R 108
226

А. КИСЕЛЕВ

АЛГЕБРА

УЧЕБНИК ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

6 и 7 ГОДЫ ОБУЧЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ОДИННАДЦАТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. Н. БАРСУКОВА

Утверждено коллегией Наркомпроса РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1934

ПРЕДИСЛОВИЕ.

В первой части изложено все то, что требуется последними программами Наркомпроса для 6-го и 7-го годов обучения в средней школе.

Последовательность изложения соответствует программе, за исключением раздела алгебраических дробей. В целях единства изложения этот раздел помещен в одной главе, тогда как, согласно программе, этот материал проходится частью на 6-м, частью на 7-м году обучения. Преподаватель легко сможет выделить эти части.

В настоящем новом издании учебника алгебры исправлены все замеченные опечатки, а также неточности или шероховатости слога; в некоторых местах сделаны небольшие вставки и изменения для лучшего уяснения текста.

Увеличено число упражнений (в первой части их было 200, теперь 297), и в конце книги даны ответы на все упражнения.

Понятие о нулевом показателе, излагавшееся прежде в § 57 первой части, теперь отнесено ко второй части, к главе „Обобщение понятия о показателе".

В составлении настоящего учебника принимал частичное участие проф. А. Н. Барсуков, которому приношу мою глубокую благодарность.

А. Киселев.

Ленинград, октябрь 1933 г.

Всесоюзная библиотека имени В. И. Ленина
34-9729

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ.

I. Алгебраическое знакоположение.

1. Употребление букв. а) *Для выражения общих свойств чисел.* Пусть мы желаем кратко выразить в письменной форме, что произведение двух чисел не изменится, если мы поменяем местами множимое со множителем. Тогда, обозначив одно число буквой a, а другое буквой b, мы можем написать равенство: $a \times b = b \times a$, или короче: $ab = ba$, условившись раз навсегда, что если между двумя буквами, написанными рядом, не стоит никакого знака, то это значит, что между ними подразумевается знак умножения. Так поступают всегда, если желают выразить, что некоторое свойство принадлежит не каким-нибудь отдельным числам, а всяким числам.

Для обозначения чисел употребляются обыкновенно буквы латинского (или французского) алфавита.

б) *Для сокращенного выражения правила, посредством которого можно решать задачи,* сходные по условиям, но различающиеся только величиной данных чисел.

Положим, например, мы решаем задачу:

найти 3% числа 520.

Тогда рассуждаем так:

1% какого-нибудь числа составляет $\frac{1}{100}$ этого числа; следовательно:

1% числа 520 составляет $\frac{520}{100} = 5{,}2$;

3% „ „ „ $\frac{520}{100} \times 3 = 15{,}6$.

Решив несколько подобного рода задач, мы замечаем, что для нахождения процентов какого-нибудь числа достаточно разделить это число на 100 и результат умножить на число процентов. Чтобы выразить это наглядно, мы предложим задачу в таком общем виде:

найти $p\%$ числа a.

Задачу решим так:

1% числа a составляет $\frac{a}{100}$,

$p\%$ „ „ „ $\frac{a}{100} \times p$.

Обозначив искомое число буквой x, мы можем написать равенство:

$$x = \frac{a}{100} \times p,$$

из которого прямо видно, как можно находить проценты от любого данного числа.

Возьмем еще пример. В арифметике правило умножения дробей мы выражаем словами так: чтобы умножить дробь на дробь, надо перемножить отдельно их числители и знаменатели и первое произведение разделить на второе. Применяя буквенные обозначения, мы можем это правило выразить очень коротко. Именно, обозначив числитель первой дроби через a, знаменатель через b, а для второй дроби соответственно через c и d, мы можем написать:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Нетрудно видеть, что эта запись дает о б щ е е правило умножения для всяких дробей, так как под буквами мы можем подразумевать любые числа.

Точно так же для правила деления дроби на дробь будем иметь запись:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Заметим, что *всякое равенство или неравенство, выражающее посредством букв и знаков действий какое-нибудь соотношение между числами, называется формулой.*

Приведем для примера некоторые формулы.

Если основание и высоту прямоугольника измерим одной и той же линейной единицей и для основания получим число b, а для высоты число h, то площадь s этого прямоугольника, выраженная в соответствующих квадратных единицах, определяется формулой $s = bh$. При тех же обозначениях для площади треугольника получим формулу:

$$s = \frac{1}{2} bh.$$

Из физики известно, что для определения удельного веса какого-либо вещества надо вес данного количества этого вещества разделить на его объем. Обозначая вес тела (в граммах) через p, объем его (в куб. сантиметрах) через v и удельный вес через d, мы можем приведенное правило для определения удельного веса кратко выразить формулой:

$$d = \frac{p}{v}.$$

2. Алгебраическое выражение. Если несколько чисел, обозначенных буквами (или буквами и цифрами), соединены между собой посредством знаков, указывающих, какие действия и в каком порядке надо произвести над числами, то такое обозначение называется *алгебраическим выражением.*

Таковы, например, выражения: $\frac{a}{100} \times p$; ab; $2x + 1$.

Для краткости мы часто будем вместо „алгебраическое выражение“ говорить просто „выражение“.

Вычислить какое-нибудь выражение для данных численных значений букв — значит подставить в него на место букв эти численные значения и произвести все указанные в выражении действия; число, получившееся после этого, называется *численной величиной* алгебраического выражения для данных численных значений букв. Так, численная величина выражения $\frac{a}{100} \times p$ при $p = 3$ и $a = 520$ равна

$$\frac{520}{100} \times 3 = 5{,}2 \times 3 = 15{,}6.$$

3. Действия, рассматриваемые в алгебре, следующие: *сложение, вычитание, умножение, деление, возвышение в степень и извлечение корня.* Что такое первые четыре действия, известно из арифметики. Пятое действие — возвышение в степень — представляет собой особый случай умножения, когда перемножаются несколько одинаковых сомножителей. Произведение таких сомножителей называется *степенью*, а число их — *показателем степени.* Возводимое в степень число называется *основанием степени.* Если какое-нибудь число берется сомножителем 2 раза, то произведение называется *второй степенью*, если какое-нибудь число берется сомножителем 3 раза, то произведение называется *третьей степенью* и т. д. Так, вторая степень числа 5 есть произведение 5×5, т. е. 25; третья степень числа $\frac{1}{2}$ есть произведение $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, т. е. $\frac{1}{8}$. *Первой степенью* числа называют само это число.

Вторая степень называется иначе *квадратом,* а третья степень *кубом.* Такие названия даны потому, что произведение $a \times a$ выражает (в квадратных единицах) площадь квадрата со стороною в a линейных единиц, а произведение $a \times a \times a$ выражает (в кубических единицах) объем куба с ребром в a линейных единиц.

Об извлечении корня мы пока говорить не будем, так как это действие в начале алгебры не рассматривается.

4. Знаки, употребляемые в алгебре. Для обозначения первых четырех действий в алгебре употребляются те же знаки, как и в арифметике, только знак умножения, как мы уже говорили, обыкновенно не пишется, если оба сомножителя или один из них обозначены буквами. Например, вместо $a \times b$ (или вместо $a \cdot b$) пишут просто ab и вместо $3 \times a$ (или $3 \cdot a$) пишут $3a$. В качестве знака деления употребляется, безразлично, или двоеточие (:), или горизонтальная черта; так, выражения $a : b$ и $\frac{a}{b}$ означают одно и то же, а именно, что число a делится на другое число b.

Возвышение в степень принято сокращенно выражать так: пишут число, которое берется сомножителем (основание степени), а над ним, с правой стороны, ставят другое число (показатель степени), выражающее, сколько раз возвышаемое число должно быть повторено сомножителем. Так, 3^4 (читается *три в четвертой степени*) заменяет собою подробное обозначение:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3.$$

Если при числе не стоит никакого показателя степени, то можно подразумевать при нем показателем единицу; например, a означает то же самое, что и a^1.

Равенство двух каких-либо выражений обозначается знаком $=$, а неравенство знаком $>$, который острием угла должен быть обращен к меньшему числу. Например, если написано:

$$5+2=7 \qquad 5+2<10 \qquad 5+2>6,$$

то это значит: $5+2$ равно 7; $5+2$ меньше 10, $5+2$ больше 6.

5. Порядок действий. Относительно порядка, в котором надо производить действия, указанные в алгебраическом выражении, условились: **сначала производить действия высшего порядка, т. е. возвышение в степень и извлечение корня, затем умножение и деление и, наконец, сложение и вычитание.**

Так, если написано выражение: $3a^2b-\frac{b^3}{c}+d$, то при вычислении его надо сначала произвести возвышение в степень (число a возвысить в квадрат и число b в куб), затем умножение и деление (3 умножить на a^2 и полученный результат на b; b^3 разделить на c) и, наконец, вычитание и сложение (из $3a^2b$ вычесть $\frac{b^3}{c}$ и к результату прибавить d).

Когда приходится по условиям задачи отступить от этого порядка действий, то употребляются скобки. Скобки показывают, что действия над числами, заключенными в скобки, надо произвести ранее других. Например, выражения:

$$5+7\cdot 2 \quad \text{и} \quad (5+7)2$$

означают не одно и то же. В первом случае нужно 7 умножить на 2 и результат прибавить к 5 (получаем 19). Во втором случае надо сначала сложить 5 и 7 и результат умножить на 2 (получаем 24).

Точно так же, если написано:

$$(a+b)c-d,$$

то это значит, что сначала надо сложить a и b, затем полученное число умножить на c, и из того, что получится, вычесть d.

