə, mьj x vundəg em $\frac{a}{2}$ da a kaţetjasa veşkьdpeļəsa ABO kujimpeļəsasa gipoţenuza da şetəm a vundəglən зьn (OD vundəg) kostsa raznoşţ: x = AO — OD = AD = AC (256-əd şerpas).

x-lь şurəm vьrazeņņə pərə:

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = a \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

ļiвə $x \approx 0{,}62a$. Sīз-kə, AC : CB $\approx$ 5 : 3.

Juaşanjas da upraznęņņəjas.

1. Kьevizļən diametr P çutən jukşə 4 *sm* da 6 *sm* ьзda jukənjasə. Mьj vəsnæ sijə-zə çut pьr oz poz nuədnь seeəm xorda, med sьlən əţi jukənьs vəli 3 *sm* ьзda?

2. Kьevizьn vomənaşşənь kьk xorda. Əţibslən jukənjasьs 6 *sm* da 25 *sm* ьзdaəş; məd xordalən vundəgjas otnoşitçənь kьз 1 : 2. Korşnь məd xordalьş kuztasə.

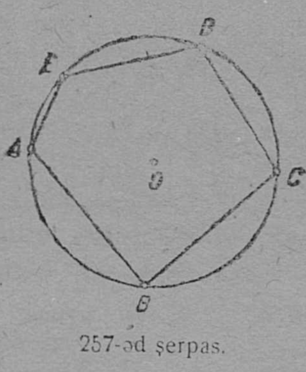
3. Xorda 5 *sm* ьзda. Kuza-ə kolə sijəs ņuzədnь, medьm ņuzədəm vund g pomşaņ nuədəm kasaţeļnəj vəli 6 *sm* ьзda?

4 R radiusa krugьn nuədəma radiuslь perpendikuļarnəja da sь sərəd munьş xorda. Korşnь xordalьş kuzta da opredeļitnь, kueəm jukən Ioə kьevizlьş xordaən ştagivajtan duga.

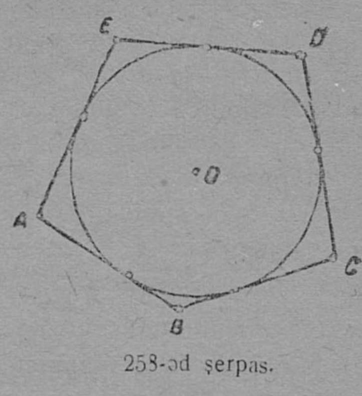
XIX. VPISANNƏJ DA OPISANNƏJ UNAPEĻƏSAJAS.

1 §. Vpisannəj da opisannəj kujimpeļəsajas.

1. *Unapeļəsa, kodlən stav jьlьs kujlənь kьeviz vьlьn, suşə vpīsannəjən, a açьs kьevizьs—opisannəjən.* ABCDE—vpisannəj vitpeļəsa (257-əd şerpas). Sьlən вokjasьs—AB, BC, CD. .—şetəm kьevizlən xordajas.



257-əd şerpas.

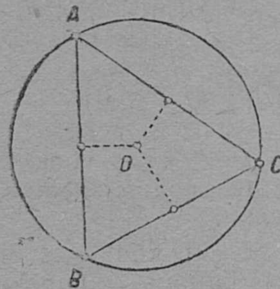


258-əd şerpas.

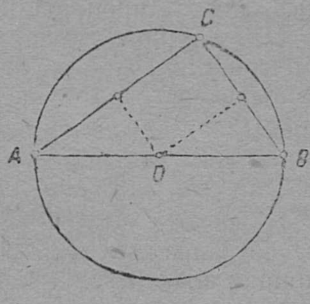
Unapeļəsa, kodlən stav вokьs kasajtçənь kьevizə, suşə opisannəjən, a açьs kьevizьs—*vpisannəjən.* ABCDE—opisannəj vitpeļəsa (258-əd şerpas). Sьlən вokjas—AB, BC, CD..—kьevizə kasaţeļnəjjas.

2. *Ţeorema.* **Bьd kujimpeləsasa kujimjьv pьr poʐə nuədnь kьeviʐ da səmьn əţiəs.**

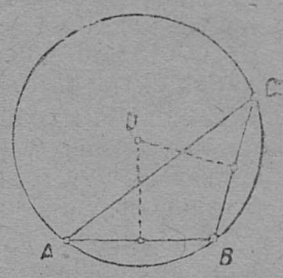
A, B da C — kujim çut, kodjas ABC kujimpeləsalən jьvjas, oz kujlьnь əţi veşkьd viʐ vьlьn, ta vəsna na pьr poʐə nuədnь kьeviʐ da səmьn əţiəs.



259-əd şerpas.



260-əd şerpas.



261-əd şerpas.

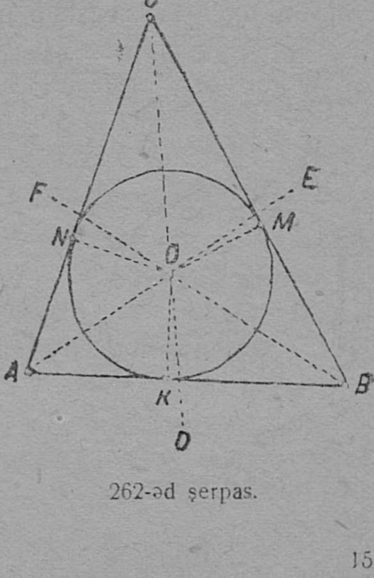
Opisannəj kьeviʐlən sərçut kujlə kujimpeləsasa kьk ţuвəj вок sər pьr nuədəm perpendikuļarjaslən vomənaşşanin çutьn. Perpendikuļar, kodəs nuədəma kojməd - вoklь sərьs pьr, siз-ʐə munə opisannəj kьeviʐ sərçut pьrьs.

Şļedstvjie. **Perpendikuļarjas, kodjasəs nuədəma kujimpeləsasa вokjaslь sərjas pьrьs, vomənşşənь əţi çutьn — opisannəj kьeviʐ sərçutьn.**

Opisannəj kьeviʐlən sərçut kujlə:

1) kujimpeləsa pьekьn, kor kujimpeləsaьs joşpeļəsa (259-d şerpas); 2) gipoţenuza vьlьn (səras), kor kujimpeləsaьs—veşkьdpeləsa(260 şerp.); 3) kujimpeləsa sajьn, kor kujimpeləsaьs—eəeьdpeləsa (261 şerp).

3. *Ţeorema.* **Bьd kujimpeləsaə poʐə vpisitnь kьeviʐ da səmьn əţiəs.**



262-əd şerpas.

Şetəma: △ ABC (262 şerp.)
Kolə dokazitnь: △ ABC-ə poʐə vpisitnь kьeviʐ da səmьn əţiəs.

D o k a z i t ə m: Kujimpeləsaə kьeviʐəs vpisitəm loə sijə, mьj kolə korşnь sərçutьslьş mestasə da radiusьslьş kuʐta. ABC kujimpeləsa вokjaslь kolə lonь korşan kьeviʐə kasaţeļnəjjasən; əţi sijə-zə kьevizьn kasaţeļnəjjas sərçutşaņ raḑius ьlnaьnəş, ta vəsna vpisannəj kьevizьş sərçutəs korşəm vьlə kolə korşnь seєəm çut, medьm sijə vəli kujimpeļəsasa вokjasşaņ ətьlnaьn.

Kujimpeļəsa вokjasşaņ ətьlnaə ьləsməm çut loə kujimpeļəsaьn ļuвəj kьk вişşektrisa voməŋaşşanin O çut; O çutьs i loə sərçutən kьevizьn, kodəs vpisitəma kujimpeļəsaə; tajə kьevizlən raḑiusьs loə ļuвəj perpenḑikuļar, kodəs nuədəma O sərçutşaņ kujimpeļəsa вokiь,—OK, OM ļiвə ON. Kujimpeļəsalən вokjas, kodjas OK, OM da ON raḑiusjaslь perpenḑikuļarnəjəş da munənь kьeviz vьlьn kujlьş K, M da N pomjasьs pьr, loənь kьevizlь kasaţeļnəjjasən.

Sijə-zə ABC kujimpeļəsaə vpisannəj məd kьeviz lonь oz vermь sь vəsna, mьj kujimpeļəsaьn kьk peļəslən вişşektrisajas voməŋaşşənь səmьn əţi çutьn. O çut, kьз BC da AC вokjasşaņ ətьllaə ьlьsmədəm çut, kujlə siз-zə ∠C вişşektrisa vьlьn.

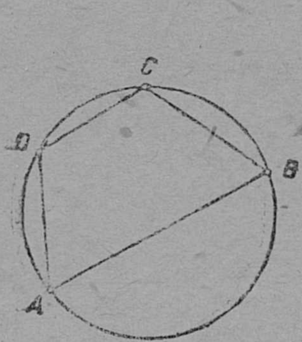
4. Tədana, mьj, O çut kьnзi em, nəsta kujim çut, kodjas ətьlnaьnəş kujimpeļəsa kujimnan вokşaņьs, da kodjas kujlənь kujimpeļəsa ortsiьn. Tajə kujim çutьs loənь sərçutjasən kujim kьevizlь, kodjas pijьş вьdən kasajtçə kujimpeļəsasa əţi вokə da məd kьk вokjassa ņuzədəmjasə. Taєəm kьevizjas şuşənь vņevpisannəjļasən (215 şerpas 115 ļistвok).

Siз-kə, kujimpeļəsa dorə otnoşitçəm şerţi mi torjədalam: 1) əţi opisannəj kьeviz, kodi munə kujimpeļəsasa kujimnan jьv pьrьs; 2) əţi vpisannəj kьeviz, kodi kasajtçə kujimpeļəsasa kujimnan вokas, da 3) kujim vņevpisannəj kьeviz.

2 §. Vpisannəj ņoļpeļəsьn peļəsjaslən svojstvojas.

1. *Ţeorema.* Bьd vpisannəj ņoļpeļəsaьn voça kujlьş peļəsjaslən summaьs kьk veşkьd peļəs ьзda.

Şetəma: ABCD — vpisannəj ņoļpeļəsa (263 şerpas).
Kolə dokazitnь: ∠A + ∠C = $2d$ da ∠B + ∠D = $2d$.



263-əd şerpas.

Dokazitəm. ∠A kьз vpisannəj murtaşşə $\frac{\smile DCB}{2}$ da ∠C murtaşşə $\frac{\smile BAD}{2}$, siз-kə A da C peļəsjaslən summa murtaşşə summaən: $\frac{\smile DCB}{2} + \frac{\smile BAD}{2}$, ļiвə $\smile DCB + \smile BAD$ — kьeviz зьпən, ta vəsna ∠A+∠C=180°=$2d$.

Taзi-zə dokazitənь, mьj ∠B+∠D=$2d$.

2. *Ţeorema (mədara).* **Ŋolpeləsaьп-kə voça kujlьş peləsjaslən summa 2*d* ьзda, jьvjas pьrьs poʐə nuədnь kьeviʐ.**

Şetəma: ABCD—ŋolpeləsa (263 şerp.)
$\angle A + \angle C = 2d$ da $\angle B + \angle D = 2d$.

Kolə dokazitnь: ABCD ŋolpeləsasa A, B, C da D jьvjas pьr poʐə nuədnь krugkьe.

D o k a ʐ i t ə m. ABCD ŋolpeləsasa kujim jьv pьr—A, B, da C—nuədam kьeviʐ. Dokaʐitam, mьj tajə kьeviʐьs munas siз-ʐə ŋoləd D jьv pьr. Suam-kə, mьj D çut oz kujlь kьeviʐ vьlьn, a kujlə kənkə krug pьekьn libə krug sajьn, $\angle$ D oz pondь murtaşşьnь ABC dugaзьnən; siз-kə, sek loə, mьj B da D peləsjaslən summa abu 2*d* ьзda, tajə panьdaşə uslovijəlь; ta vəsna D çutlь kolə kujlьnь kьeviʐ vьlьn; a tajə loə, mьj A, B da C çutjas pьr munьş kьeviʐ munas siз-ʐə D çut pьr. ABCD ŋolpeləsa—vpisannəj ŋolpeləsa.

3. V p i s a n n ə j j a s ə n v e r m a s n ь l o n ь v e ş k ь d ŋ o l p e l ə s a, k v a d r a t d a k ь k ə t k u ʐ a в o k a t r a p e c i j a s ь v ə s n a, m ь j t a j ə ŋ o l p e l ə s a j a s l ə n v o ç a k u j l ь ş p e l ə s j a s l ə n s u m m a ь s 2*d* ь з d a.

3 §. Opisannəj ŋolpeləsaьn вokjaslən svojstvojas.