Когда приходится заключить в скобки такое выражение, в котором есть свои скобки, то новым скобкам придают какую-нибудь другую форму. Например, выражение:

$$a\{b-[c+(d-e)]\}$$

означает, что из d вычитается e, полученная разность прикладывается к c, полученная сумма вычитается из b и на эту разность умножается a.

Скобкам дают обыкновенно такие названия: круглые скобки ( ), квадратные, или ломаные, скобки [ ], фигурные скобки { }.

Когда в выражение входят несколько скобок, то обычно сначала производят действия над числами, заключенными в круглые скобки, затем над числами в квадратных скобках и, наконец, в фигурных. Производя указанные в скобках действия, мы уничтожаем, или, как говорят, „раскрываем“, скобки. Так, в выражении:

$$5\{24-2[10+2(6-2)-3(5-2)]\}$$

сначала раскрываем круглые скобки:

$$5\{24-2[10+2\cdot 4-3\cdot 3]\}.$$

Затем раскрываем квадратные скобки:

$$5\{24-2\cdot 9\}.$$

Наконец, раскрываем фигурные скобки:

$$5\cdot 6=30.$$

Упражнения.

1. Сторона квадрата равна *ам*; выразить его периметр, затем его площадь.
2. Если ребро куба равно *т см*, то как выразятся его поверхность, его объем?
3. У прямоугольника основание равно *х м*, а высота на *дм* короче основания. Выразить его площадь.
4. Некоторое двузначное число содержит *х* десятков и *у* простых единиц; сколько всех единиц в этом числе?
5. В трехзначном числе имеется *а* сотен, *b* десятков и *с* простых единиц. Какой формулой можно выразить все число единиц, содержащееся в этом числе?
6. Смешано 2 сорта чаю: первого сорта взято *а кг*, второго *b кг*. Килограмм первого сорта стоит *т* руб., второго сорта *п* руб. Выразить цену одного килограмма смеси.
7. Указать посредством знаков, принятых в алгебре: 1) сумму квадратов чисел *х* и *у*; 2) квадрат суммы этих же чисел; 3) произведение квадратов этих чисел; 4) квадрат произведения их; 5) произведение суммы чисел *а* и *b* на их разность; 6) частное от деления суммы чисел *т* и *п* на их разность (последнее выразить двояким путем, т. е. посредством знака : и посредством черты).
8. Вычислить следующие выражения при $a=20$, $b=8$ и $c=3$.

1) $(a+b)c$ 2) $a+bc$ 3) $(a+b)a-b$
4) $(a+b)(a-b)$ 5) $(a+b):c$ 6) $\dfrac{a+b}{b-c}$

9. Написать выражение, которое получится, если в произведении $3ab$ вместо a подставить сумму $x+y$ и вместо b разность $x-y$.

Исторические сведения.

Слово „алгебра" — арабского происхождения. Этим словом начиналось заглавие математического труда, написанного арабским ученым Альхваризми (в 820 г.).

В Европе впервые употребил это слово в качестве заглавия к своему математическому труду итальянский математик Бомбелли в 1572 г., а затем постепенно им стали пользоваться все математики.

Значение этого слова будет понятно после прохождения главы об уравнениях.

Буквы для обозначения чисел ввел впервые французский математик Виета в 1591 г. После него особенно широко пользовался буквенными обозначениями знаменитый французский философ и математик Рене Декарт (1596—1650 гг.).

Знаки, употребляемые в настоящее время в алгебре, введены различными математиками в разное время. Прежде для обозначения действий употребляли целое слово или даже фразу. Практическая потребность в более быстрых вычислениях приводила к попыткам сокращения отдельных наиболее употребительных слов, пока, наконец, эти слова или их сокращения не заменялись специальными знаками. Укажем время появления наиболее употребительных знаков.

Знаки сложения и вычитания „+" и „—" введены были немецким математиком Видманом в 1489 г. До него еще они встречаются в рукописях великого итальянского художника Леонардо-да-Винчи.

Для обозначения равенства введен был (в 1557 г.) английским алгебраистом Рекордом знак „=", „ибо, — как писал он, — никакие два предмета не могут быть более равными, чем две параллельные линии одинаковой длины". Другой английский математик Херриот ввел знаки „>" и „<" (в 1631 г.) и точку как знак умножения.

Знаменитым немецким математиком Лейбницем (в 1694 г.) впервые введен знак „:" для обозначения деления, которое раньше его обозначалось чертою.

Скобки ( ), [ ] и { } встречаются впервые в трудах фламандского математика Жирара (1629 г.).

Не все эти знаки сразу входили во всеобщее употребление. Некоторые математики продолжали еще пользоваться частью старыми обозначениями. Алгебраическую символику в ее настоящем виде можно считать окончательно установившейся лишь к концу XVIII столетия. Огромное влияние оказали в этом отношении сочинения великого английского ученого Исаака Ньютона (1642—1727 гг.).

II. Свойства первых четырех арифметических действий.

Напомним известные уже из арифметики главнейшие свойства действий сложения, вычитания, умножения и деления, так как этими свойствами придется часто пользоваться и в алгебре.

6. Сложение. а) **Сумма не изменяется от перестановки слагаемых** (переместительный закон сложения). Так:

$$3+8=8+3;\quad 5+2+4=2+5+4=4+2+5.$$

Вообще:

$$a+b=b+a;\quad a+b+c+\ldots=b+a+c+\ldots=c+a+b+\ldots$$

Ряд точек показывает, что число слагаемых может быть и более трех.

б) **Сумма нескольких слагаемых не изменится, если какие-нибудь из них заменить их суммой** (сочетательный закон сложения). Так:

$$3+5+7=3+(5+7)=3+12=15;$$
$$4+7+11+6+5=7+(4+5)+(11+6)=7+9+17=33.$$

Вообще:

$$a+b+c=a+(b+c)=b+(a+c)\text{ и т. п.}$$

Иногда этот закон выражают так: **слагаемые можно соединять в какие угодно группы.**

в) **Чтобы прибавить к какому-либо числу сумму нескольких чисел, можно прибавить отдельно каждое слагаемое одно за другим.** Так:

$$5+(7+3)=(5+7)+3=12+3=15.$$

Вообще:

$$a+(b+c+d+\ldots)=a+b+c+d+\ldots$$

7. Вычитание. а) **Чтобы вычесть из какого-нибудь числа сумму нескольких чисел, можно вычесть отдельно каждое слагаемое одно за другим.** Так:

$$20-(5+8)=(20-5)-8=15-8=7.$$

Вообще:

$$a-(b+c+d+\ldots)=a-b-c-d-\ldots$$

б) **Чтобы прибавить разность двух чисел, можно прибавить уменьшаемое и затем вычесть вычитаемое.** Так:

$$8+(11-5)=8+11-5=14.$$

Вообще:

$$a+(b-c)=a+b-c.$$

в) **Чтобы вычесть разность, можно вычесть уменьшаемое и прибавить вычитаемое или сначала прибавить вычитаемое и затем вычесть уменьшаемое.** Так:

$$18-(9-5)=18-9+5=14$$

или

$$18-(9-5)=18+5-9=14.$$

Вообще:

$$a-(b-c)=a-b+c$$

или

$$a-(b-c)=a+c-b.$$

8. Умножение. а) **Произведение не изменяется от перестановки сомножителей** (переместительный закон умножения). Так:

$$4\cdot5=5\cdot4;\quad 3\cdot2\cdot5=2\cdot3\cdot5=5\cdot3\cdot2.$$

Вообще:

$$ab=ba;\quad abc\ldots=bac\ldots=cba\ldots$$

б) **Произведение нескольких сомножителей не изменится, если какие-нибудь из них заменить их произведением** (сочетательный закон умножения). Так:

$$7\cdot3\cdot5=5\cdot(3\cdot7)=5\cdot21=105.$$

Вообще:

$$abc=a(bc)=b(ac)\text{ и т. п.}$$

в) **Чтобы умножить какое-либо число на произведение нескольких сомножителей, можно умножить это число на первый сомножитель, полученный результат умножить на второй сомножитель и т. д.** Так:

$$3\cdot(5\cdot4)=(3\cdot5)\cdot4=15\cdot4=60.$$

Вообще:

$$a(bcd\ldots)=abcd\ldots$$

г) **Чтобы умножить произведение нескольких сомножителей на какое-либо число, можно умножить на это число один из сомножителей, оставив другие без изменения.** Так:

$$(3\cdot2\cdot5)\cdot3=(3\cdot3)\cdot2\cdot5=3\cdot(2\cdot3)\cdot5=3\cdot2\cdot(5\cdot3).$$

Вообще:

$$(abc\ldots)m=(am)bc\ldots=a(bm)c\ldots\text{ и т. п.}$$

д) **Чтобы умножить сумму на какое-либо число, можно каждое слагаемое умножить на это число и полученные результаты сложить.** Так:

$$(5+3)\cdot7=5\cdot7+3\cdot7.$$

Вообще:

$$(a+b+c+\ldots)m=am+bm+cm+\ldots$$

В силу переместительного закона умножения это же свойство можно выразить так: **чтобы умножить какое-либо число на сумму нескольких чисел, можно умножить это число на каждое слагаемое отдельно и полученные результаты сложить.** Так:

$$5\cdot(4+6)=5\cdot4+5\cdot6.$$

Вообще:

$$m(a+b+c+\ldots)=ma+mb+mc+\ldots$$

Это свойство называется *распределительным* законом умножения, так как умножение, производимое над суммою, *распределяется* на каждое слагаемое в отдельности.

е) Распределительный закон можно применить и к разности. Так:

$$(8-5)\cdot 4=8\cdot 4-5\cdot 4;\quad 7\cdot(9-6)=7\cdot 9-7\cdot 6.$$

Вообще:

$$(a-b)c=ac-bc;\quad a(b-c)=ab-ac,$$

т. е., чтобы умножить разность на какое-либо число, можно умножить на это число отдельно уменьшаемое и вычитаемое и из первого результата вычесть второй; чтобы умножить какое-либо число на разность, можно это число умножить отдельно на уменьшаемое и вычитаемое и из первого результата вычесть второй.

9. Деление. а) **Чтобы разделить сумму на какое-либо число, можно разделить на это число каждое слагаемое отдельно и полученные результаты сложить:**

$$(30+12+5):3=\frac{30}{3}+\frac{12}{3}+\frac{5}{3}=10+4+1\frac{2}{3}.$$

Вообще:

$$(a+b+c+\ldots):m=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\ldots$$

б) **Чтобы разделить разность на какое-либо число, можно разделить на это число отдельно уменьшаемое и вычитаемое и из первого результата вычесть второй:**

$$(20-8):5=\frac{20}{5}-\frac{8}{5}=4-1\frac{3}{5}.$$

Вообще:

$$(a-b):m=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

в) **Чтобы разделить произведение нескольких сомножителей на какое-либо число, можно разделить на это число один из сомножителей, оставив другие без изменения.**

$$(40\cdot 12\cdot 8):4=10\cdot 12\cdot 8=40\cdot 3\cdot 8=40\cdot 12\cdot 2.$$

Вообще:

$$(abc\ldots):m=(a:m)\,bc\ldots=a\,(b:m)\,c\ldots \text{ и т. д.}$$

г) **Чтобы разделить какое-либо число на произведение нескольких сомножителей, можно разделить это число на первый сомножитель, полученный результат разделить на второй сомножитель и т. д.**

$$120:(2\cdot 5\cdot 3)=[(120:2):5]:3=(60:5):3=12:3=4.$$

Вообще:

$$a:(bcd\ldots)=[(a:b):c]:d\ldots \text{ и т. д.}$$

д) Укажем еще следующее свойство деления:

Если делимое и делитель умножим (или разделим) на одно и то же число, то частное не изменится.

Проверим это свойство на следующих двух примерах:

1) $8:3=\frac{8}{3}$,

умножим делимое и делитель, положим, на 5; тогда получим новое частное:

$$(8\cdot5):(3\cdot5)=\frac{8\cdot5}{3\cdot5},$$

которое по сокращении дроби на 5 даст прежнее частное $\frac{8}{3}$.

$$\frac{3}{4}:\frac{5}{6}=\frac{3\cdot6}{4\cdot5}.$$

Умножим делимое и делитель, положим, на $\frac{2}{7}$; тогда получим новое частное:

$$2)\ \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\right):\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{7}\right),$$

которое, согласно правилам умножения и деления дробей, равно:

$$\frac{3\cdot2}{4\cdot7}:\frac{5\cdot2}{6\cdot7}=\frac{3\cdot2\cdot(6\cdot7)}{4\cdot7\cdot(5\cdot2)}=\frac{3\cdot2\cdot6\cdot7}{4\cdot7\cdot5\cdot2},$$

что по сокращении на 2 и на 7 дает прежнее частное $\frac{3\cdot6}{4\cdot5}$.

Вообще, какие бы числа a, b и m ни были, всегда $(am):(bm)=a:b$, что можно написать и так:

$$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}.$$

Если частное не изменяется от умножения делимого и делителя на одно и то же число, то оно не изменяется и от деления делимого и делителя на одно и то же число, так как деление на какое-нибудь число равносильно умножению на обратное число.

10. Применение свойств действий. Указанными свойствами действий можно часто пользоваться для преобразования алгебраических выражений; например:

а) $a+b+a+2+b+a+8$. Пользуясь сочетательным свойством сложения, сгруппируем слагаемые так:

$$(a+a+a)+(b+b)+(2+8).$$

Эту сумму короче можно написать так:

$$(a\cdot3)+(b\cdot2)+10,$$

что, пользуясь переместительным свойством умножения, можно переписать так:

$$3a+2b+10.$$

б) $a+(b+a)$. Чтобы к числу a прибавить сумму $(b+a)$, можно к a прибавить b и затем еще a; получим $a+b+a$. Сгруппируем слагаемые так:

$$(a+a)+b.$$

Эту сумму можно написать короче так:

$$a\cdot2+b$$ и еще короче: $2a+b$.

в) $a \cdot (3x^2a)$. Чтобы умножить число a на произведение $3x^2a$, можно a умножить на 3, полученный результат умножить на x^2 и т. д. Получим $a3x^2a$. Это произведение можно написать: $3a^2x^2$, поставив буквы в алфавитном порядке, а числовой множитель впереди.

г) $\left(\frac{1}{5}ax\right) \cdot 10$. Чтобы умножить произведение на 10, можно умножить на 10 один какой-нибудь сомножитель. Умножим $\frac{1}{5}$ на 10; тогда получим $2ax$.

д) $(a + x + 1) \cdot 3$. Согласно распределительному свойству умножения получим:

$$(a \cdot 3) + (x \cdot 3) + (1 \cdot 3),$$

что можно написать так:

$$3a + 3x + 3.$$

е) $\frac{9ab}{3}$. Чтобы разделить произведение $9ab$ на 3, можно разделить на 3 один сомножитель 9; разделив, получим $3ab$.

Упражнения.

Упростить следующие выражения, объяснив, какими свойствами действий приходится пользоваться в каждом примере:

10. $a + b + a + b + a$; $x + 10 + (12 - x) + 3$.

11. $5 + a(b - 5) + a$; $x + (a + x)$.

12. $m + (n - m)$; $5aabxabxx$.

13. $(3xy) \cdot (2z)$; $\left(\frac{2}{3}ax\right) \cdot 3$.

14. $(x + 3) \cdot 5$; $7(x + y + z)$.

15. $(2a + 8b - 4c) : 4$; $(10a^2b) : 2$.

16. $(72x - 18y) : 9$; $(20a^2x^3) : (5ax^2)$.

17. $\frac{a}{4} : \frac{b}{4}$; $\frac{15ax}{7} : \frac{5a}{7}$.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ.

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ.

1. Понятие о величинах, которые можно понимать в двух противоположных смыслах.

11. Задача 1. Термометр в полночь показывал 2°, а в полдень 5°. На сколько градусов и как изменилась температура от полуночи до полудня?

В этой задаче условия выражены недостаточно полно; надо еще указать: 2° тепла или 2° холода показывал термометр в полночь; подобные же указания должны быть сделаны и относительно температуры в полдень. Если, например, и в полночь и в полдень термометр указывал тепло, то температура за этот промежуток времени повысилась от 2° до 5°, значит повысилась на 3°; если же в полночь термометр указывал 2° холода (ниже 0°), а в полдень 5° тепла (выше 0°), то температура повысилась на $2+5$, т. е. на 7°, и т. п.

В этой задаче речь идет о величине, имеющей направление: число градусов температуры можно отсчитывать вверх от нулевой черты термометра и вниз от нее. Принято температуру выше 0° (тепло) считать положительной и обозначать числом градусов со знаком +, а температуру ниже 0° (холод) считать отрицательной и обозначать числом градусов со знаком — (не будет недоразумения, если первое число брать совсем без знака).

Выразим теперь нашу задачу, примерно, так: термометр в полночь показывал $-2°$, а в полдень $+5°$. На сколько градусов и как изменилась температура от полуночи до полудня? В таком виде задача получает вполне определенный ответ: температура повысилась на $2+5$, т. е. на 7°.

Задача 2. Когда скорый поезд Октябрьской железной дороги (соединяющей Москву с Ленинградом) находился на расстоянии 100 *км* от станции Бологое (эта станция лежит, приблизительно, посредине между Москвой и Ленинградом), тогда почтовый поезд этой дороги был на расстоянии 50 *км* от Бологого. На каком расстоянии находились тогда эти два поезда друг от друга?

В таком виде эта задача представляется не вполне определенной; в ней не сказано, находились ли поезда по одну сторону от Бологого, например, в сторону по направлению к Ленинграду, или же они были по разные стороны от Бологого. Если первое, то расстояние между поездами было, очевидно, $100-50$, т. е. 50 *км*, а если второе, то это

расстояние было $100+50$, т. е. 150 *км*. Значит, для того чтобы эта задача была определенною, недостаточно задать величину расстояния поездов от Бологого, но еще нужно указать, в каком направлении эти расстояния надо считать от Бологого.

Мы имеем здесь опять пример величины, в которой кроме ее размера можно рассматривать еще направление. Одно и то же расстояние (например 100 *км*) от поезда до Бологого может быть взято в одном направлении (например к Москве) и в другом, противоположном первому (к Ленинграду).

Обыкновенные арифметические числа показывают только величину расстояния и ничего не говорят нам о направлении, в котором это расстояние взято.

В данном случае пришлось бы к числу, указывающему расстояние, присоединять указание направления, например 100 *км* к Москве, 50 *км* к Ленинграду и т. п. Только тогда задача становится вполне определенной.

Указания направлений можно выполнить так:

Назовем какое-нибудь одно из двух направлений Октябрьской дороги (например направление от Ленинграда к Москве) положительным, а противоположное направление (от Москвы к Ленинграду) отрицательным; сообразно этому расстояния, считаемые в положительном направлении, будем называть положительными расстояниями, а расстояния, считаемые в отрицательном направлении, будем считать отрицательными. Первые будем выражать числами со знаками $+$ (плюс) или вовсе без знака, а вторые — числами со знаком $-$ (минус).