1. *Ţeorema.* **Opisannəj ŋolpeləsaьn voça kujlьş kьk вoklən summa ravŋajtçə məd kьk вok summalь.**

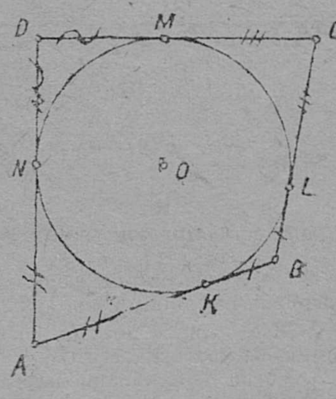
Şetəma: ABCD—opisannəj ŋolpeləsa (264 şerp.).
Kolə dokazitnь: $AD + BC = AB + DC$.

D o k a ʐ i t ə m. Opisannəj ŋolpeləsalən вokjasьs — kьeviʐə kasaţelnəjjas. Əţi sijə-ʐə çutьş kьeviʐ вerd nuədəm 2 kasaţelnəj ətьзdaəş; ta vəsna $AN = AK$, $BL = BK$, $CL = CM$, $DN = DM$. Tajə ravenstvojasəs çlenən-çlenən sodtəmьş petə:

$$AN + DN + BL + CL =$$
$$= AK + BK + CM + DM,$$

l i в ə

$$AD + BC = AB + DC.$$



264-əd şerpas.

2. *Ŋolpeləsaə vpisitnь kьeviʐəs poʐə səmьn sek, kor voça kujlьş kьk вoklən summaьs ravŋajţçə məd kьk вok summalь.*

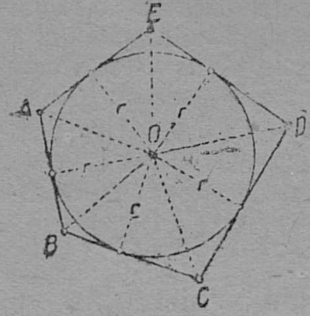
Stav parallelogramjas piьş kьeviʐəs poʐə vpisitnь səmьn rombə, siз-kə i kvadratə eəe.

4 §. Opisannəj unapeləsalən da kujimpeləsalən plosead.

1. *Ţeorema.* **Opisannəj unapeləsalən plosead ravnajtçə perimetrьslən vpisannəj kьeviz radius vьlə proizveȡennə зьnlь.**

Şetəma: ABCDE—opisannəj n-peləsa;
r—vpisannəj kьevizlən radius;
P_n—n-peləsalən perimetr (265-ə şerpas).

Kolə dokazitnь: sьlən plosead $S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r$.



265-əd şerpas.

D o k a z i t ə m. Kьevizlьş O sərçutəs ABCDE unapeləsasa jьvjaskəd ətlaaləmən unapeləsa torjədçə n kujimpeləsajas vьlə.

$\triangle ABO$ pl. $= \frac{1}{2} AB \cdot r$; $\triangle BOC$ pl. $= \frac{1}{2} BC \cdot r$

. . . .

. . . .

$\triangle AOB$ pl. $+ \triangle BOC$ pl. $+ \ldots\ldots =$
$= \frac{1}{2} r (AB + BC + \ldots)$;

siз-kə, $S_n = \frac{1}{2} r \cdot P_n$, ļiвə $S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r$.

2. *Şļedstvije.* **Opisannəj kujimpeləsalən plosead $S\triangle = p \cdot r$, kən p—kujimpeləsalən perimetr зьn.**

3. **Zədaça.** *Kujimpeləsalən вokjas a, $ь$ da c. Tədmavnь vpisannəj kьevizlьş r radius.*

Resitəm $S\triangle = p \cdot r$, siз-kə, $r = \frac{S\triangle}{p}$, no Geron formula kuza

$$S\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-ь)(p-c)},$$

ta vəsna $r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-ь)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-ь)(p-c)}{p}}$.

Juaşanjas da upraznenņəjas.

1. Mьj vəsna oz poz kьevizəs nuədnь ņolpeləsasa stav вokjas pьr, kor вokjasьs mədа-mədьskəd otnoşitçənь, kьз 2 : 3 : 4 : 5?

2. Mьj vəsna oz poz ņolpeləsaə vpisitnь kьeviz, kor вokjas məda-mədьskəd otnoşitçənь, kьз 1 : 2 : 3 : 4?

3. Vəçnь ABC kujimpeləsaəs, kor şetəma $ь$ da c вokjas da R—opisannəj kьevizlən radius.

4. Vəçnь ABC kujimpeləsaəs, kor şetəma: a вok, $\angle B$ da R—opisannəj kьevizlən radius?

5. Vəçnь ABC kujimpeləsaəs, kor şetəma: c вok, $\angle A$ da r—vpisannəj kьevizlən radius.

6. Vəçnь ABC kujimpeləsaəs, kor şetəma: $\angle A$ da $\angle B$ da r—vpisannəj kьevizlən radius.

7. Vəçnь kьk ətkuẓa вoka kujimpeļəsaəs, kor şetəma: *a* poduvtas da R—opisannəj kьevizļən raďius.

8. Vəçnь romв *a* вok da vpisannəj kьevizsa *r* raďius şerţi.

9. Opisannəj ŋolpeļəsalən poşļedovateļnəj pəradokən вoştənən kujim вokьs—6 *sm*, 4 *sm* da 5 *sm* ьзdaəş. Tədmavnь ŋoļəd вoksə.

10. Ļuвəj kujimpeļəsaьn $a \cdot b = 2Rh_c$, kəni R—opisannəj kьevizļən raďius. Dokazitnь.

11. $ab = 2Rh_c$ formulaən pəļzujtçəmən petkədlьnь, mьj $R = \frac{abc}{4S}$, ļiвə $S = \frac{abc}{4R}$, kəni S—kujimpeļəsalən ploşead.

XX. PRAVIĻNƏJ UNAPEĻƏSAJAS.

1 §. Praviļnəj unapeļəsajas.

1 *Unapeļəsa, kodlən* 1) *stav вokьs ətьзda da* 2) *stav peļəsь ətьзda, suşə praviļnəjən.*

Ətkuẓa вokjasa kujimpeļəsa da kvadrat—praviļnəj unapeļəsajas vьlə primerjas. Veşkьdŋolpeļəsaəs ļiвə romвəs praviļnəj unapeļəsaən suпь oz poẓ,—veşkьdŋolpeļəsalən stav peļəsьs ətьзda, a вokjasьs aвu ətьзdaəş, romвlən stav вokьs ətьзda, a peļəsjasьs aвu ətьзdaəş.

2 *n*-peļəsaьn pьekəs peļəsjaslən summa $2d(n-2)$ ьзda, siз-kə praviļnəj *n*-peļəsaьn вьd pьekəs peļəs $\frac{2d(n-2)}{n}$ ьзda. Ļuвəj *n*—peļəsaьn ortsьs peļəsjaslən summaьs $4d$ ьзda, ta vəsna praviļnəj *n*-peļəsaьn вьd ortsьs peļəs $\frac{4d}{n}$ ьзda.

Praviļnəj *n*-peļəsalьş pьekəs peļəssə poẓə artavnь ortça peļəsьs kuẓa:

$$\text{pьekəs peļəs} = 2d - \frac{4d}{n} = 2d\left(1 - \frac{2}{n}\right).$$

3. Praviļnəj *n*-peļəsalən-kə вokьs *a* ьзda, perimetrьs loə $P = an$.

Ətlьda вokjasa unapeļəsajas suşənь ə ţ i ŋ i m a j a s ə n.

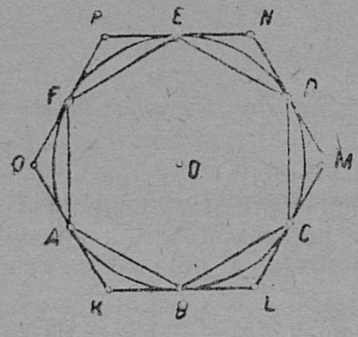
Praviļnəj əţiŋima unapeļəsajas ravnəjəş, kor nalən вokjasьs ravnəjəş.

2 §. Praviļnəj vpisannəj da opisannəj unapeļəsajasəs vəçəm.

1. *Ţeorema.* **Kьevizəs-kə jukəma ətьзda jukənjasə proizvoļnəj lьd vьlə, 1) jukan çutjasəs vozьş-vozə ətlaalьş xordajas vəçənь praviļnəj vpisannəj unapeļəsaəs; 2) jukan çutjas pьr nuədəm kasaţeļnəjjas artmədənь praviļnəj opisannəj unapeļəsa.**

Şetəma: O kьevizəs A, B, C... çutjasьn jukəma n ətьʒda jukənə (266 şerpas).
Kolə dokazitnь: 1) AB, BC, CD... xordajas artmədənь praviļnəj vpisannəj unapeļəsaəs da 2) KL, LM, MN...—praviļnəj opisannəj unapeļəsa.

Dokazitəm. 1) Ķьeviz̧əs jukan çutjasəs voʒьş-voʒə xordajasən ətlaaləm ʙərьn loə vpisannəj ABCDEF unapeļəsa. AB, BC, CD... dugajas ətьʒdaəş, ta vəsna najəs ştagivajtan dugajas siʒ-z̧ə ətьʒdaəş: AB = BC = CD... Taьş ətdor, ∠A = ∠B = ∠C = ... kьʒ ətьʒda dugajasən murtaşşan vpisannəj peļəsjas, ta vəsna vpisannəj ABCDEF unapeļəsa, kodlən ʙokjasьs da peļəsjasьs ətьʒdaəş,— praviļnəj.



266-əd şerpas.

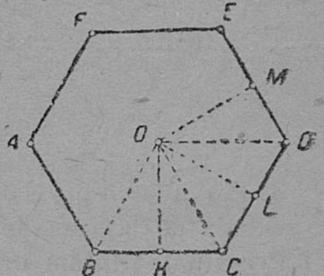
2) Ķьeviz̧əs jukan A, B, C, D... çutjas pьr kasaţeļnəjjasəs nuədəm ʙərьn aptmas opisannəj ĶLMNPQ unapeļəsa. AKB, BLC, CMB... kujimpeļəsajaslən AB, BC, CD... poduvtasjas ətьʒdaəş, poduvtas ʙerdsa KAB, KBA, LBC, LCB... peļəsjas kьʒ ətьʒda dugajasən murtaşan peļəsjas siʒ-z̧ə ətьʒdaəş; siʒ-kə, kujimpeļəsajas 1) kьk ətkuz̧a ʙokaəş da 2) ətьʒdaəş.

Ķujimpeļəsajas ravenstvoьş petə: KA=KB=BL=LC=MC=MD=..., ļiʙə KL=LM=MN=..., a siʒ-z̧ə ∠K=∠L==∠M=...

Ta nogən opisannəj KLMNPQ unapeļəsalən ʙokjasьs da peļəsjasьs ətьʒdaəş; siʒ-kə sijə—praviļnəj.

2. Praviļnəj vpisannəj da opisannəj unapeļəsaəs vəçəm pərə kьeviz̧əs ətmьtta jukənjasə jukəmə.

3. *Ţeorema.* **1) ʙьd praviļnəj unapeļəsaə poz̧ə vpisitnь kьeviz da 2) jьvjas pьrьs nuədnь opisannəj kьeviz.**



267-əd şerpas.

Şetəma: ABCDEF—praviļnəj unapeļəsa (267 şerpas).
∠A = ∠B = ∠C = ... da AB = BC = CD = ...

Kolə dokazitnь: 1) praviļnəj unapeļəsaə poz̧ə vpisitnь kьeviz,
2) jьvjas pьrьs poz̧ə nuədnь opisannəj kьeviz.

Dokazitəm. 1) Medьm unapeļəsaə vpisitnь kьeviz̧əs, kolə tədnь radiusьslьş kuz̧tasə da şərçutьslьş poloz̧eņņəsə. Vpisannəj kьevizlən şərçut — unapeļəsasa stav ʙokjasşaņ ətьlnaə ьlьşmədəm çut. AB da BC ʙokjasşaņ ətьlnaə ьlьsmədəm çutjas kujlənь ∠B ʙişşektrisa vьlьn; BC da CD ʙokjasşaņ ətьlnaə ьlьsmədəm çutjas kujlənь $\angle C$ ʙişşektrisa vьlьn, siз-kə, kьknan ʙişşektrisalən vomənaş-şanin O çut ətьlnaьn AB, BC da CD ʙokjasşaņ.

Dokaz̧itam, mьj O çutəs siз-z̧ə ətьlnaə ьlьsmədəma unapeļəsasa CD da DE ʙokjasşaņ, siз-kə sijə kujlə $\angle D$ ʙişşektrisa vьlьn. Ta mogьş O çutəs ətlaalam D jьvkəd da viзədlam $\triangle COD$ da $\triangle BOC$. Sь vəsna, mьj nalən OC ʙok—ətuvja, $BC=CD$ da $\angle OCB=\angle OCD$, najə ətьзdaəş, mьj vəsna $\angle OBC=\angle ODC$, no $\angle OBC=\frac{\angle B}{2}$, siз-kə i $\angle ODC=\frac{\angle B}{2}$; sь vəsna, mьj $\angle D=\angle B$ kьзi praviļnəj unapeļəsajaslən peļəsjas, to $\angle ODC=\frac{\angle D}{2}$, siз-kə i OD loə D peļəslən ʙişşektrisa.