Так, если поезд находится в месте, отстоящем на 100 *км* от Бологого по направлению к Москве, то мы будем говорить, что его расстояние от Бологого равно $+100$ *км* (или просто 100 *км*); если же поезд находится, положим, на 50 *км* от Бологого по направлению к Ленинграду, то мы скажем, что его расстояние от Бологого равно -50 *км*. Здесь знаки $+$ и $-$, конечно, не обозначают действий сложения и вычитания, а только служат условно для обозначения направлений.

Выразим теперь нашу задачу так: когда скорый поезд Октябрьской железной дороги находился от Бологого на расстоянии $+100$ *км* (или просто 100 *км*), тогда почтовый поезд этой дороги был от Бологого на расстоянии -50 *км*. Как велико было тогда расстояние между этими поездами? Теперь задача выражена вполне точно и ответ на нее получается определенный (см. черт. 1, на котором стрелка указывает положительное направление дороги); поезда находились на расстоянии $100+50$, т. е. 150 *км*.

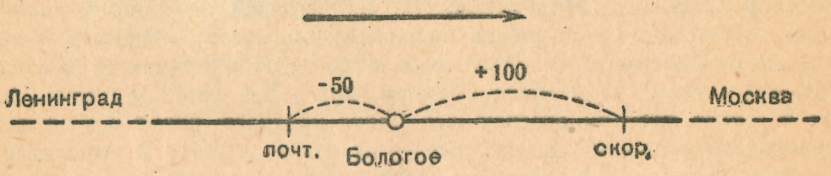
12. Другие величины, которые можно понимать в двух противоположных смыслах. Кроме величин, указанных в предыдущих задачах, многие другие также имеют направление, т. е. они могут быть рассматриваемы в двух противоположных смыслах. Таковы, например:

доход	в	противоположном	смысле	будет расход
выигрыш	»	»	»	» проигрыш
прибыль	»	»	»	» убыток
имущество	»	»	»	» долг

и т. п.

Если доход, выигрыш, прибыль, имущество... условимся считать величинами положительными и выражать их числами со знаком + (или без знака), то расход, проигрыш, убыток, долг... надо считать величинами того же рода, но отрицательными и выражать их числами со знаком —; тогда можно говорить, что расход есть отрицательный доход, проигрыш есть отрицательный выигрыш и т. д. При таком соглашении понятны будут, например, такие словесные выражения: жилищное товарищество получило дохода с квартир: в январе +200 руб., в феврале +150 руб., в марте —50 руб. (значит, в марте получился убыток 50 руб.); или такие: у старшего брата имущества было на 500 руб., у среднего на 300 руб., у младшего на —500 руб. (значит, у младшего брата был долг в 500 руб.).

Должно однако заметить, что наряду с указанными величинами существует много других, в которых нельзя указать „направления"; например, нельзя понимать в двух противоположных смыслах такие величины, как объем, площадь и многие другие.



Черт. 1.

13. Относительные числа. Числа, изучаемые в арифметике, служат для выражения таких величин, направление которых не рассматривается (например, когда хотят знать только размер какого-нибудь расстояния, а не направление, по которому оно отсчитывается). Числа же, рассматриваемые в алгебре, служат для выражения размера величин и их направления. Для этого величину, понимаемую в каком-нибудь одном смысле, выражают числом с предшествующим ему знаком +, а ту же величину, понимаемую в противоположном смысле, выражают числом с предшествующим ему знаком —.

Число со знаком плюс (+) (который, впрочем, может быть и опускаем) называется *положительным*; число со знаком минус (—) называется *отрицательным*. Так, $+10$, $+\frac{1}{2}$, $+0{,}3$ — положительные числа, а -8, $-\frac{5}{7}$, $-3{,}25$ — отрицательные числа. К числам присоединяют еще 0 (нуль), не относя его ни к положительным, ни к отрицательным. Выражения $+0$, -0 и просто 0 считаются равносильными.

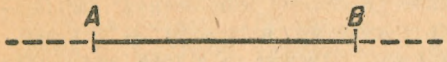
Числа положительные, отрицательные и нуль называются вообще *относительными* числами в отличие от чисел обыкновенных (или арифметических), которые не имеют перед собой никакого знака.

Абсолютною величиною относительного числа называется это число, взятое без знака; так, абсолютная величина числа -10 есть 10, абсолютная величина числа $+5$ есть 5.

Два относительных числа считаются *равными*, если у них одинаковы абсолютные величины и знаки.

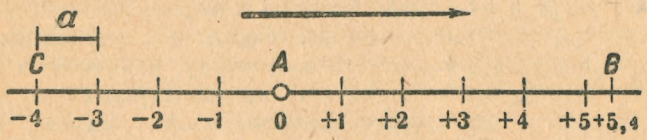
14. Изображение числа на числовой оси. Отрезком прямой (черт. 2) называется часть какой-нибудь прямой линии, ограниченная с обеих

сторон, например, с одной стороны точкой A, а с другой — точкой B. В каждом отрезке можно различать: во-первых, длину его, во-вторых, направление, которое для данного отрезка может быть двоякое. Например, во взятом нами отрезке можно различать направление или от точки A к точке B, или, наоборот, от B к A. Если мы рассматриваем взятый отрезок в направлении от A к B, то точку A мы будем называть началом отрезка, а точку B — его концом.



Черт. 2.

С помощью таких отрезков мы наглядно можем выражать относительные числа следующим образом. Возьмем какую-нибудь прямую (например горизонтальную) и условимся, какое из двух направлений этой прямой считать положительным (черт. 3). Примем, например, направление слева направо (указанное стрелкою) за положительное, тогда противоположное направление — справа налево — мы будем считать отрицательным. Далее, примем какую-нибудь длину a (изображенную на чертеже) за единицу длины. Пусть теперь дано какое-нибудь положительное число, например $+5{,}4$. Возьмем на нашей прямой произвольную точку A и примем ее за начало отрезков; затем от этой точки отложим вправо 5,4 единицы длины, равных a. Тогда получим отрезок AB, длина которого равна 5,4 единицы и направление положительное. Конец B этого отрезка и выразит нам наглядно число $+5{,}4$. Возьмем теперь отрицательное число, например -4. Чтобы изобразить его наглядно, отложим от той же точки A влево 4 единицы длины. Тогда получим отрезок AC, длина которого равна 4 единицам, а направление отрицательное; конец C этого отрезка выразит число -4.



Черт. 3.

Можно представить себе, что все относительные числа выражены подобным образом, как концы направленных отрезков, отложенных на одной и той же прямой от одной и той же ее точки A, принятой за начало отрезков. Тогда на той части прямой, которая расположена направо от A, изобразится точками ряд положительных чисел, а на части прямой, расположенной влево от A, изобразятся отрицательные числа. Число нуль выражается на этой прямой точкой A. Такая прямая часто называется *числовою прямою*, или *числовою осью*.

Так как направление отрезков, концы которых выражают числа со знаком $+$, противоположно направлению отрезков, выражающих числа со знаком $-$, то и самые эти знаки принято называть *противоположными* знаками. Всякие два числа, как $+3$ и -3, $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ и т. п., у которых знаки противоположны, а абсолютные величины одинаковы, называются *противоположными числами*.

Рассмотрим теперь, как производятся различные действия над *относительными числами*.

II. Сложение относительных чисел.

15. Задача. Кооперативное товарищество получило прибыли в январе a руб. и в феврале b руб. Сколько прибыли получило товарищество за 2 месяца?

Напишем формулу для решения этой задачи. Очевидно, что прибыль за два месяца равна сумме прибылей, полученных за каждый месяц в отдельности. Обозначив искомую сумму через x, получим формулу:

$$x = a + b.$$

Но кооператив может получить за один из этих месяцев или даже за оба не прибыль, а убыток. Чтобы можно было и в таких случаях применять нашу формулу, мы должны будем подразумевать под буквами a и b относительные числа, т. е. положительные или отрицательные, смотря по тому, были ли получены за данный месяц прибыль или убыток. Таким образом, мы должны уметь складывать относительные числа.

16. Сложение двух чисел. Разберем сначала два частных случая сложения относительных чисел.

а) **Сумма двух противоположных чисел равна нулю.** Так,

$$(+5)+(-5)=0;\ (-3)+(+3)=0;\ (+4{,}7)+(-4{,}7)=0.$$

Вообще:

$$(+a)+(-a)=0.$$

В самом деле, если, например, кооператив получил за один месяц прибыль, а за другой столько же убытка, то в результате он не имеет ни прибыли, ни убытка.

Точно так же, если поезд прошел от станции в каком-либо направлении 5 *км*, а затем в обратном направлении тоже 5 *км*, то, в результате, он совсем не удалился от станции.

б) **Прибавить к какому-нибудь числу нуль или прибавить к нулю какое-нибудь число значит оставить это число без изменения.** Так,

$$(+75)+0=+75;\quad (-75)+0=-75,$$
$$0+(+3{,}5)=+3{,}5;\quad 0+(-3{,}5)=-3{,}5.$$

Вообще:

$$(+a)+0=+a;\quad (-a)+0=-a.$$

В самом деле, если, например, кооператив получил в первый месяц 75 руб. прибыли или убытка, а в другой не получил ни прибыли, ни убытка, то в результате у него осталась та прибыль или убыток, которые он получил в первый месяц.

Вернемся теперь к задаче предыдущего параграфа. Мы написали общую формулу для ее решения, именно: $x = a + b$.

Рассмотрим различные случаи, которые могут встретиться при замене букв a и b данными числами.

1-й случай. *За каждый месяц получена прибыль.* Например, в первый месяц получено 200 руб., а во второй 150 руб. прибыли.

В этом случае $a = +200$; $b = +150$. Очевидно, что:

$$x = (+200)+(+150) = +350,$$

т. е. кооператив получил за два месяца 350 руб. прибыли.

2-й случай. *За каждый месяц получен убыток.* Например, в первый месяц получено 200 руб., а во второй 150 руб. убытка.

В этом случае $a = -200$; $b = -150$. Очевидно, что:

$$x = (-200) + (-150) = -350,$$

т. е. кооператив получил за два месяца 350 руб. убытка.

Из этих примеров можно сделать такой вывод:

Чтобы сложить два числа с одинаковыми знаками, надо сложить их абсолютные величины и поставить тот же знак.

3-й случай. *За один месяц получена прибыль, а за другой убыток, причем прибыли получено больше, чем убытка.* Например, за первый месяц получено 200 руб. прибыли, а за второй 150 руб. убытка.

В этом случае: $a = +200$; $b = -150$. Очевидно, что в итоге кооператив получил всего 50 руб. прибыли, т. е.

$$x = (+200) + (-150) = +50.$$

4-й случай. *За один месяц получена прибыль, а за другой убыток, причем прибыли получено меньше, чем убытка.* Например, за первый месяц получено 200 руб. убытка, а за второй 150 руб. прибыли.

В этом случае: $a = -200$; $b = +150$. Очевидно, что в итоге за два месяца кооператив получил 50 руб. убытка, т. е.

$$x = (-200) + (+150) = -50.$$

Из последних двух примеров можно сделать следующий вывод:

Чтобы сложить два числа с разными знаками, надо найти разность их абсолютных величин и поставить перед ней знак того числа, у которого абсолютная величина больше.

Отбросив знак + перед положительным числом, мы можем написанные выше равенства написать короче:

$$200 + (-150) = 50; \quad -200 + 150 = -50.$$

17. Другое выражение правил сложения. Два правила сложения, указанные нами, можно заменить двумя другими правилами, очень удобными для применения:

а) **Прибавить положительное число значит прибавить его абсолютную величину.** Так,

$$(+7) + (+3) = +10 \quad \text{и} \quad (+7) + 3 = 7 + 3 = 10;$$
$$(-7) + (+3) = -4 \quad \text{и} \quad (-7) + 3 = -7 + 3 = -4.$$

б) **Прибавить отрицательное число значит отнять его абсолютную величину.** Так,

$$(+7) + (-10) = -3 \quad \text{и} \quad (+7) - 10 = 7 - 10 = -3;$$
$$(-7) + (-10) = -17 \quad \text{и} \quad (-7) - 10 = -7 - 10 = -17.$$

Эти два правила можно сокращенно выразить такими формулами двойных знаков:

$$+(+a) = +a; \quad +(-a) = -a.$$

18. Сложение трех и более чисел. Сначала находят сумму двух первых слагаемых, к ней прибавляют третье слагаемое и т. д. Пусть, например, требуется найти сумму:

$$(+8)+(-5)+(-4)+(+3),$$

которую можно короче написать так:

$$8+(-5)+(-4)+3.$$

Производим сложение в таком порядке:

$$8+(-5)=3;\quad 3+(-4)=-1;\quad (-1)+3=2.$$

Впрочем, такого порядка нет надобности держаться, так как (как мы вскоре увидим, § 25) слагаемые можно переставлять и соединять в какие угодно группы.

Упражнения.

18. $(+7)+(+3)$ $\quad (-7)+(-3)$ $\quad \left(+\frac{1}{2}\right)+\left(2\frac{1}{2}\right)$

19. $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-2\frac{1}{2}\right)$ $\quad (+10)+(-2)$ $\quad (+10)+(-12)$

20. $(-5)+(+5)$ $\quad (-5)+(+2)$ $\quad 4+(-3)$

21. $(-4)+3$ $\quad 8+(-10)$ $\quad (-8)+10$

22. $(+8)+(-5)+(-3)+(+2)$

23. $(-7)+(-3)+(-1)+(+11)$

III. Вычитание относительных чисел.

19. Задача. Прибыль фабрики за 2 месяца, январь и февраль, составила a руб. Как велика была прибыль за один февраль, если известно, что за январь фабрика дала b руб. прибыли?

Прибыль за два месяца, конечно, есть сумма прибылей, полученных отдельно за каждый месяц, причем прибыль может выражаться иногда числом положительным, иногда числом отрицательным (убыль).

Поэтому искомая прибыль за февраль должна быть таким положительным или отрицательным числом, которое, будучи сложено по правилам сложения относительных чисел с прибылью за январь, составит в сумме прибыль за оба месяца. Таким образом, в нашей задаче дана сумма a и одно слагаемое b, а требуется отыскать другое слагаемое.

Действие, посредством которого по данной сумме двух слагаемых и одному из этих слагаемых находится другое слагаемое, называется вычитанием, безразлично, будут ли даны числа арифметические или относительные; при этом данная сумма называется *уменьшаемым*, данное слагаемое *вычитаемым*, а искомое число *разностью* (или *остатком*). Из этого следует, что правильность вычитания мы всегда можем поверять сложением: найдя искомую разность, сложим ее с вычитаемым; если в сумме получим уменьшаемое, то вычитание сделано верно.

20. Нахождение разности как одного из двух слагаемых. Обозначив искомую разность в нашей задаче через x, мы можем написать:

$$x=a-b.$$

Найдем величину разности $a - b$ в следующих частных случаях:

а) Пусть $a = +1000$; $b = +400$. Это значит, что в январе фабрика дала прибыли 400 руб., а всего за два месяца было получено прибыли 1000 руб.; очевидно, февраль дал тоже прибыль в 600 руб. Значит:

$$x = (+1000) - (+400) = +600,$$

или проще:

$$x = 1000 - 400 = 600.$$

Проверим результат сложением:

$$(+600) + (+400) = +1000.$$

б) Пусть $a = +1000$ и $b = +1000$. Это значит, что за январь фабрика дала 1000 руб. прибыли и за два месяца прибыль осталась в том же размере. Очевидно, что в феврале фабрика не дала ни прибыли, ни убытка. Значит:

$$x = (+1000) - (+1000) = 0.$$

Проверим сложением:

$$(+1000) + 0 = +1000.$$

Вычитание сделано правильно. Таким же рассуждением найдем, что:

$$(-1000) - (-1000) = 0.$$

в) $a = +1000$; $b = +1200$. Это значит, что в январе фабрика дала прибыли 1200 руб., а за два месяца получилось прибыли всего 1000 руб. Очевидно, что часть январской прибыли, именно 200 руб., пошла на покрытие февральского убытка. Отсюда:

$$x = (+1000) - (+1200) = -200$$

или проще:

$$x = 1000 - 1200 = -200.$$

Проверим сложением:

$$(-200) + (+1200) = +1000.$$

г) $a = +1000$; $b = -200$. Это значит, что в январе фабрика дала убыток в 200 руб., а в итоге за два месяца получилась прибыль в 1000 руб. Очевидно, эту прибыль дал февраль, который, кроме того, покрыл январский убыток в 200 руб., т. е. должен был дать прибыли 1200 руб. Отсюда:

$$x = (+1000) - (-200) = +1200, \text{ или } x = 1000 - (-200) = 1200.$$

Проверим сложением:

$$(+1200) + (-200) = +1000.$$

д) $a = -100$; $b = +800$. Это значит, что январь дал прибыль в 800 руб., тогда как в итоге за два месяца получился убыток в 100 руб. Очевидно, что февраль дал убыток, который уничтожил всю январскую прибыль в 800 руб., и осталось еще убытка 100 руб., т. е. весь февральский убыток равен 900 руб. Отсюда:

$$x = (-100) - (+800) = -900, \text{ или } x = -100 - 800 = -900.$$

Проверим сложением:

$$(-900)+(+800)=-100.$$

е) $a=-100$; $b=-150$, т. е. январь дал убытка 150 руб., а в итоге за два месяца получилось убытка всего 100 руб. Значит, часть январского убытка, именно 50 руб., была покрыта такой же февральской прибылью. Отсюда:

$$x=(-100)-(-150)=+50.$$

Проверим сложением:

$$50+(-150)=-100.$$

21. Правило вычитания. Присматриваясь к приведенным в предыдущем параграфе примерам, мы можем заметить, что в каждом из рассмотренных нами случаев мы могли бы вычитание данного нам числа заменить прибавлением числа, ему противоположного.

В самом деле, возьмем, например, случай а):

$$(+1000)-(+400)=+600.$$

Вместо вычитания числа $+400$ прибавим число, ему противоположное:

$$(+1000)+(-400)=+600.$$

Получили тот же результат.

Возьмем случай г):

$$(+1000)-(-200)=+1200.$$

Заменим вычитание прибавлением противоположного числа:

$$(+1000)+(+200)=+1200.$$

Результат тот же.

Возьмем, наконец, случай д):

$$(-100)-(+800)=-900.$$

Но точно так же:

$$(-100)+(-800)=-900.$$

То же можно показать и относительно всех остальных случаев.