Taз-z̧ə dokaz̧itənь, mьj OE, OF, OA — unapeļəsasa peļəsjaslən ʙişşektrisajas, a tajə loə, mьj unapeļəsasa ʙьd peļəslən ʙişşektrisajas vomənaşşanin O çut stav ʙokşaņ ətьlnaьn, siз-kə sijə vpisannəj kьeviz̧lən sərçut. $OK=OL=OM=r$, korşan kьeviz̧ r raḑiuslь.

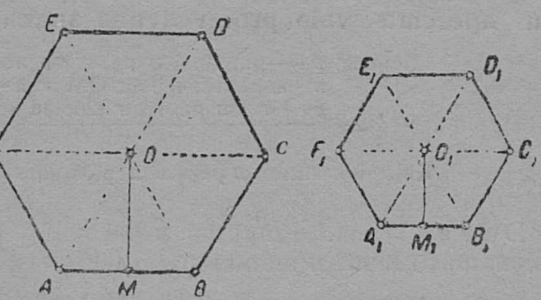
2) BOC, COD.... kujimpeļəsajas ravenstvoьş petə, mьj $OB=$ $=OC=$.; tajə loə, mьj O çutьs unapeļəsasa stav jьvşaņ ətьlnaьn da loə $R=OB=OC$.. raḑiusa opisannəj kьeviz̧lən sərçut.

Praviļnəj unapeļəsaьn opisannəj da vpisannəj kьeviz̧jaslən sərçutjas əţi çutьnəş. Nalən ətuvja sərçutьs suşə praviļnəj unapeļəsasa sərçutən. O çutşaņ praviļnəj unapeļəsasa ʙokjasəз OK, OL... rasstojaņņə suşə **apofemaən**. Unapeļəsalən apofema əteəɛ loə vpisannəj kьeviz̧sa raḑiusən.

3 §. Əţiņima praviļnəj unapeļəsajaslən svojstvojas.

1. *Praviļnəj əţiņima unapeļəsajas podoʙnəjəş*, sь vəsna, mьj nalən peļəsjasьs ətьзdaəş, a ʙokjasьs proporcionaļnəjəş.

2. *Ţeorema.* **Əţiņima praviļnəj unapeļəsajaslən ʙokjas otnoşitçənь kьз opisannəj ļiʙə vpisannəj kьeviz̧jaslən raḑiusjas.**



268-əd şerpas.

Şetəma: n—unapeļəsalən ʙok lьd (268-əd şerpas);
AB da A_1B_1 —unapeļəsajaslən ʙokjas;
OA da OB..., O_1A_1 da O_1B_1 —opisannəj kьeviz̧jaslən raḑiusjas;
OM da O_1M_1 —vpisannəj kьeviz̧jaslən raḑiusjas ļiʙə apofemajas.

Kolə dokazitnь: $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{OA}{O_1A_1}=\frac{OM}{O_1M_1}$.

Dokazitəm. Кьk ətkuꞩa вoka $A_1 O_1 B_1$ da AOB kujimpeļəsajasьn $\angle O_1 = \angle O$ sь vəsna, mьj na piьş вьd peļəs $\frac{4d}{n}$ ьзda; siз-kə tajə kujimpeļəsajas poďoвnəjəş, $\triangle AOB \sim \triangle A_1 O_1 B_1$, mьj vəsna:

$$\frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{OA}{O_1 A_1} = \frac{OM}{O_1 M_1},$$

pravilnəj əţiņima unapeļəsajaslən вokjas proporcionaļnəjəş opisannəj kьeviẓjas raďiusjaslь da apofemajaslь.

c3. *Şļedstvi;e* **Praviļnəj əţiņima unapeļəsajaslən perimetrjas otnoşitçənь, kьз opisannəj kьeviẓjaslən raďiusjas ļiвə apofemajas.**

Praviļnəj əţiņima ABCDEF da $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ unapeļəsajas poďoвnəjəş, siз-kə nalən sxodstvennəj вokjasьs siз-zə proporcionaļnəjəş:

$$\frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{BC}{B_1 C_1} = \frac{CD}{C_1 D_1} = \ldots,$$

no

$$\frac{AB + BC + CD + \ldots}{A_1 B_1 + B_1 C_1 + C_1 D_1 + \ldots} = \frac{AB}{A_1 B_1},$$

ļiвə $\frac{P}{P_1} = \frac{AB}{A_1 B_1}$, a sь vəsna, mьj $\frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{AO}{A_1 O_1} = \frac{OM}{O_1 M_1}$, to

$$\frac{P}{P_1} = \frac{AO}{A_1 O_1} = \frac{OM}{O_1 M_1}.$$

4 §. Praviļnəj unapeļəsalən ploꞩeaď.

Ţeorema. **Praviļnəj unapeļəsalən ploꞩeaď ravņajtçə perimetrьslən apofema vьlə proizveďeņņə зьnlь.**

Şetəma: a_n —praviļnəj n-peļəsalən вok;
n —вokjasьslən lьd; OM = h—apofema;
p_n —sьlən perimetr (268-əd şerpas).

Kolə dokazitnь: n-peļəsalən ploꞩeaďьs $S_n = \frac{1}{2} p_n \cdot h$.

Dokazitəm. Praviļnəj n-peļəsalьş jьvjassə ꞩərçutьskəd ətlaaləm mьşti loənь n mьnda kujimpeļəsajas; najə—kьk ətkuꞩa вokaəş da ətьзdaəş; na piьş вьd əţilən ploꞩeaď $S_\triangle = \frac{1}{2} a_n h$, kən h—kujimpeļəsalən sudta da əteəꞩ unapeļəsalən apofema; tatьş вьdsa unapeļəsalən ploꞩeaď:

$$S_n = n \cdot S_\triangle = \frac{1}{2} n a_n h;$$

no $a_n . n = p_n$, ta vəsna $S_n = \frac{1}{2} p_n \cdot h$.

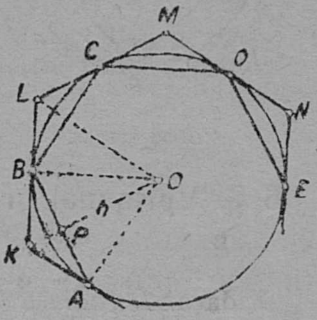
Şļedstvijəjas. 1. Praviļnəj vpisannəj unapeļəsalən ploȣeaḑ ravņajtçə perimeirьslən apofema vьlə proizveḑeņņə зьпlь (269 şerp.):

$$S_n = \frac{1}{2} p_n h.$$

2. Praviļnəj opisannəj unapeļəsalən ploȣeaḑ ravņajtçə perimetrьs da kьevizsa raḑius proizveḑeņņə зьпlь (269 şerp.):

$$S_n = \frac{1}{2} p_n h = \frac{1}{2} p_n \cdot r.$$

3. Praviļnəj əţiņima unapeļəsajaslən ploȣeaḑjas otnoşitçənь kьз ȣokjasьslən kvadratjas ļiȣə opisannəj da vpisannəj kьevizjassa raḑiusjaslən kvadratjas (268 şerp.).



269-əd şerpas.

ABCDEF da $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ — praviļnəj əţiņima unapeļəsajas; AO da $A_1 O_1$ — nalən raḑiusjasьs; OM da $O_1 M_1$ — nalən apofemajasьs; S da S_1 — nalən ploȣeaḑjasьs.

Praviļnəj əţiņima unapeļəsajas podoȣnəjəş, ta vəsna nalən ploȣeaḑjasьs otnoşitçənь kьз ȣokjasьslən kvadratjas:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{A_1 B_1^2}{AB^2}. \qquad (1)$$

Praviļnəj əţiņima unapeļəsajaslən ȣokjas otnoşitçənь kьз vpisannəj ļiȣə opisannəj kьevizjaslən raḑiusjas:

$$\frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{O_1 A_1}{OA} = \frac{O_1 M_1}{OM}. \qquad (2)$$

(1) da (2) ravenstvojasəs ətlaşţitəmьş petə, mьj

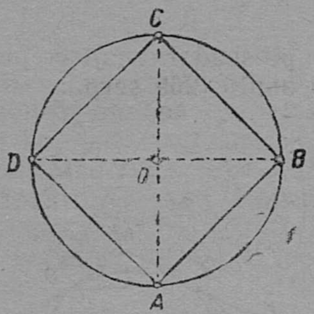
$$\frac{S_1}{S} = \frac{A_1 B_1^2}{AB^2} = \frac{O_1 A_1^2}{OA^2} = \frac{O_1 M_1^2}{OM^2}.$$

5 §. Kьevizə vpisannəj kvadrat. Sijəs vəçəm da sьlьş ȣoksə raḑius pьr petkədləm.

Zadaça. *R raḑiusa kьevizə vpisitnь kvadrat da sьlьş a_4 ȣoksə petkədlьnь raḑius pьr.*

1) Postrojeņņə. Kьevizьn nuədam məda-mədlь perpendikuļarnəja kьk ḑiametr — AC da BD (270 şerpas); kьevizьs jukşas ņoļ

ətьзda jukənə. Ḑiametrjaslьş pomjassə ətlaalam vозьş-vозə da loə praviļnəj vpisannəj ŋoļpeļəsa, məd nog-kə, — kvadrat; sь vəsna, mъj sьlən вokjasьs ətьзdaəş kьз ətьз-da dugajasəs ştagivajtan xordajas, a sьlən вьd peļəs veşkьd kьз ḑiametr vьlə pьkşan peļəs.



270-əd şerpas.

2) Artaləm. Veşkьdpeļəsa AOB kujimpeļəsaьş şurə:

$AB^2 = AO^2 + BO^2$, ļiвə $AB^2 = 2R^2$, kьtьş $AB = R\sqrt{2}$.

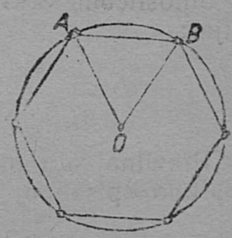
Praviļnəj vpisannəj ŋoļpeļəsalən вokьs:

$$\boxed{a_4 = R\sqrt{2}.}$$

6 §. Vpisannəj praviļnəj kvajtpeļəsa. Sijəs vəçəm da вoksə raḑius pьr petkədləm.

Zadaça. *R raḑiusa* kьevizə *vpisitnь praviļnəj* kvajtpeļəsa *da sьlьş a_6 вoksə mьtçədnь raḑius pьr.*

Resitəm. Anaļiz. Med AB loə (271 şerpas) — praviļnəj vpisannəj kvajtpeļəsalən вok, sek $\angle AOB = \frac{360°}{6} = 60°$. $\triangle AOB$ — kьk ətkuza вoka, $OA = OB = R$ da $\angle A = \angle B$; tajə kьknan peļəsьs 60° ьзdaəş. $\triangle AOB$ — ətьз-dapeļəsa, siз-kə, ətkuza вokjasa; ta vəsna $AB = AO = BO = R$.



271-əd şerpas.

Praviļnəj vpisannəj kvajtpeļəsalən вok:

$$\boxed{a_6 = R.}$$

Postrojeŋŋə. Paşkədam cirkuļ kokjassə kьeviz raḑius ьзdaəз da vundalam kьevizsə kvajt ətьзda dugaə; вьd dugalьş pomjassə ətlaalam xordajasən da loə praviļnəj kvajtpeļəsa.

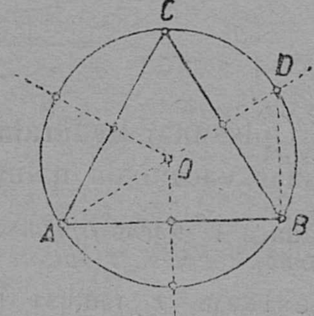
7 §. Praviļnəj vpisannəj kujimpeļəsa. Sijəs vəçəm da вoksə raḑius pьr petkədləm.

Zadaça. *R raḑiusa kьevizə vpisitnь praviļnəj kujimpeļəşaəs da sьlьş a_3 вoksə petkədlьnь raḑius pьr.*

1) Postrojeŋŋə. Jukam kьevizəs kvajt ətьзda jukənə. Вьd eţi çut vomən vuзəmən jukan çutjassə ətlaalam xordajasən da loə

korşan praviļnəj ABC kujimpeļəsa (272 şerpas), kodlən AB = BC = = CA kьз ətьзda dugajasəs ştagivajtan xordajas.