Таким образом, во всех случаях мы можем вычитание данного числа заменить прибавлением к уменьшаемому числа, противоположного вычитаемому. Другими словами, действие вычитания мы можем заменить действием сложения, производить которое мы уже умеем. Отсюда следует правило:

Чтобы вычесть какое-нибудь число, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

22. Формулы двойных знаков. Таким образом, согласно данному правилу, вычитание положительного числа $+a$ можно заменить прибавлением отрицательного числа $-a$, а вычитание отрицательного числа $-a$ можно заменить прибавлением положительного числа $+a$; это можно выразить такими формулами двойных знаков.

$$-(+a)=-a;\quad -(-a)=+a.$$

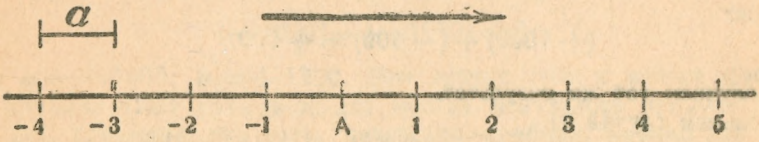
23. Алгебраическая сумма и разность. Относительные числа дают возможность всякую разность представить в виде суммы и, наоборот, всякую сумму изобразить в виде разности. Например, разность $7-3$ может быть написана так: $(+7)+(-3)$, или проще: $7+(-3)$; сумма $4+2$ может быть изображена так: $(+4)-(-2)$, или проще: $4-(-2)$.

Подобно этому, всякое выражение, представляющее собою ряд последовательных сложений и вычитаний, может быть представлено в виде суммы. Например:

$$20-5+3-7=20+(-5)+3+(-7).$$

Поэтому в алгебре все случаи сложения и вычитания относительных чисел можно объединить в одно действие, которое называют *алгебраическим сложением*.

Сумму, в которой слагаемые могут быть числами положительными, отрицательными и равными нулю, принято называть *алгебраическою суммою*, в отличие ее от арифметической суммы, в которой все слагаемые — числа обыкновенные (арифметические). Равным образом разность называется *алгебраической*, если в ней уменьшаемое и вычитаемое — числа относительные.



Черт. 4.

24. Сравнение относительных чисел по величине. Когда мы говорим, что 10 больше 7, это значит, что разность 10—7 есть число положительное, тогда как разность 7—10 есть число отрицательное. Условимся распространить это понятие о большем и меньшем на числа относительные, а именно — будем считать, что **относительное число a больше другого относительного числа b в том случае, если разность $a-b$ есть число положительное, и a меньше b тогда, когда разность $a-b$ есть число отрицательное.** При этом условии мы должны принимать, что:

1. **Всякое положительное число больше нуля и больше всякого отрицательного числа;** например $8>0$ и $8>-10$, так как разности $8-0$ и $8-(-10)$ оба положительные числа.

2. **Всякое отрицательное число меньше нуля и меньше всякого положительного числа;** например $-5<0$ и $-5<+2$, так как разности $-5-0$ и $-5-(+2)$ отрицательные числа.

3. **Из двух отрицательных чисел то больше, у которого абсолютная величина меньше;** так $-5>-12$, так как разность $-5-(-12)$ равна положительному числу $(+7)$.

Для ясного представления сравнительной величины алгебраических чисел всего лучше обратиться к наглядному изображению их на числовой оси. Выбрав произвольную единицу длины a (черт. 4), вообразим, что на неограниченной прямой вправо от какой-нибудь ее точки A, принятой за начало, отложены отрезки, изображающие положительные числа $+1, +2, +3, +4..$, а влево от той же точки отложены отрезки,

изображающие отрицательные числа $-1, -2, -3, -4...$ Тогда, двигаясь по этой прямой слева направо (как указывает стрелка на чертеже), мы будем постоянно переходить от чисел меньших к бóльшим, а двигаясь в обратном направлении, справа налево, будем постоянно переходить от чисел бóльших к меньшим. Другими словами, из двух любых чисел то больше, которое помещается правее на числовой оси. На этой оси легко проверить справедливость только что высказанных трех положений.

Замечание. Если желают кратко выразить, что a есть число положительное, то пишут $a>0$; если же надо показать, что a отрицательное число, то пишут $a<0$.

Упражнения.

24. Товар куплен за a руб., а продан за b руб. Сколько получено прибыли? Вычислить эту прибыль, если $a=40$ и $b=35$. Что означает здесь отрицательный ответ?

25. Некто ежемесячно получает дохода m руб., а тратит n руб. Сколько у него остается ежемесячно? Вычислить ответ при $m=120$ и $n=130$. Что означает отрицательный ответ?

В следующих примерах произвести указанные действия:

26. $12-(-2)$ $\quad 5-(-5)$ $\quad (+8)-(-10)$ $\quad (+1)-(-1)$

27. $a-(-b)$ $\quad (+m)-(-n)$ $\quad (+2x)-(-3x)$

28. $10+(+2)-(-4)-(+2)+(-2)$

29. Вычислить сумму $a+b+c+d$ при $a=2$, $b=-3$, $c=-\frac{1}{2}$, $d=-\frac{1}{4}$.

30. Вычислить разность $m-n$ при $m=-10$ и $n=-15$.

31. Представить выражение $10-2-3+7$ в виде суммы относительных чисел.

32. Представить сумму $10+8$ в виде разности относительных чисел.

IV. Главнейшие свойства сложения и вычитания относительных чисел.

25. Убедимся на примерах, что те свойства сложения и вычитания, которые мы указали для чисел арифметических (§§ 6, 7), сохраняются также и для чисел относительных.

а) Переместительный закон: **сумма не изменяется от перемещения слагаемых.** Например:

$$(+20)+(-5)=+15 \text{ и } (-5)+(+20)=+15;$$
$$(-10)+(-2)+(+40)=+28;$$
$$(+40)+(-10)+(-2)=+28;$$
$$(-2)+(+40)+(-10)=+28 \text{ и т. п.}$$

б) Сочетательный закон: **сумма не изменится, если какие-нибудь слагаемые мы заменим их суммою.**

Так, при вычислении суммы:

$$(-4)+(+3)+(-1)+(+5)=+3,$$

мы можем какие-нибудь из слагаемых, например второе и третье, заменить их суммой, вычислив ее предварительно: $(+3)+(-1)=+2$; тогда будем иметь: $(-4)+(+2)+(+5)=3$, т. е. мы получим ту же сумму, что и прежде.

в) **Чтобы к какому-нибудь числу прибавить сумму нескольких слагаемых, можно к этому числу прибавить каждое слагаемое одно за другим.**

Пусть, например, требуется к числу 40 прибавить сумму $20+(-5)+(+7)$, что можно выразить так:

$$40+[20+(-5)+(+7)].$$

Мы можем сначала вычислить прибавляемую сумму:

$$20+(-5)=20-5=15; \quad 15+(+7)=15+7=+22$$

и затем полученное число $+22$ прибавить к 40:

$$40+(+22)=+62.$$

Но вместо этого мы можем к 40 прибавить сначала первое слагаемое 20, потом второе слагаемое -5 и, наконец, третье слагаемое $+7$:

$$40+20=60; \quad 60+(-5)=55; \quad 55+(+7)=+62.$$

Окончательная сумма оказывается та же самая.

г) **Чтобы от какого-нибудь числа отнять сумму нескольких слагаемых, можно от этого числа отнять каждое слагаемое отдельно одно за другим.**

Пусть, например, нам нужно из 20 вычесть сумму $10+(-4)+(-3)$, что можно выразить так:

$$20-[10+(-4)+(-3)].$$

Мы можем сначала вычислить отнимаемую сумму:

$$10+(-4)=10-4=6; \quad 6+(-3)=6-3=3$$

и затем полученное число отнять от 20:

$$20-3=17.$$

Но вместо этого мы можем отнять от 20 сначала первое слагаемое 10, потом второе слагаемое (-4) и, наконец, третье слагаемое (-3):

$$20-10=10; \quad 10-(-4)=10+4=14;$$
$$14-(-3)=14+3=17.$$

Мы получили то же самое число, что и прежде.

Так же можно показать справедливость и остальных свойств сложения и вычитания для относительных чисел.

V. Умножение относительных чисел.

26. Задача. По Октябрьской железной дороге идет поезд со средней скоростью v километров в час [1]). В полдень поезд находится на станции Бологое. Где будет находиться поезд через t часов?

Выведем формулу для решения этой задачи. Если в 1 час поезд проходит v километров, то в t часов он пройдет в t раз большее расстояние. Значит, искомое расстояние x равно v, умноженному на t:

$$x=vt.$$

[1]) Для простоты вычислений мы предполагаем, что поезд идет все время с одной и той же скоростью, и не принимаем во внимание остановок на станциях.

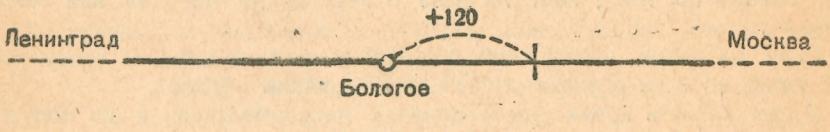
Если, например, $v = 40$ и $t = 3$, то поезд находится на расстоянии $40 \cdot 3 = 120$ *км* от станции Бологое.

Это решение не дает еще точного ответа на вопрос, поставленный в задаче. Мы не знаем, в каком направлении мы должны отсчитывать эти 120 *км*, к Москве или к Ленинграду. Введение относительных чисел дает нам возможность точно ответить на поставленный вопрос.

Условимся считать положительным направление от Ленинграда к Москве. Тогда все расстояния, которые мы будем отсчитывать от станции Бологое по направлению к Москве, будут положительными, а по направлению к Ленинграду отрицательными. Соответственно, скорость, т. е. расстояние, проходимое поездом в 1 час, будет положительной, если поезд идет к Москве, и отрицательной, если он идет к Ленинграду.

Теперь мы можем дать более точный ответ на поставленный вопрос.

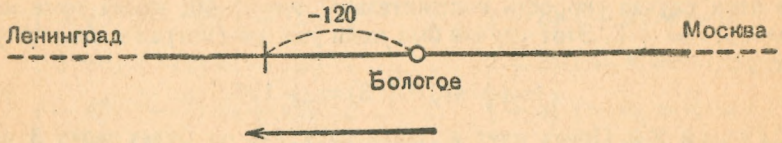
Если поезд шел к Москве, значит, скорость его была $+40$ *км* в час, и через 3 часа он будет на расстоянии $x = (+40) \cdot 3 = +120$ *км* от Бологого, т. е. продвинется на 120 *км* по направлению к Москве (черт. 5).



Черт. 5.

Если поезд шел к Ленинграду, то скорость его была -40 *км* и через 3 часа он будет находиться в $(-40) + (-40) + (-40) = -120$ *км* от Бологого, т. е. в 120 *км* по направлению к Ленинграду (черт. 6). Из этого мы заключаем, что

$$x = (-40) \cdot 3 = -120.$$



Черт. 6.

Теперь наша формула $x = vt$ дает нам точный ответ на вопрос, где будет находиться поезд, только v будет принимать положительные или отрицательные значения, смотря по направлению, в котором поезд движется.

Если, например, $v = +50$ и $t = +4$, то формула дает:

$$x = (+50) \cdot (+4) = +200,$$

т. е. поезд будет находиться в 200 *км* от Бологого по направлению к Москве.

Если $v = -30$ и $t = +2$, то:

$$x = (-30) \cdot 2 = -60,$$

т. е. поезд будет находиться в 60 *км* от Бологого по направлению к Ленинграду.

Как известно из арифметики, умножение на целое число есть действие, посредством которого одно число (множимое) повторяется слагаемым столько раз, сколько единиц в другом числе (множителе). Умножение на дробь есть действие, посредством которого находится такая дробь множимого, какую множитель составляет от единицы.

Из предыдущей задачи видно, что эти определения применимы и к умножению относительных чисел, когда множитель есть положительное число. Например, умножить -5 на $+3$ (или просто на 3) значит повторить -5 слагаемым 3 раза (получим -15); умножить 0 на 5 значит повторить 0 слагаемым 5 раз (получим 0); умножить -12 на $+\frac{3}{4}$ (или просто на $\frac{3}{4}$) значит найти $\frac{3}{4}$ от -12 (получим -9).

27. Умножение на отрицательное число. Изменим предыдущую задачу так: в полдень поезд находится на станции Бологое; где он был 3 часа назад? Для решения задачи мы опять должны будем умножить скорость движения поезда на время движения. Обе задачи имеют сходные условия и одинаковый способ решения, но ответ будет различен, смотря по тому, идет ли речь о времени до полудня или после полудня.

Если мы хотим, чтобы наша формула $x = vt$ давала нам сразу точный ответ во всех случаях, поступим следующим образом.

Будем считать время после полудня положительным, а до полудня отрицательным, и, соответственно этому, число t будет положительным или отрицательным, смотря по тому, о каком времени идет речь. Таким образом, оба множителя, v и t, могут теперь принимать положительные и отрицательные значения.

Рассмотрим все случаи, которые возможны при решении нашей задачи, причем везде считаем, что поезд в полдень находится в Бологом и идет со скоростью 40 *км* в час.

Случай 1-й. Поезд идет к Москве; где он будет через 3 часа?

В этом случае скорость положительна: $v = +40$; время тоже положительно: $t = +3$. Этот случай был нами уже рассмотрен и был получен ответ:

$$x = (+40)\cdot(+3) = +120.$$

Случай 2-й. Поезд идет к Ленинграду; где он будет через 3 часа?

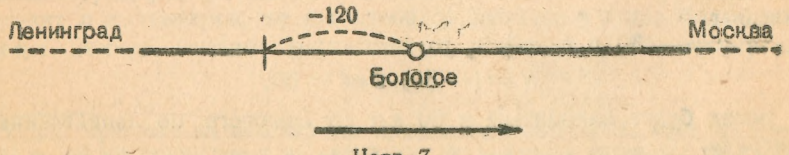
Здесь скорость отрицательна: $v = -40$; время положительно: $t = 3$. Этот случай мы также уже рассматривали. Решение дает:

$$x = (-40)\cdot(+3) = -120.$$

Случай 3-й. Поезд идет к Москве; где он был 3 часа назад?

В этом случае скорость положительна: $v = 40$, а время отрицательно: $t = -3$.

Очевидно, что 3 часа назад поезд находился между Ленинградом и станцией Бологое в 120 *км* от последней (черт. 7).

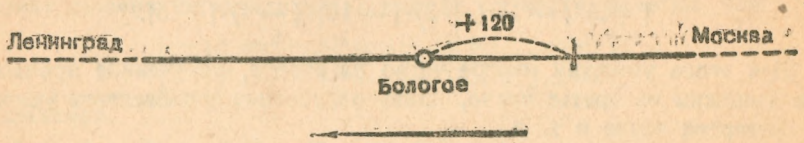


Черт. 7.

Расстояние 120 *км* находится влево от Бологого, следовательно, отрицательно. Таким образом:

$$x = (+40)\cdot(-3) = -120.$$

Случай 4-й. Поезд идет к Ленинграду; где он был 3 часа назад? Здесь и скорость и время отрицательны: $v = -40$ и $t = -3$. Очевидно, что 3 часа назад поезд находился между Москвой и станцией Бологое, в 120 *км* от последней (черт. 8).



Черт. 8.

Расстояние от Бологого к Москве положительно, следовательно:

$$x = (-40)\cdot(-3) = +120.$$

28. Правило умножения. Если бы в предыдущей задаче мы взяли вместо чисел 40 и 3 какие-либо другие (в том числе и дробные), то, очевидно, ход наших рассуждений от этого не изменился бы. Выведем же теперь общее правило для умножения относительных чисел.

Выпишем все случаи, которые встретились при умножении, и обобщим их на случай каких угодно чисел.

$(+40)\cdot(+3) = +120$ или вообще: $(+a)\cdot(+b) = +ab$;

$(-40)\cdot(+3) = -120$ „ „ $(-a)\cdot(+b) = -ab$;

$(+40)\cdot(-3) = -120$ „ „ $(+a)\cdot(-b) = -ab$;

$(-40)\cdot(-3) = +120$ „ „ $(-a)\cdot(-b) = +ab$.

Сопоставляя эти случаи друг с другом, мы замечаем, что:

1. Если оба сомножителя имеют одинаковые знаки, то произведение положительно.

2. Если сомножители имеют противоположные знаки, то произведение отрицательно.

3. Абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей.

Отсюда получаем следующее общее правило:

Чтобы найти произведение двух относительных чисел, надо помножить их абсолютные величины и произведение взять со знаком +, если оба сомножителя имеют одинаковые знаки, и со знаком —, если они имеют противоположные знаки.

Часть этого правила, касающаяся знаков, носит название *правила знаков*. Его обыкновенно выражают так: **при умножении двух чисел одинаковые знаки дают +, а разные дают —.**

Рассматривая приведенные примеры, можно установить еще следующее правило, которым иногда в дальнейшем придется пользоваться **при умножении на положительное число знак множимого не изменяется** (т. е. произведение имеет тот же знак, что и множимое); **при умножении на отрицательное число знак множимого изменяется на противоположный.**

Заметим еще, что произведение всегда равно нулю, если один из сомножителей равен нулю.

29. Произведение трех и более чисел. Знак произведения. Пусть требуется вычислить произведение:

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)\cdot(-4)\cdot(-5).$$

Для этого умножим первое число на второе, полученное произведение умножим на третье число, вновь полученное произведение умножим на четвертое число и т. д.:

$$(+2)\cdot(-1)=-2; \quad (-2)\cdot(+3)=-6; \quad (-6)\cdot(-10)=+60;$$
$$(+60)\cdot(-4)=-240; \quad (-240)\cdot(-5)=+1200.$$

Если бы перемножались только одни положительные числа, то знак окончательного произведения должен быть, конечно, $+$. Но когда все или некоторые сомножители отрицательные, то **произведение окажется со знаком $+$ в том случае, если число отрицательных сомножителей четное, и со знаком $-$ в том случае, когда число таких сомножителей нечетное.** Так:

1 отрицательный сомножитель:

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)=-6;$$

2 отрицательных сомножителя:

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)=+60;$$

3 отрицательных сомножителя:

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)\cdot(-4)=-240 \text{ и т. д.}$$

30. Степень отрицательного числа. Применим правило предыдущего параграфа к умножению одинаковых сомножителей, т. е. к возвышению в степень.

Найдем квадрат какого-нибудь отрицательного числа:

$$(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=+9; \quad (-7)^2=(-7)\cdot(-7)=+49.$$

Вообще:

$$(-a)^2=(-a)(-a)=+a^2,$$

т. е. квадрат отрицательного числа есть число положительное.

Найдем теперь куб какого-нибудь отрицательного числа:

$$(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8; \quad (-6)^3=(-6)\cdot(-6)\cdot(-6)=-216.$$

Вообще:

$$(-a)^3=(-a)(-a)(-a)=-a^3,$$

т. е. куб отрицательного числа есть число отрицательное.

Нетрудно заметить, что **при возвышении отрицательного числа в любую четную степень получается положительное число,** так как число отрицательных множителей в этом случае четное (см. § 29).