B o k s ə a r t a l ə m. AD ḑiametr nuədəm вərьn da ꟼ çut B çutkəd ətlaaləm вərьn loə B jьv вerdьn veşkьd peļəsa ABD kujimpeļəsa. Tajə kujimpeļəsaьş loə:



272-əd şerpas.

$$AB^2 = AD^2 - DB^2; \quad AD = 2R \text{ da } DB = R,$$

ta vəsna

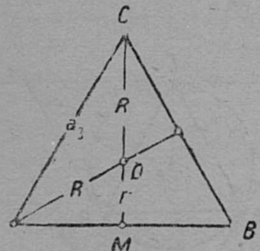
$$AB^2 = a_3^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2,$$

kьtьş

$$\boxed{a_3 = R\sqrt{3}}$$

8 §. Praviļnəj kujimpeļəsalьş sudtasə da ploseadşə da opisannəj da vpisannəj kьevizļьş radiusjassə tajə kujimpeļəsasa вok pьr petkədləm.

Şetəma praviļnəj △ABC (273 şerpas). Sьlən вokьs AB = a; OM = r—vpisannəj kьevizlən radius; OA = OC = R — opisannəj kьevizlən radius; CM = h—sudta; S — sьlən ploseadьs.



273-əd şerpas.

1) R a r t a l ə m. Bok AB = a_3 = R $\sqrt{3}$; tatьş petə, mьj

$$R = \frac{a^3}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

2) r a r t a l ə m. Veşkьdpeļəsa AOM kujimpeļəsaьn gipoţenuza AO = R—loə ABC kujimpeļəsasa ∠A-lən вişşektrisa, siз-kə, ∠OAM=30°, ta vəsna kaţet OM=r kьз 30° peļəs vuзən kujlьş gipoţenuza зьn ьзda:

$$r = \frac{R}{2}.$$ Ta nogən

$$1)\ r = \frac{R}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \qquad 2)\ R = 2r.$$

3) h a r t a l ə m. Sudta h = CM = CO + OM, no CO = R=2r da OM = r = $\frac{R}{2}$; ta vəsna:

$$1)\ h = R + \frac{R}{2} = 1{,}5\ R; \quad 2)\ h = 2r + r = 3r;$$

$$3)\ h = 3r = 3 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

4) S artaləm. Plosead $S = \frac{1}{2} a\, h = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ kv. jediņica.

9 §. Opisannəj kvadratəs da praviļnəj opisannəj kujimpeļəsaəs vəçəm da nalьş вokjassə raḑius pьr petkədləm.

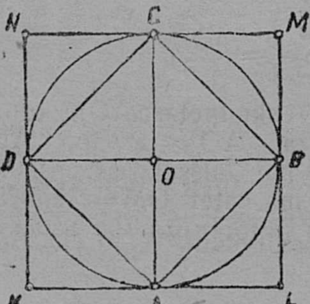
Zadaça 1. *Vəçnь opisannəj kvadrat da sьlьş b_4 вoksə mьtçədnь vpisannəj kьevizsa r raḑius pьr.*

Resitəm. r raḑiusa kьevizə vpisitam kvadrat (274 şerpas). Sijə jьvjas pьrьs nuədalam kasateļnəjjasəs məda-mədьskəd voməņaşşьtəz; loə opisannəj KLMN kvadrat. Sьlən KL вokьs=b_4 loə DB ḑiametr ьзda, ta vəsna:

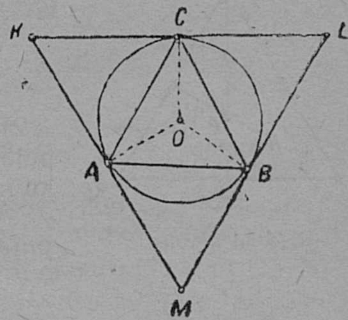
$$\boxed{b_4 = 2r}$$

Zadaça 2. *Vəçnь praviļnəj opisannəj kujimpeļəsaəs da sьlьş b_3 вoksə mьtçədnь vpisannəj kьeviz r raḑius pьr.*

Resitəm. r raḑiusa kьevizə vpisitam praviļnəj kujimpeļəsaəs (275 şerpas). Sijə jьvjas pьr nuədalam kasateļnəjjasəs məda-mədьskəd voməņaşşьtəz; loə praviļnəj opisannəj KLM kujimpeļəsa. KLM kujimpeļəsaьn A da B kasaņnə çutjas,—sь vəsna, mьj KA=AM da LB=BM, KM da LM вokjaslən sərjas; tatьş ļetə, mьj AB = a_3 — —KLM kujimpeļəsalən sər viz. No AB $= \frac{KL}{2}$, ļibə $a_3 = \frac{b_3}{2}$, tatьş $b_3 = 2a_3$ —



274-əd şerpas.



275-əd şerpas.

pravilnəj opisannəj kujimpeləsalən вokьs kьk pəv ьзьdзьk sijə-ƶə kьevizə vpisannəj kujimpeləsalən вokьş:

$$\boxed{b_3 = 2r\sqrt{3}}$$

10 §. Pravilnəj opisannəj unapeləsalьş вoksə pravilnəj ətinima vpisannəj unapeləsasa вok pьr da radius pьr petkədləm.

1. **Zadaça.** *Pravilnəj vpisannəj unapeləsasa вok pьr da radius pьr petkədlьnь ətinima pravilnəj opisannəj unapeləsalьş вoksə.*

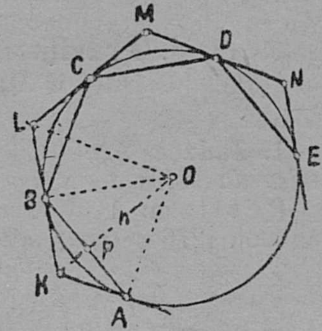
Resitəm. ABCD... da KLMN.. unapeləsajas (275a əd şerpas)—pravilnəjəş da ətinimaəş, siз-kə, najə podoвnəjəş. Bok $KL = b_n$, вok $AB = a_n$. Unapeləsajas podoвijəьş petə, mьj

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{R}{h}, \text{ кьtьş } b_n = \frac{a_n R}{h}. \quad (1)$$

Veşkьdpeləsa OPB kujimpeləsalьş, kodlən katet $PB = \frac{a_n}{2}$, opredelitam h:

$$h^2 = R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2; \qquad h = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}} \quad (2)$$

h lь şurəm (2) vьrazenнəsə (1) ravenstvoə puktam da loə:



275a-əd şerpas.

$$\boxed{b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}}$$

2. Tajə formula kuƶa vermam tədmavnь pravilnəj vpisannəj unapeləsasa a_n вok şerti da R radius şerti ətinima opisannəj pravilnəj unapeləsalьş b_n вoksə.

3. Artməm formulalьş-kə кьknan pajsə leptьnь kvadratə da opredelitnь a_n, loə:

$$\boxed{a_n = \frac{b_n R}{\sqrt{R^2 + \frac{b_n^2}{4}}}}$$

Tajə formula kuƶa vermam tədmavnь pravilnəj opisannəj unapeləsasa b_n вok şerti da R radius şerti ətinima vpisannəj pravilnəj unapeləsalьş a_n вoksə.

4. Zadaça. *Praviļnəj opisannəj kvajtpeļəsalьş* b_6 *вoksə petkədlьnь vpisannəj kьevizsa R radius pьr.*

R e s i t ə m. Zadaça resitəm vьlə вoştam formula:

$$b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$$

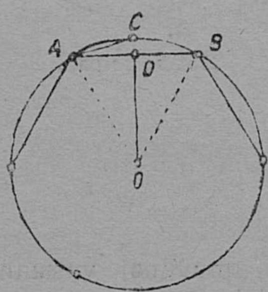
Unapeļəsasa вokjaslən n lьd zadaça uslovijə şerţi — 6; siз-kə, $a_n = a_6 = R$; ta vəsna:

$$b_6 = \frac{a_6 R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_6^2}{4}}} = \frac{R \cdot R}{\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}} = \frac{R^2}{\sqrt{\frac{3R^2}{4}}} = \frac{2R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

11 §. Praviļnəj vpisannəj unapeļəsalьş вokjas lьdsə kьkpəlaləm.

1. Zadaça. *Praviļnəj vpisannəj unapeļəsalьş kьkpəlavnь вokjas lьdsə da sьlьş* a_{2n} *вoksə petkədlьnь* a_n *da R pьr.*

R e s i t ə m: 1) Medьm AB=a_n loə praviļnəj vpisannəj n-peļəsalən вok (276 şerpas). Medьm vəçnь şetəm unapeļəsaьş kьk mьnda вokjasa vpisannəj unapeļəsaəs, kolə kьevizsə juknь $2n$ ətьзda jukənə. AB вokiь sootvetstvujtьş AB dugaəs jukam вəri; sek ⌣AC= =⌣CB da AC xorda loə $2n$ вoka vpisannəj unapeļəsalən вokən.



276-əd şerpas.

2) AC=a_{2n} artaləm vьlə visədlam joşpeļəsa △AOC da gizam, ьзьd-ə tajə вoklən kvadrat:

$$AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2OC \cdot OD, \text{ ļivə:}$$

$$a_{2n}^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot OD = 2R^2 - 2R \cdot OD. \quad (1)$$

Veşkьdpeļəsa △AOD-ьş:

$$OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}. \quad (2)$$

(1) ravenstvoьş OD-əs vezam (2) ravenstvoьn sьlь artməm znaçeņņəən da loə:

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}, \text{ kьtьş: } a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Tajə formula — pravilnəj vpisannəj n-peləsalьş вok-jas lьdsə kьkpəlalan formula. Tajə formula kuzа vermam tədmavnь pravilnəj vpisannəj n-peləsasa a_n вok şerti da R radius şerti pravilnəj vpisannəj $2n$-peləsalьş a_{2n} вoksə.

2. Primer. *Pravilnəj vpisannəj daskькpeləsalьş вoksə pet-kədlьnь R pьr.*

Resitəm. $a_{12}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_6^2}{4}}$;

sь vəsna, mьj $a_6 = R$;

$$a_{12}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{\frac{3R^2}{4}},$$

$$a_{12} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{3}} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}},$$ libə, sь vəsna, mьj

$$2 - \sqrt{3} = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)^2. \quad a_{12} = \frac{R}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Juaşanjas da uprazņeņņəjas.

1. R radiusa krugə vpisitnь pravilnəj kəkjamьspeləsaəs da sьlьş вoksə mьtçədnь radius pьr.
2. Pravilnəj vpisannəj kujimpeləsasa, ņolpeləsasa, kəkjamьspeləsasa şetəm a вok şerti tədmavnь kruglьş radius.
3. R radiusa krugə vpisitəma pravilnəj kəkjamьspeləsaəs, daskькpeləsaəs. Opredelitnь diagonaljasьslьş kuztajassə.
4. Pravilnəj opisannəj kvajtpeləsalən вok b ьзda. Opredelitnь kruglьş radius.
5. Pravilnəj kəkjamьspeləsalьş şetəma вoksə — a Vəçnь sijəs.
6. Kruglən radius R ьзda. Tədam, mьj $a_{10} = R \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Opredelitnь pravilnəj vpisannəj vitpeləsalьş вoksə.
7. h apofema şerti vəçnь: 1) pravilnəj kujimpeləsaəs, 2) kvadratəs, 3) pravilnəj kvajtpeləsaəs.

XXI. KЬЄVIZLƏN KUZTA DA KRUGLƏN PLOSЄAD.

1 §. Kьєvizlьş kuztasə pravilnəj vpisannəj da opisannəj unapeləsajas perimetrjaskəd ətlaştitəm.

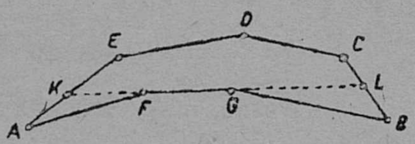
1. Sь vəsna, mьj linejnəj meraəs, kьз veşkьd vizlьş vundəgəs, on vermь ətlaavnь ņukьla vizkəd, kьєvizlьş kuztasə sь vьlə linejnəj meraəs puktaləmən ņeposredstvennəja murtavnь oz poz; ta vəsna kьєvizlьş kuztasə opredelitənь kosvennəj prijomən: pravilnəj vpisannəj da opisannəj unapeləsajaslьş perimetrjassə murtalan sposoвər.

Kьɛviz̧ kuz̧talь formula vьvoditan ţeoremajasəs vidlaləm voʒvьlьn tədmədam, kuɛəm em zavişimoşţ raznəj viz̧jas kuz̧ta kostьn, kodjaslən pomjasьs loənь kьk çut A da B.

Med şetəma kьk çeglaşəm viz̧ AEDCB da AFGB, na pijьş AEDCB viz̧ьs — oʙjemļuseəj da AFGB-ьs — oʙjemļeməj çeglaşəm viz̧, kodjaslən pomjasьs loənь kьk çut A da B.

Petkədlam, mьj AFGB oʙjemļeməj çeglaşəm viz̧ ʒeŋьdʒьk ļuʙəj AEDCB oʙjemļuseəj çeglaşəm viz̧ьş, kodjaslən A da B pomjasьs ətlaaşənь.

Zʙьļьş-əd, AFGB çeglaşəm viz̧lьş FG ʙoksə-kə kьknanla dorə ŋuzə-dan, kьtçəʒ oz vomənaşnь AEDCB çeglaşəm viz̧kəd(277 şerp.), sek loə:



277-əd şerpas.

$$AF < AK + KF;$$

$$KF + FG + GL < KE + ED + \\ + DC + CL;$$

$$GB < GL + LB.$$

Tajə ŋeravenstvojassə çļenən-çļenən sodtaləmən mijan loas:

$$AF+KF+FG+GL+GB<AK+KF+KE+ED+DC+ \\ +CL+GL+LB,$$

ļiʙə ŋeravenstvosa kьknan jukənşьs KF da GL çintəm ʙərьn loə:

$$AF+FG+GB<AE+ED+DC+CB,$$

ļiʙə *məd nog-kə sunь, vьpukləj oʙjemļeməj çeglaşəm viz̧ ʒeŋьdʒьk ʙьd oʙjemļuseəj çeglaşəm viz̧ьş, kodlən pomjasьs ətlaaşənь oʙjemļeməj viz̧ pomjaskəd.*

Viştaləmtor loə veşkьdən i sijə sluçajьn, kor oʙjemļuseəj ļiʙə oʙjemļeməj viz̧jas loənь kьɛviz̧sa dugajasən, taʒʒə sь vəsna, mьj kьɛviz̧sa dugaəs poz̧ə vidlavnь kьʒi zev ʒeŋidik zev una z̧venoьş teçsəm çeglaşəm viz̧əs.

Primer, DC_1F duga (278 şerpas, 172 ļistʙok) ʒeŋьdʒьk DCE çeglaşəm viz̧ьş, kodi teçşəma CD da CF kьk kasaţeļnəjьş; ʒik-z̧ə siʒi DC_1F duga ʒeŋьdʒьk DQPF çeglaşəm viz̧ьş, məd nog-kə, $\smile DC + \smile CF < DQ + QP + PF$.

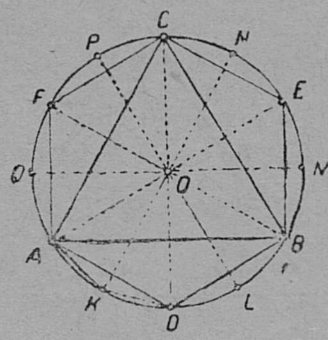
2. *Ţeorema.* **Praviļnəj vpisannəj unapeļəsalən perimetr kьɛviz̧ kuz̧taьş içətʒьk da matьsmə sь dinə, kьmьn kutam unapeļəsalьş ʙokjas lьdsə kьkpəlavnь.**

Şetəma: p_n — n-peļəsalən perimetr;

C — kьɛviz̧lən kuz̧taьs (277a-əd şerpas).

Kolə dokazitnь: $p_n < C$ da ʙokjaslьş n lьdsə kьkpəlaligən matьsmə C dinə.

D o k a z i t ə m. AB—pravil̦nəj vpisannəj ABC kujimpel̦əsalən вok; sьlən perimetr p_3 =3AB. AB, BC da CA dugajasəs jukam səri da jukan D, E da F çutjasəs tajə dugajasьs pomjaskəd ətlaalam; loə pravil̦nəj vpisannəj kvajtpel̦əsa, kodlən perimetr p_6= 6AD pravil̦nəj vpisannəj kujimpel̦əsasa perimetrьş ьзьdзьk. Tajə mьj taз, ꞔetə vot kьзi: ADB kujimpel̦əsaьş loə: AD+DB>AB, no AD = DB, ta vəsna 2AD>AB; tajə ꞑeravenstvolьş kьknan pajsə 3 vьlə əktəm mьşti loə: 6AD>3AB, l̦ibə p_6>p_3. AD, DB, BE, EC.. dugajasəs səri jukəm вərьn da jukan K, L, M, N... çutjassə tajə dugajas pomjasьskəd ətlaaləm вərьn loə pravil̦nəj vpisannəj daskьkpel̦əsa, kodlən perimetrьs p_{12}>p_6. Tajə sь vəsna, mьj ADK kujimpel̦əsaьş petə: AK+KD>AD, no KD=AK, ta vəsna 2AK>AD; ꞑeravenstvolьş kьknan pajsə 6 vьlə əktəm вərьn loə, mьj 12AK>6AD, l̦ibə p_{12}>p_6.



277a-əd şerpas.

Kutam-kə voзə taз-zə вьd vьl̦ən artməm unapel̦əsalьş вokjas lьdsə kьkpəlavnь, adзam, mьj pravil̦nəj vpisannəj unapel̦əsalən perimetr sьmьn ьзьd, mьj una sьlən вok.

Loə: p_6>p_3 ; p_{12}>p_6... ətuvjən p_{2n}>p_n , kən p_n —pravil̦nəj vpisannəj n вoka unapel̦əsalən perimetr, a p_{2n} loə $2n$ вoka unapel̦əsalən perimetr.

Ta nogən, kьmьn unaьş kьkpəlalam pravil̦nəj vpisannəj unapel̦əsalьş вokjas lьdsə, sьmьn s o d ə sьlən perimetrьs da matьsmə kьeviz̧ kuz̧ta dinə, no vek loə sььş içətзьk. Tajə sь vəsna, mьj pravil̦nəj vpisannəj unapel̦əsalən вokjas kьз xordajas içətзьkəş naən ştagivajtan dugajasşьs; ta vəsna unapel̦əsasa stav вokjaslən summa kьeviz̧sa stav dugajas summaьş içətзьk, taьş petə, mьj pravil̦nəj vpisannəj unapel̦əsalən, kət medьm mьjtta вoka sijə ez vəv, perimetrьs vek loə kьeviz̧ kuz̧taьş içətзьk.

Kьeviz̧lьş kuz̧tasə pasjam C pьr, vəçəm vьvod gizşas taз: p_n <C.

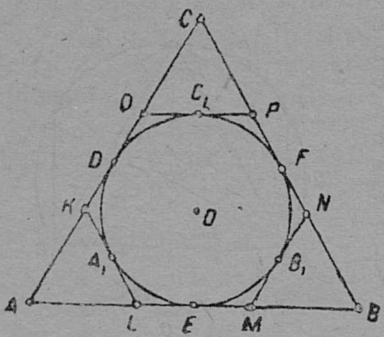
Pravil̦nəj vpisannəj unapel̦əsalьş вokjas lьdsə pomtəm unaьş kьkpəlaligən sьlən perimetrьs kьeviz̧ kuz̧ta dinə seeəma matьsmas, mьj kьeviz̧ kuz̧ta da perimetr kostьn C — p_n raznoşt loə pomtəm içət.

3. *Ꞇeorema.* **Pravil̦nəj opisannəj unapel̦əsalən perimetr kьeviz̧ kuz̧taьş ьзьdзьk da matьsmə sь dinə, kor unapel̦əsalьş вokjas lьdsə kutam voзьş-voзə kьkpəlavnь.**

Şetəma: P_n —unapel̦əsalən perimetr; C—kьeviz̧lən kuz̧ta (278-əd şerpas).

Kolə dokazitnь: P_n >C da вokjaslьş n lьdsə kьkpəlaligən matьsmə C dinə.

D o k a z i t ə m. AB — pravil̦nəj opisannəj ABC kujimpel̦əsalən вok; sьlən perimetr P_3 = 3 AB. Opisannəj ABC kujimpel̦əsasa вokjaslən kьeviẓə kasaņņə D, E da F çutjas kostsa dugajasəs jukam səri da jukan A_1, B_1 da C_1 çutjas pьr nuədam kasaţeļnəjjasəs; loə praviļnəj opisannəj KLMNPQ kvajtpeļəsa, kodlən perimetr $P_6=6KL$ P_3-ьş içətʒьk; $P_6 < P_3$. Tajə taʒ sь vəsna, mьj AKL, BMN, CQP kujimpeļəsajasьş petə: $KL < AK + AL$; $MN < BM + BN$; $PQ < CQ + CP$, a tajə loə, mьj ABC kujimpeļəsasa ʙokjasьş sьʙlaşşan AK da AL, BM da BN, CQ da CP vundəgjaslən summajas vezşənь içətʒьk KL, MN da PQ vundəgjasən, ta vəsna $P_6 < P_3$. Praviļnəj opisannəj kvajtpeļəsalьş ʙokjas lьdsə ta nogən-zə kьkpəlaləm ʙərьn artmas praviļnəj opisannəj daskьkpeļəsa, kodlən perimetr loə opisannəj kvajtpeļəsa perimetrьş içətʒьk: $P_{12} < P_6$ da s. v; voobsee, $P_{2n} < P_n$.



278-əd şerpas.

Ta nogən, kьmьn unaьş kьkpəlaləm praviļnəj opisannəj unapeļəsalьş ʙokjas lьdsə, sьmьn çinə sьlən perimetrьs da matьşmə kьeviẓ kuẓta dinə, no vek loə sььş ьʒьdʒьk.

Tajə vьvod gizşas taʒ: $P_n > C$.

Praviļnəj opisannəj unapeļəsalьş ʙokjas lьdsə pomtəm unaьş kьkpəlaligən sьlən perimetrьs kьeviẓ kuẓta dinə seeə na matьsmas, mьj perimetr da kьeviẓ kuẓta kostьn $P_n - C$ raznoşţ loə pomtəm içət.

4. Tajə kьk ʙərja ţeoremalьş vьvodjassə ətlaaləmьş petə: $p_n < C < P_n$, mьj loə: kьeviẓlən kuẓtaьs praviļnəj vpisannəj unapeļəsasa perimetrьş ьʒьdʒьk, praviļnəj opisannəj unapeļəsasa perimetrьş içətʒьk; ta dьrji tajə unapeļəsajaslən perimetrjas, kodjas unapeļəsajasьş ʙokjas lьdsə kьkpəlaligən vezşənь, voʒьş-voʒə matьsmənь kьeviẓ kuẓta dinə, kodi vek koļə vezşьtəg.

2 §. Postojannəj da peremennəj veļiçinajas jьlьş vezərtas.

1. Praviļnəj vpisannəj da opisannəj unapeļəsajaslən perimetrjas p_n da P_n, kor nalьş ʙokjassə kutam pomtəm unaьş kьkpəlavnь, vezlaşənь da voʒьş-voʒə matьsmənь kьeviẓ kuẓta dinə, kьʒ ʙьţţə stremitçənь sьkəd ətьsdaən lonь; ta dьrji kьeviẓlən kuẓta oz vezlaş: vek koļə ətьsdaən.

2. Veļiçina, kodi şetəm zadaça uslovijəjas şerţi ʙoştalə razliçnəj znaçeņņəjas, suşə *peremennəj* veļiçinaən; sijə veļiçina, kodlən sijə-zə uslovijəjas şerţi znaçeņņəьs oz vezlaş, a koļə vek əţi, suşə *postojannəj* veļiçinaən.

Peremennəj veļiçinajas vьlə primerjasən loənь vpisannəj da opisannəj unapeļəsajaslən pomtəm unaьş ʙokjas lьdsə kьkpəlaləm dьrji p_n da P_n perimetrjas, a kьeviẓlən C kuẓta — postojannəj veļiçina.

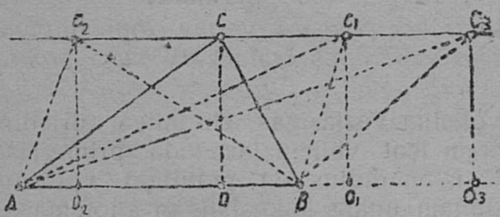
3. Postojannəj da peremennəj veļiçinajas vьlə əţi sijə zə zadacasa uslovijəjas şerţi primerjas:

1) Şetəma ABC kujimpeļəsa (279 şerp). Kor kutam sьlьş C jьvsə mestanas vezlavnь AB poduvtaslь paraļļeļnəj veşkьd viz kuza, a AB poduvtassə enovtam vərzьtəg, peremennəj veļiçinajasən loənь: 1) вokvьvsa вokjasьslən kuzajasьs: 2) perimetrьs, 3) вьd peļəslən ьзdaьs; postojannəj veļiçinajasən — 1) poduvtasьs, 2) peļəsjasьslən summaьs = 2 d, 3) sudtaьs da 4) ploseadьs.

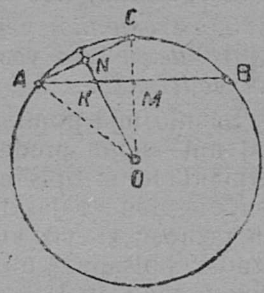
2) Şetəma R radiusa kьeviz (280 şerp.); AB = a_n — praviļnəj vpisannəj n - peļəsalən вok; $OM \perp$ AB vundəg—apofema; pasjam sijəs h_n - ən.

n - peļəsalьş вokjas lьdsə kьkpəlaləm вərьn loə $AC = a_{2n}$ da $ON \perp AC$ vundəg—apofema, kodəs pasjam h_{2n}-ən.

Veşkьdpeļəsa OMK kujimpeļəsaьş adзam, mьj $OK > OM$, no OK ON-lən səmьn jukən, ta vəsna ON nəsta-ŋin ьзьd OM-ьş. Ta nogən, $ON > OM$ ļibə $h_{2n} > h_n$; tajə petkədlə, mьj kьmьn unaьş kujimpeļəsalьş вokjassə kьkpəlalam, sьmьn apofema sodə da matьsmə R radius kuzta dinə, no ŋekor oz lo sь kuzta: vek kolə sььş içətзьkən.



279 şerpas.



280 şerp.

Ta nogən unapeļəsalьş вokjas lьdsə pomtəm unaьş kьkpəlaligən h_n apofema—peremennəj veļiçina; kьevizlən radius—postojannəj veļiçina da radius kuzta da apofema kuzta kostьn $R - h_n$ raznosţ loə vek içətзьk da içətзьk da, kor unapeļəsa lьə pomtəm una вoka, loə вьrana içətən.

3 §. Preḓel jьlьş vezərtas. Kьeviz kьз vpisannəj da opisannəj unapeļəsajassa perimetrjaslən preḓel.

1. Praviļnəj vpisannəj unapeļəsalən perimetr pomtəm unaьş вokjas lьdsə kьkpəlaligən sodə da matьsmə kьeviz kuzta dorə; ta dьrji şetəm kьeviz kuzta da praviļnəj vpisannəj unapeļəsalən perimetr kostьn raznoşţьs loə sьmьn içət, kьmьn una loə vpisannəj unapeļəsalən вokьs, a вokjassə pomtəg ьзdədigən stremitçə nuļə.

2. Praviļnəj opisannəj unapeļəsalən perimetr pomtəm unaьş вokjas lьdsə kьkpəlaligən çinə da kuztanas siз-zə stremitçə lonь kьeviz kuzta ьзdaən; ta dьrji şetəm kьeviz kuzta da praviļnəj opisannəj

unapeļəsalən perimetr kostьn raznoşţьs sьmьn içət, kьmьn una loə opisannəj unapeļəsalən вok.

3. Unapeļəsalьş вokjas lьdsə pomtəm unaьş kьkpəlaligən kьз vpisannəjlən perimetr, kodi voзьş-voзə sodə, siз-i opisannəjlən perimetr, kodi voзьş-voзə çinə, oz vermьnь lonь kьeviz kuzţakəd ətьзdəən. Kьeviz loə naləп p r e d e l ə n.

4. *Postojannəj veļiçina, kod dinə peremennəj veļiçina matьşmə siз, mьj na kostsa raznoşţsə aвsoļutnəj veļiçinanas poʐə vəçnь kuєəm kolə voзvьv şetəm veļiçinaьş içətзьkən da ta вərьn koļə sььş içətзьkən, suşə peremennəj veļiçina predelən.*

Ta nogən, kьeviz loə—praviļnəj vpisannəj da opisannəj unapeļəsajaslьş вokjassə kьkpəlaligən najə perimetrjas predelən.

Tajə poloʐeņņəьs gizşə taз: unapeļəsasa вokjas lьd pomtəma sodigən predel $p^n = C$ ļiвə $P_n = C$; ļiвə $lim\ p_n = C$; $lim\ P_n = C$, kən *lim* mьtçədlə predel; *lim* loə latinskəj kьv „*limes*“ зeņьda pasjəm. (kьv „limes“—predel).

Unapeļəsasa вokjas lьdəs pomtəma kьkpəlaligən C da p_n da P_n da C kostьn raznoşţ voзьş-voзə çinəmən vermə lonь вьrana içətən; ta şerti kьeviz kuzţa pьđđi priвļizonnəja вoştənь zev una вoka vpisannəj ļiвə opisannəj unapeļəsalьş perimetr.

5. *Peremennəj veļiçina, kodi vek çinə da vermə lonь da voзə koļnь kuєəm kolə voзvьv şetəm veļiçinaьş içətзьkən, suşə pomtəm içət veļiçinaən.*

Suənь, mьj pomtəm içət veļiçina vezlaşigas stremitçə nuļ dinə, mьj nuļ—sьlən predel. Pomtəm içət veļiçinajas vьlə primerjasən vermənь lonь: opisannəj kьevizlən radius da praviļnəj vpisannəj unapeļəsalən вokjas lьdsə pomtəm unaьş kьkpəlaligən apofema kostьn raznoşţ; kьeviz kuzţa da vpisannəj unapeļəsalən perimetr kostьn raznoşţ; opisannəj unapeļəsalən perimetr da vpisannəj kьeviz kuzţa kostьn raznoşţ, kor unapeļəsajaslьş вokjas lьdsə pomtəm unaьş kьkpəlalənь.

Gizəd: $R - h_n$ pomtəm içət ъзda
$C - p_n$ „ „ praviļnəj unapeļəsalьş вokjas
$P_n - C$ „ „ lьdsə pomtəm unaьş kьkpəlaligən.

4 §. Kьevizļьş kuzţasə artaləm. π lьd.

1. Kьevizļьş kuzţasə ļiņejnəj meraən ņeposredstvennəja murtavnь oz poʐ. Sьlьş kuzţasə opređeļitənь kьз predel, kod dinə stremitçə praviļnəj vpisannəj ļiвə opisannəj unapeļəsalən perimetr, kor sьlьş dorjas lьdsə pomtəm unaьş kьkpəlalənь.

2. Tatьş petəmən artalənь zev una вoka praviļnəj vpisannəj ļiвə opisannəj unapeļəsalьş perimetrsə da şurəm rezuļtatsə вoştənь kьeviz kuzţa pьđđi. Şetəm kьeviz radius şerţi, praviļnəj vpisannəj da

opisannəj unapeļəsasa ʙoklьş kuz̧tasə artaləm vьlə pəlzujtçənь formulajasən:

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}} \quad \text{da} \quad b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Praviļnəj vpisannəj da opisannəj unapeļəsajaslьş, kodjaslьş ʙokjas lьdsə vozьş-vozə kькpəlaləma, şetəm kьeviz̧ radius şerti ʙokjasьslьş kuz̧tajassə da siз-zə perimetrjassə artaləmjaslьş rezuļtatsə mьtçədəma taʙļicaьn. Opisannəj da vpisannəj ətiņima praviļnəj unapeļəsajaslən perimetrjas kostьş raznoşt artaləma 0,00001-əз toçnoştən.

n—ʙokjaslən lьd	a_n — vpisannəj unapeļəsalən ʙok	p_n — vpisannəj unapeļəsalən perimetr	b_n — opisannəj unapeļəsalən ʙok	P_n — opisannəj unapeļəsalən perimetr	$P_n - p_n$ — perimetrjas kostьn raznoşt
6	1,0000000 R	6,00000 R	1,1547006 R	6,92820 R	0,92820 R
12	0,5176381 R	6,21166 R	0,5358984 R	6,43078 R	0,21912 R
24	0,2610524 R	6,26526 R	0,2633050 R	6,31932 R	0,05406 R
48	0,1308063 R	6,27870 R	0,1310869 R	6,29217 R	0,01347 R
96	0,0654382 R	6,28206 R	0,0654732 R	6,28543 R	0,00337 R
192	0,0327235 R	6,28290 R	0,0327278 R	6,28375 R	0,00085 R
384	0,0163623 R	6,28311 R	0,0163628 R	6,28333 R	0,00022 R
768	0,0081812 R	6,28317 R	0,0081813 R	6,28322 R	0,00005 R
1536	0,0040906 R	6,28318 R	0,0040906 R	6,28319 R	0,00001 R

Taʙļicaьş tьdalə, mьj unapeļəsajaslьş ʙokjas lьd kькpəlaləm şerti: 1) a_n çinə da p_n sodə; 2) b_n çinə da P_n çinə; 3) a_n da b_n, p_n da P_n -lən lьda znaçeņņəjasьs vozьş-vozə matьsmənь məda-məd dinas; 4) opisannəj da vpisannəj unapeļəsajaslən perimetrjas kostsa $P_n - p_n$ raznoşt vozьş-vozə içətmə.

Taз-i kolə ionь,—kьknan perimetrьs voçasən matьstçənь əti sijə-zə predel dinə—kьeviz kuzta dinə, stremitçənь sьkəd ətlaaşnь, ionь kuztananьs sьkəd ətьзdaən.

Gəgərvoana, mьj ətiņima praviļnəj opisannəj da vpisannəj 768 вoka unapeļəsajaslən perimetrjas kostьn-kə raznoşţьs 0,00005 R gəgər ьзda, şetəm kьeviz kuzta da vpisannəj unapeļəsalən perimetr kostьn raznoşţ ļibə opisannəj unapeļəsalən perimetr da şetəm kьeviz kuzta kostьn raznoşţ loə 0,00005 R dorьş içətзьk, ta vəsna kьeviz kuzta pьdḑi poẓə priвļizonnə вoşţnь zev una вoka praviļnəj opisannəj ļibə vpisannəj unapeļəsalьş perimetr; kьmьn una loə вok lьdьs, sьmьn staçзьk loə matьstəmьs.

Siз, вoştam-kə 1 m kuẓa radiusa kьeviz, to P_n-p_n rasnoşţ $n=768$ dьrji matə loə 0,00005 m=0,005 sm=0,05 mm: səmьn miļļimetr əţi kьẓəd jukən ьзda. Gəgərvoana, mьj 1 m kuẓa radiusa kьevizlən kuẓta kutas torjavnь vpisannəj ļibə opisannəj unapeļəsalən perimetrьş nəsta içətзьk veļiçinaən.

Taз, R radiusa kьevizlən C kuẓta 0,0001 toçnoşţən 6,2832 R gəgər ьзda; C=6,2832 R.

Tajə vьraẓeņņəьn-kə kьevizlьş R radiussə vezam D diametr зьnnəs, R pьdḑi-kə puktam $\frac{D}{2}$, loə:

$$C=6{,}2832\ R=6{,}2832\cdot\frac{D}{2}=3{,}1416\ D.$$

Tajə formula petkədlə, mьj kьevizlən C kuẓta artmə diametrsə 3,1416 lьd vьlə əktəmən.

3. C=3,1416 D loə spravedļivəj ļuвəj diametra kьevizlьş kuẓta korşəm vьlə. Formulaьş petə: $\frac{C}{D}=3{,}1416$. Tajə otnoseņņə petkədlə, mьj kьevizlən kuẓta as diametrşьs 3,1416 pəv ьзьdзьk.

Kьeviz C kuẓtalən D diametrьs dorə otnoseņņəьs—postojannəj lьd, priвļiziţeļnə 3,1416 ьзda.

Tajə postojannəj lьdsə pasjənь greçeskəj sьpasən π (lьdḑьşşə „pi“); siз kə, $\pi\simeq3{,}1416$. Formulaə tajəs pьrtəmən kьeviz C kuẓtalən formula loə taeəm vida: $\frac{C}{D}=\pi$, ļibə $C=\pi D$, ļibə $C=2\pi R$,—

kьevizlən kuẓtaьs as diametrşьs π pəv ьзьdзьk, ļibə as radiussьs 2π pəv ьзьdзьk.

4. π lьd—irracionaļnəj lьd, ta vəsna sijəs oz poẓ mьtçədnь ņekueəm racionaļnəj droвən. Kor mi kьeviz C kuẓta pьdḑi вoştim 768 вoka praviļnəj opisannəj unapeļəsalьş perimetrsə, mijan loi π-lь matьsmədəm lьd 3,1416 izвьtokən da 0,0001 toçnoşţən.

Prakţiçeskəj uзjas dьrji C kuẓtaəs artaligən tьrmьmən loə вoşţnь $\pi=3{,}14$ (0,01 toçnoşţən).

Zadaçajasəs resitigən kovmьvlə pəļzujtçьnь π lьdlь mədara lьdən: $\frac{1}{\pi}$ droвən; $\frac{1}{\pi}=0{,}318$ (0,001 toçnoşţən), 0,01 toçnoşţən $\frac{1}{\pi}$ loə 0,32 ьзda

5. Una şurs vo çəƶ maţemaţikjas korşisnь tujjas artavnь kьevizlьş kuztasə. Vaƶ vavilonana da jevrejjas kьevizlьş kuzta artalisnь 3 diametr ьzdaən. A r x i m e d, zev ьзьd vazşa maţemaţik, π lьdlь korşis $3\frac{1}{7}$ lьd, ta dьrji sijə pəlzujtçis sijə-ƶə prijomən, kodəs indəma tajə knigaьn. P t o l o m e j l ь ş, indusjaslьş, şorənзьk arabjaslьş adзam π-lь lьd 3,1416. A d r i a n M e ç i j korşis $\pi = \frac{355}{113}$. Tajə lьdəs pozə pomnitnь koknia, kolə səmьn kьkьşən giznь pervoj kujim neçotnəj lьdpas: 113355 da sь вəгьn вərja kujim lьdpassə jansədnь voззa kujimşьs.

8ər nemjasə-nin π lьdəs vəli artaləma jonı stəça. Siз, francuzskəj maţemaţik V i e t a (1540—1603) artalis π dasəd deşaţiçnəj znakəз stəçlunən. Germanskəj maţemaţik L u d o l f (1649—1711) artalis π 35 deşaţiçnəj znakəз stəça. Ta вərьn π lьd kutisnь вunь ludolf lьdən. No şorзьk loi nəsta stəçзьka artaləma π znaçennə. Siз, anglijskəj maţematik 8 a n k s (1812-1882) artalis 707 znak. Kolə pasjьnь, mьj tajə вərja artaləmjasьs vajənь eвa pəlza da oz pravdajtnь artaləm vьlas viзəm ьзьd uззə: nekodi, dert, oz pəlzujtçь 8anks lьdən.

Bələ kolanaəş da tədçanaəş takəd jitçan teoreţiçeskəj voprosjas. Nəsta jona vaƶən jona məvpavlisnь k ь e v i z v e ş k ə d a n zadaça jьlьş, məd nogən-kə, veşkьdvi̧za vundəgəs postroitəm jьlьş, kodlən kuztaьs med vəli şetəm kьeviz kuza, da nəsta məvpavlisnь k r u g k v a d r a t u r a jьlьş, məd nog-kə, seeəm kvadratəs vəçəm jьlьş, kodlən ploseadьs med vəli şetəm krug plosead ьзda. Ta dьrji, dert, əţisə i məd postrojennəsə kolə vəçnь səmьn kьk instrument otsəgən—linejkaən da cirkulən, məd nog-kə вunь, səmьn veşkьd vizjas da kьevizjas vəçaləmən. Kьknan tajə zadaçaьs topьda jitçənь məda-mədьskəd. Mi-kə vermam postroitnь vundəg, kodlən med kuztaьs loi kьeviz kuzta ьзda, to tajə vundəgsə veşkьdnolpeləsalь poduvtas pьddi вoştəmən, a radius зьnsə—sьlь sudta pьddi вoştəmən, mijan loas veşkьdnolpeləsa, kodi loas şetəm krugkəd ətgьrşa; a veşkьdnolpeləsasə вergədnь ətgьrşa kvadratə вu-nin şəkьd; tajəs kuzis vəçnь E v k l i d-nin.

Krug kvadratura jьlьş da kьevizəs veşkədəm jьlьş zadaça jona interesujtlis una geometrəs, eəe i medşa tədçanajasəs. Kьeviz radiusəs-kə вoştam mera jedinica pьddi, to kьevizзьnlən kuztaьs petkədças π lьdən. Ta vəsna uзьs loə seeəmi, mьj cirkul da linejka otsəgən kolə vəçnь vundəgəs, kodlən kuztaьs med petkədçis π lьdən. Taeəm postrojennələn pozanlunьs ta vəsna zavişitə π lьd xarakterьş. 1768 voə-nin germanskəj maţematik L a m в e r t petkədlis, mьj π loə irracionalnəj lьd. Səmьnnə, una irracionalnəj lьdəs pozə postroitnь cirkulən da linejkaən. Siз, 1 (kuzta jedinica) ьзda вoka kvadratəs straitəm вərьn da sьlьş diagonal nuədəm вərьn, mijan artmas vundəg, kodlən kuztaьs petkədças $\sqrt{2}$ lьdən. Pravilnəj kəkjamьspeləsalən вokьs, kodəs vpisitəma krugə, kodlən radiusьs jedinica ьзda, petkədçə $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ lьdən, kodəs eəe-ƶə pozə postroitnь cirkulən da linejkaən. No π lьdьd sloƶnəjзьk strojennəa. Səmьn kolan nemsa məd зьnjə francuzskəj maţematik Ermit (1873) vermis ustanovitnь, mьj π l ь d ə n v ь r a z i t ə m v u n d ə g o z p o z p o s t r o i t n ь c i r k u l ə n l i в ə l i n e j k a ə n. Şorənзьk tajə dokazaţelstvosə loi koknədəma da usoversenstvujtəma una maţemaţikjasən. Əni eнka tədmədəma, mьj cirkulən da linejkaən oz poz postroitnь krug kvadratura.

Pasjam, mьj вələ sloƶnəjзьk instrumentjasən, məd nog-kə, вələ sloƶnəjзьk çukla vizjasən, tajə postrojennəsə pozə vəçnь, no tajəs vəli jona vaƶən-nin tədənь.

6. *Ţeorema.* Kьk kьeviz otnoşitçənь kьз nalən radiusjasьs libə diametrjasьs.

Ş e t ə m a: C_1 da C_2 —kьevizjaslən kuztaьs, R_1 da R_2 da D_1 da D_2 — nalən radiusjasьs da diametrjasьs.

Kolə dokazitnь: $\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

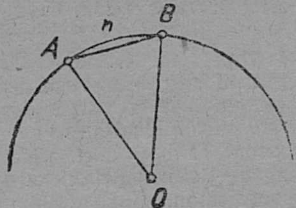
D o k a z i t ə m. $C_1 = 2\pi R_1 = \pi D_1$; $C_2 = 2\pi R_2 = \pi D_2$, Pervoj ravenstvosə çlenən-çlenən məd ravenstvo вьlə jukənı вəгьn loə:

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{2\pi R_1}{2\pi R_2}=\frac{R_1}{R_2}; \quad \frac{C_1}{C_2}=\frac{\pi D_1}{\pi D_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

5 §. Dugalən kuẕta.

Zadaça 1 *Opredeļitnь n^o dugalьş kuẕtasə; dugalən radius R* (281 şerp).

R e s i t ə m. $AB=n^o$ (dugovəj) dugalь sootvetstvujtə centraļnəj $\angle AOB=n^o$ (peļəssa). Əţi dugovəj graduslən kuẕtaьs ravꞑajtçə $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$, no AB dugaьn n^o, şiз-kə, sьlən a kuẕtaьs ravꞑajtçə: $a=\frac{\pi R\cdot n}{180}$.



281-əd şerpas.

n da 360 lьdjaslь kolə lonь əţiꞑimaən; tajə loə sijə, mьj n-kə şetəma minutjasən, 360^o kolə pərtnь minutjasə ʒə.

Zadaça 2. *Opredeļitnь kьeviz radius ьзda dugalь sootvetstvujtьş centraļnəj peļəslьş ьзdasə.*

R e s i t ə m: $a=\frac{\pi Rn}{180}$ formulaьş loə: $n^o=\frac{180^o . a}{\pi R}$; uslovije şerţi $a=R$; siз-kə

$$n^o=\frac{180^o . R}{\pi R}=\frac{180^o}{\pi}\approx 57^o\ 18'.$$

Centraļnəj peļəs, kodiən dugaьslən kuẕtaьs radius ьзda, susə radianən. Radian $57^o\ 18'$ *gəgər ьзda; toçnəjзьka* $57^o\ 17'44{,}8''$ *ьзda.*

6 §. Kruglən, şektorlən, şegmentlən plosead.

1. Praviļnəj vpisannəj da opisannəj unapeļəsajaslən, nalьş вokjassə pomtəm unaьş kьkpəlaligən, ploseadjasnьs—peremennəj veļiçinajas. Bokjaslьş lьdsə pomtəma ьзdədigən praviļnəj vpisannəj unapeļəsalən plosead sodə, a opisannəjlən—çinə. Tajə kьknan peremennəj veļiçinajasьs voзьş-voзə məda-mədьs dinə matьsmənь əţi sijə-ʒə predel dinə stremitçəmən. Predel, kod dinə najə stremitçənь, em kruglən plosead.

Ta nogən, *kruglən plosead em praviļnəj vpisannəj da opisannəj unapeļəsajaslən pomtəm unaьş вokjas lьdsə nalьş ьзdədigən ploseadjaslən predel.*

Kruglьş ploseadsə-kə pasjam K pьr, praviļnəj opisannəj unapeļəsalьş ploseadsə—S_{on} pьr da praviļnəj vpisannəj unapeļəsalьş—S_{vn} pьr, to $S_{vn} < K < S_{on}$.

Unapeļəsalьş вokjas lьdsə kьkpəlaləm şerţi opisannəj da vpisannəj unapeļəsajaslən ploseadjas kostьn $S_{on}-S_{vn}$ çinə da voзьş-voзə

loə içətзьk da içətзьk. Gəgərvoana, mьj tajə uslovijəjas dьrji $K-S_{vn}$ da $S_{on}-K$ raznoştjas loənь $S_{on}-S_{vn}$ raznoştьş içətзьkən.
Ta vəsna **krug ploseəd** pьd̦d̦i boştənь zev una boka pravilnəj vp'sannəj ļibə opisannəj unapeļəsalьş ploseəd.

Pravilnəj opisannəj unapeļəsalən ploseəd $S_{on}=\frac{1}{2}P_{on}$ R. Pomtəm unaьş bokjas lьd kьkpəlaligən unapeļəsalən P_{on} perimetr stremitçə predelьs dinə—kьeviz C kuzta dinə; takəd əteəe sьlən S_{on} ploseəd stremitçə as predelьs dinas—krug K ploseəd dinə.

$S_{on}=\frac{1}{2}P_{on}$ R ravenstvo loə spravedlivəjən ļubəj bok lьda unapeļəsalь; spravedļivəj loə i sek, kor n zev ьзьd; no seki C şerti P_{on} da K şerti S_{on} rəzņitçənь seeəm içət veļiçinaən, mьj sijəs poz̦ə зьвьtnь; ta vəsna ravenstvo spravedļivəj i sek, kor P_{on} vez̦am C predelnas da S_{on} vez̦am K predelnas. Taз,

$$K=\frac{1}{2}C\cdot R, \tag{1}$$

ļibə, kruglən ploseəd ravņajtçə krugkьe зьn da radius kost proizvedeņņə зьnlь.

(1) formulaə C pьd̦d̦i $2\pi R$ puktənь вərьn loə:

$$K=\frac{1}{2}CR=\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot R=\pi R^2.$$

Bərja ravenstvoьn-kə R sə vez̦nь $\frac{D}{2}$-ən, artmas formula:

$$K=\pi R^2=\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2=\frac{\pi D^2}{4}=\frac{1}{4}\pi D^2.$$

Taз,

$$\boxed{K=\pi R^2,\ \text{ļibə}\ K=\frac{1}{4}\pi D^2}$$

1. **Kruglən ploseəd ravņajtçə radiusьs kvadratlь π lьd vьļə** əktəmən.
2. **Kruglən ploseəd ravņajtçə diametrьs kvadrat ņoļəd jukənьslь π lьd vьlə** əktəmən.

Şļedstvije. **Kьk kruglən ploseədjas otnoşitçənь kьз radiusjasьslən kvadratjas ļibə diametrjasьslən kvadratjas.**

K_1 da K_2 — kьk kruglən ploseədjas; R_1 da R_2 — nalən radiusjasьs; D_1 da D_2 — nalən diametrjasьs, siз-kə:

$$K_1=\pi R_1^2=\frac{1}{4}\pi D_1^2;\quad K_2=\pi R_2^2=\frac{1}{4}\pi D_2^2.$$

Tajə ravenstvojasəs çlenən-çlenən jukam da loə:

$$\frac{K_1}{K_2}=\frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2}=\frac{R_1^2}{R_2^2}=\frac{D_1^2}{D_2^2}.$$

2. **Ţeorema**. **Şeкtorlən plosead ravnajtçə duga kuztaьs da radiusьş proizvedeņņə зьnlь.**

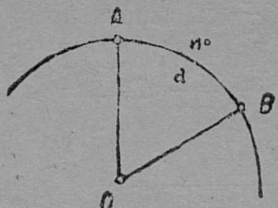
Şetəma: R radiusa krug (282 şerpas);
AB dugalən kuzta: $= a$, AOB şektorьn n^o.

Kolə dokazitnь: S şekt $= \frac{1}{2}aR$.

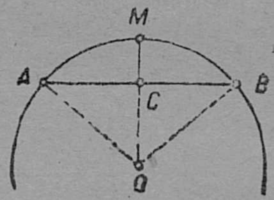
Dokazitəm. R radiusa kruglən K plosead $=\pi R^2$; 1^o ьзda dugaa şektorlən plosead krug ploseadьş $\frac{1}{360}$ ьзda, siз-kə, $\frac{\pi R^2}{360}$ ьзda. n^o ьзda AB dugaa AOB şektorlən plosead loə: S şekt $=\frac{\pi R^2 n}{360}=$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi RnR}{180}$, no $\smile$ AB $= a = \frac{\pi Rn}{180}$, ta vəsna

$$\boxed{S_{şekt}=\frac{1}{2}aR}$$

3. **Şegmentlən plosead**. AMB şegmentəs (283 şerp.) graniçitənь AMB $= a$ duga da AB xorda,—sьlən plosead artaşşə kьз sijə-žə a



282-əd şerpas.



283-əd şerpas.

dugaa AOB şektorlən plosead kostьn da AB xordaən da kьk ətkuza boka AOB kujimpeləsalən kьk radiusən artməm plosead kostьn raznoşt.

AMB şegmentlən plosead ravņajtçə AOB şektor ploseadlь AOB kujimpeləsa ploseadtəg; şektorlən plosead $=\frac{1}{2}aR$ da kujimpeləsalən plosead $=\frac{1}{2}a_n h_n$, ta vəsna şegmentlən plosead $=\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}a_n h_n$.

AMB şegmentьn (283 şerp.) AB xorda suşə **şegment poduvtasən**, şegment poduvtas sər pьr munьş CM=h perpendikular suşə **şegment sudtaən libə strelkaən.**

Juaşanjas da upraznennajas.

1. Unaən-ə ьзdas kьevizlən kuzta, kör radiussə ьзdədam 1 metrən?

2. Kьmьn pəv pravilnəj kujimpeləsaə vpisannəj kьeviz kuztaьs içətзьk opisannəj kьeviz kuztaьş?

3. Kьmьn pəv pravilnəj kujimpeləsa gəgər opisannəj kruglən ploseadьs ьзьdзьk sijə-zə kujimpeləsaə vpisannəj krug ploseadьş?

4. Artavnь, unaən-ə 120^o duga, kodlən radius $R=1 m$, ьзьdзьk sijəs ştagivajtan xordaьş.

5. Kьeviz зьnlən kuztaьs, kodəs artaləma 0,01-əз toçnoştən matьstəmən a_3+a_4 ьзda. Prəveritnь.

6. $R=3$ *m* ьзda radiusa kujim kьeviz kasajtçənь ortsьşan. Opredelitnь kьevizjas kostsa „nukьlaviza" kujimpeləsalьş plosead.

7. Veşkьdpeləsa kujimpeləsalən bokjas $2a$, $2b$ da $2c$. Tajə bokjas vьlə kьз diametrjas vьlə vəçəma kьevizjas. Gipotenuza vьlə vəçəm kruglən plosead ravnajtçə katetjas vьlə vəçəm krugjaslən ploseadjas summalь. Dokazitnь.

8. $R=1$ *m* radiusa kьevizjas kasajtçənь ortsьşan. Nuədnь kojməd kьeviz siз, medьm sijə şetəm kьevizjasəs jukis səri, da artavnь kujimnan krugsa ətuvja pajьslьş ploseadsə.

9. $R=2$ *m* radiusa krugəs koncentriçeskəj kьevizən jukəma səri. Opredelitnь koncentriçeskəj kьevizlьş radiussə.

10. Dokazitnь, mьj kьelən plosead $\pi(R+r)(R-r)$ ьзda, kən R da r—ortsьs da pьekəs radiusjas.

ƏTVETJAS

II jukəd	25 ļistвok	4. 80° da 100°. 5. 76°, 5; 45°. 6. 61° 8. 90°.
III „	33 „	3. 5 *sm*, 5 *sm* da 4 *sm* ļiвə $4\frac{1}{3}$ *sm*, $4\frac{1}{3}$ da $5\frac{1}{3}$ *sm*.
VI „	47 „	1. $\frac{a}{2}$. 2. *a* da *b*.
VII „	58 „	*1.* $AB \parallel CD$. *2.* $CD \perp KL$. *3.* 45° da 135°; 78° 45′ da 101° 15″; 80° da 100°; 108°,5 da 71°,5. *7.* 108° da 72°; 80° da 100°; 110° da 70°; 50° da 130°; 108°, 80°; 110° da 50°. *8.* 30°, 60° da 90°; oz.
VIII „	76 „	*2.* 24,2 *sm* *1.* 10 *sm*.
IX „	89 „	*2.* 9 pəv. *3.* Da. *4.* 250 *m*. *5.* Kvadratlən ploseadьs 900 sm^2 vьlə ьзьdзьk. *6.* Ķvadratlən perimetrьs 60 *sm* vьlə içətsьk. *8.* 25 sm^2
XI „	100 „	*6.* Ķьmьn kolə. *8.* 6 *sm*. *12.* 2) 2 *ç* vьlə; 3) 3 *sm* da 7 *sm* radiusjasa koncentriçeskəj kьevizjas. *13.* Veşkьd viz, kodi paraļļeļnəj şetəmjaslь da kodi munə na sərakostti, AB da CD kostsa peļəsjaslən kьk bişşektrisa. *16.* Koncentriçeskəj kьeviz, kodlən radiusьs ravņajtçə sərçutşaņ xordaəз ьlnakostlь.
XII „	107 „	*1.* 30°,35° da 115°. 37°,5, 60° da 82°,5. *5.* 80°. *6.* 70°.
XIII „	113 „	*2* 8 *sm* da 4 *sm* radiusjasa koncentriçeskəj kьevizjas. *3* 1,5 *sm*; 3 *sm*.
XIV „	116 „	*5.* Ķьevizjas, kodjasəs vəçəma kьзi diametr vьlə, vundəg vьlə, kodlən pomjasьs: şetəm çut da şetəm kьevizlən sərçut.
XV „	128 „	*2.* Nuədnь bişşektrisa. *3.* 2; 2; 0,5. *6.* 12,8 *sm* da 8 *sm*.
XVI „	141 „	*9.* Məd da kojməd. *10.* 6 *sm*. *11.* 1,5 *sm* da 4,5 *sm*.
„ „	„ „	*12.* Veşkьdņoļpeļəsajas podobnəjəş səmьn sek, kor nəjə kvadratjas.
XVII „	149 „	*1.* a) oz; в) da. *2.* Joşpeļəsa; oz vermь lonь. *3.* 10 *sm*, $13\frac{1}{3}$ *sm*, da $16\frac{2}{3}$ *sm*. *4.* 4 *kg*.
XVIII	154 „	*2.* $5\sqrt{3}$ *sm* da $10\sqrt{3}$ *sm*. *3* 4 *sm*. *4.* $R\sqrt{3}$; əţi kojməd jukən.
XIX „	158-159 „	*1.* Sь vəsna, mьj $2+4 \neq 3+5$. *2*. Sь vəsna, mьj $1+3 \neq 2+4$. *9.* 7 *sm*.
XX „	169 „	*2.* $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}a\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$. *3.* 1) $R\sqrt{2}$; $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $2R$; 2) R; $R\sqrt{2}$; $R\sqrt{3}$; $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $2R$. *4.* $\frac{1}{2}b\sqrt{3}$. *6.* $\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.
XXI „	181 „	*1.* $2\pi m$ vьlə. *2.* 2 pəv. *3.* 4 pəv. *4.* $\approx$ 36 *sm* vьlə. *6.* 1,44 m^2. *8.* $2R^2(\pi-2) \approx 2{,}3\ m^2$. *9.* $\frac{1}{2}R\sqrt{2} \approx 1{,}4\ m$.

ŢERŖMIN ƏKTƏD

Ţelə—тело.
Svojstvo—свойство.
Forma—форма.
Ƅ3da—размер.
Şar—шар.
Prostranstvo—пространство.
Prostranstvo jukən—часть пространства.
Ķuzta—длина.
Paşta—ширина.
Sudta—высота.
Ķьzta—толщина.
Verkəs—поверхность.
Graŋica—граница.
Viz—линия.
Veşkьd viz—прямая линия.
Ŋukьļa viz—кривая линия.
Gorizontaļnəj veşkьd viz—горизонтальная прямая линия.
Verţikaļnəj veşkьd viz—вертикальная прямая линия.
Luç—луч.
Vundəg—отрезок.
Çeglaşəm viz—ломанная линия.
Şmesannəj viz—смешанная линия.
Ploskəj verkəs—плоская поверхность.
Ŋukьļa verkəs—кривая поверхность.
Figura—фигура.
Geometriçeskəj obraz—геометрический образ.
Akşioma—аксиома.
Ţeorema—теорема.
Ķьeviz—окружность.
Krug—круг.
Sərçut—центр.
Tupkəsa—замкнутый.
Ŗadius—радиус.
Xorda—хорда.

Ḑiametr—диаметр.
Duga—дуга.
Duga gradus—дуговой градус.
Peļəs gradus—угловой градус.
Minut—минута.
Şekund—секунда.
Ətьзda, ravŋajtçə—равно.
Peļəs—угол.
Pavtьrtəm peļəs—развернутый угол.
Veşkьd peļəs—прямой угол.
Joş peļəs—острый угол.
Єəєьd peļəs—тупой угол.
Sərsa peļəs—центральный угол.
Jərtəm peļəs—заключенный угол.
Berdsa peļəs—прилежащий угол.
Ortça peļəs—смежный угол.
Popolŋiţeļnəj peļəs—пополнительный угол.
Dopolŋiţeļnəj peļəs—дополнительный угол.
Pьekəs peļəs—внутренний угол.
Ortsьs peļəs—внешний угол.
Paŋьda peļəs—противоположный угол.
Bok—сторона.
Poduvtas—основание.
Jьv—вершина.
Bişşektrisa—биссектриса.
Meḑiana—медиана.
Perpendikuļar—перпендикуляр.
Pəlьŋa viz—наклонная линия.
Çut—точка.
Proekcija—проекция.
Kujimpeļəsa—треугольник.
Veşkьdpeļəsa kujimpeļəsa—прямоугольный треугольник.
Joşpeļəsa kujimpeļəsa—остроугольный треугольник.
Єəєьdpeļəsa kujimpeļəsa—тупоугольный треугольник.

Raznəj bokjasa kujimpeləsa—разносторонний треугольник.
Кьk ətkuza boka kujimpeləsa—равнобедренный треугольник.
Ətkuza bokjasa kujimpeləsa—равносторонний треугольник.
Katet—катет.
Gipotenuza—гипотенуза.
Oşevəj şimmetrija—осевая симметрия.
Şimmetrija oş—ось симметрии.
Paralleləj veşkьd vizjas—параллельные прямые линии.
Pьekəs ətarboksa peləs—внутренний односторонний угол.
Ortsьs ətarboksa peləs—внешний односторонний угол.
Sootvetstvennəj peləs—соответственный угол.
Krestən kujlьş peləs—накрест лежащий угол.
Nolpeləsa—четыреугольник.
Trapecija—трапеция.
Parallelogram—параллелограм.
Kvadrat—kvadrat.
Romb—ромб.
Diagonal—диагональ.
Centralnəj şimmetrija—центральная симметрия.
Veşkьdnolpeləsa—прямоугольник.
Sər viz—средняя линия.
Unapeləsa—многоугольник.

Ploşead—площадь.
Ətinima—одноименный.
Ətgьrşa—равновеликий.
Ətьsdaьş vəçəma—равносоставленный.
Geometriçeskəj mesta—геометрическое место.
Ətьllaьn—равноудаленный.
Kasatelnəj viz—касательная линия.
Kasannə çut—точка касания.
Şərçutkorşьş—центроискатель.
Vpisannəj peləs—вписанный угол.
Opisannəj peləs—описанный угол.
Otsaşьş—вспомогательный.
Koncentriçeskəj kьeviz—концентрическая окружность.
Ekscentriçeskəj kьeviz—эксцентрическая окружность.
Proporcionalnəj vundəgjas—пропорциональные отрезки.
Podobijə—подобие.
Popereçnəj masstab—поперечный масштаб.
Podobnəja puktaləm—подобно расположенные.
Artaləm—вычисление.
Apofema—апофема.
Şektor—сектор.
Şegment—сегмент.

JURINDALЬŞ

IX. Veşkьdviza figurajaslən ploseadjas.

X. Geometriçeskəj mestajas.

XI. Kьeviz da krug.

XII. Peləsjasəs murtaləm.

XIII. Kьk kьevizlən otnoşitelnəj polozeŋŋə.

XIV. Geometriçeskəj mestajas metodən postrojeŋŋə vьlə zadaçajas

XV. Proporcionalnəj vundəgjas.

Donьs 2 sajt.
Pereplot 30 ur.