Так:

$$(-3)^4=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=+81;$$
$$(-2)^6=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=+64 \text{ и т. д.}$$

По той же причине **любая нечетная степень отрицательного числа дает всегда число отрицательное.** Так:

$$(-3)^5=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-243;$$
$$(-2)^7=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-128 \text{ и т. д.}$$

Таким образом:

Четная степень отрицательного числа есть число положительное, а нечетная степень число отрицательное. В частности, заметим, что:

$$(-1)^2=(-1)^4=(-1)^6=\ldots=+1;$$
$$(-1)^3=(-1)^5=(-1)^7=\ldots=-1.$$

Упражнения.

33. $(-2)\ (-3)\qquad (+7)\ (-2)\qquad (-8)\ (-10)$

34. $\left(-8\frac{1}{2}\right)\left(+2\frac{3}{4}\right)\qquad (+0{,}35)\left(-\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)$

35. $(-1)^2\qquad (-1)^3\qquad (-1)^4\qquad (-1)^5$

36. Вычислить выражение ax^2+bx+c при $a=3$, $b=-4$, $c=-5$ и $x=4$.

37. Вычислить то же выражение при $a=-4$, $b=3$, $c=-5$ и $x=4$.

38. $4\cdot05\frac{1}{2}\cdot00{,}3\cdot0-8\frac{3}{4}\cdot00\cdot x$. 39. $\left(-\frac{1}{2}\right)(+3{,}5)(+2)\left(-\frac{7}{8}\right)$.

VI. Деление относительных чисел.

31. Определение. **Деление относительных чисел (как и арифметических) есть действие, посредством которого по данному произведению двух сомножителей и одному из этих сомножителей отыскивается другой сомножитель.** Так, разделить $+10$ на -2 значит найти такое число x, чтобы произведение $(-2)x$ равнялось $+10$; такое число есть -5, так как произведение -5 на -2 равно $+10$.

Из этого определения следует, что правильность деления можно поверять умножением: если, умножив частное на делитель, мы получим делимое, то действие сделано верно.

32. Вывод правила деления. Рассмотрим следующие примеры деления относительных чисел:

$(+10):(+2)=+5$, потому что $(+2)\cdot(+5)=+10$;
$(-10):(-2)=+5$, „ „ $(-2)\cdot(+5)=-10$;
$(-10):(+2)=-5$, „ „ $(+2)\cdot(-5)=-10$;
$(+10):(-2)=-5$, „ „ $(-2)\cdot(-5)=+10$.

Из этих примеров выводим правило:

Чтобы разделить одно число (делимое) на другое (делитель), надо разделить абсолютную величину делимого на абсолютную величину делителя и результат взять со знаком $+$, когда оба данные числа имеют одинаковые знаки, и со знаком $-$, когда они имеют разные знаки.

Таким образом, правило знаков при делении остается то же самое, что и при умножении.

33. Случаи, когда делимое или делитель равны нулю.

а) Пусть требуется разделить 0 на какое-нибудь число, например на $+10$. Это значит, что требуется найти такое число, которое надо умножить на $+10$, чтобы получить в произведении 0. Такое число есть 0 и только 0, так как $0\cdot(+10)=0$, а произведение какого-нибудь другого числа, не нуля, на $+10$ не может, очевидно, равняться 0. Подобным образом находим:

$$0:(-2)=0, \text{ потому что } (-2)\cdot 0=0;$$
$$0:\frac{3}{4}=0, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{3}{4}\cdot 0=0 \text{ и т. п.}$$

Значит, **если делимое равно нулю, а делитель не равен нулю, то частное должно быть нуль.**

б) Положим теперь, что делитель будет 0, а делимое какое-нибудь другое число; например $(+5):0$. Это значит, что требуется найти такое число, которое надо умножить на 0, чтобы получить $+5$. Но какое бы число мы ни умножали на 0, мы всегда получим 0, а не какое-нибудь другое число; значит, частное $(+5):0$ не может равняться никакому числу. Подобно этому невозможны деления:

$$(-5):0; \qquad (+0{,}3):0; \qquad (-7{,}26):0 \text{ и т. п.}$$

Вообще, **если делитель равен нулю, а делимое не равно нулю, то деление невозможно.**

в) Возьмем, наконец, такой случай, когда и делимое равно 0 и делитель равен 0:

$$0:0=?$$

В этом случае частное может равняться любому числу, так как всякое число, умноженное на нуль, дает в результате нуль.

Например, можно написать:

$$0:0=5; \qquad 0:0=7; \qquad 0:0=-100$$

и т. д., потому что

$$5\cdot 0=0; \qquad 7\cdot 0=0; \qquad (-100)\cdot 0=0 \text{ и т. д.}$$

Упражнения.

40. $(+20):(+4)$ $(+20):(-4)$ $(-20):(+4)$ $(-20):(-4)$

41. $(+2a):-2$ $(-5x):x$ $(-7x^2):-7$ 42. $0:80:\frac{1}{2}$ $0:0{,}30:a$.

VII. Главные свойства умножения и деления.

34. Убедимся на примерах, что те свойства умножения и деления, которые мы указали для чисел арифметических (§§ 8 и 9), сохраняются также и для чисел относительных.

а) ***Переместительный закон*: произведение не изменяется при изменении порядка сомножителей.**

Возьмем сначала примеры умножения только двух чисел:

$$(+5)\cdot(+2)=+10 \text{ и } (+2)\cdot(+5)=+10;$$
$$(-5)\cdot(+2)=-10 \text{ и } (+2)\cdot(-5)=-10;$$
$$\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{9}{20} \text{ и } \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)=+\frac{9}{20} \text{ и т. п.}$$

Возьмем теперь произведение, состоящее более чем из двух сомножителей, например такое: $(-2)\cdot(-5)\cdot(+3)$. Абсолютная величина этого произведения равна $2\cdot5\cdot3$, знак же окажется $+$ или $-$, смотря по тому, четно или нечетно число отрицательных сомножителей (в нашем примере знак будет $+$). Если мы переставим сомножители, например так: $(+3)\cdot(-5)\cdot(-2)$, то получим новое произведение, у которого абсолютная величина равна $3\cdot5\cdot2$, а знак будет $+$ или $-$, смотря по тому, четно или нечетно число отрицательных сомножителей. Но $3\cdot5\cdot2=2\cdot5\cdot3$ (по переместительному закону умножения арифметических чисел), и число отрицательных сомножителей остается то же самое, что и прежде. Значит, у обоих произведений абсолютная величина будет одна и та же, и знаки одинаковы. Поэтому:

$$(-2)\cdot(-5)\cdot(+3)=(+3)\cdot(-5)\cdot(-2).$$

б) ***Сочетательный закон:*** **произведение нескольких сомножителей не изменится, если какие-либо из них заменим их произведением.**

Так, вместо того чтобы производить умножение

$$(-5)\cdot(+3)\cdot(-2)$$

в том порядке, в каком написаны сомножители, т. е. так:

$$(-5)\cdot(+3)=-15; \qquad (-15)\cdot(-2)=+30,$$

мы можем взять любые два сомножителя, например $+3$ и -2, и заменить их произведением, т. е. числом -6, и потом умножить на это число третий сомножитель: $(-5)\cdot(-6)=+30$. Таким образом:

$$(-5)\cdot(+3)\cdot(-2)=(-5)\cdot[(+3)\cdot(-2)].$$

в) Чтобы умножить какое-нибудь число на произведение нескольких сомножителей, можно умножить это число на первый сомножитель, полученное произведение умножить на второй сомножитель и т. д. И также точно: чтобы разделить какое-нибудь число на произведение нескольких сомножителей, можно разделить это число на первый сомножитель, результат разделить на второй сомножитель и т. д.

Так, чтобы умножить $+10$ на произведение $(-2)\cdot(+3)$, мы можем сначала вычислить это произведение (оно равно -6) и затем на него умножить $+10$ (получим -60); но можем умножить $+10$ сначала на -2 (получим -20) и затем полученное произведение умножить на $+3$ (получим -60). Таким образом:

$$(+10)\cdot[(-2)\cdot(+3)]=(+10)\cdot(-2)\cdot(+3)$$

Вообще: $a(bc\ldots)=abc\ldots$

Равным образом:

так как $$10:[(-2)(+3)]=[10:(-2)]:(+3),$$

и $$10:[(-2)(+3)]=10:(-6)=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$$

$$[10:(-2)]:(+3)=(-5):(+3)=-\frac{5}{3}.$$

Вообще: $a:(bc\ldots)=(a:b):c\ldots$.

Так же можно обнаружить справедливость и распределительного свойства.

г) Покажем еще следующее свойство деления: **если делимое и делитель умножим (или разделим) на одно и то же число (кроме нуля), то частное не изменится.**

Как мы видели прежде (§ 9, д), равенство $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ верно для всяких арифметических чисел как целых, так и дробных. Теперь мы проверим, что это равенство остается верным и тогда, когда все или некоторые буквы a, b и m будут означать числа относительные.

Возьмем какой-нибудь пример деления, например 5:0,8, и умножим делимое и делитель, положим, на 3. От этого частное не изменится, так как все числа арифметические, и поэтому мы можем написать равенство:

$$\frac{5}{0,8}=\frac{5\cdot 3}{0,8\cdot 3}.$$

Пусть теперь в этом равенстве какое-нибудь число сделается отрицательным; пусть, например, вместо 5 будет -5.

$$\frac{-5}{0,8}=\frac{-5\cdot 3}{0,8\cdot 3}.$$

Равенство все-таки осталось верным, так как абсолютные величины обоих частных не изменились, и оба они отрицательные числа.

Так же легко проверить, что равенство остается верным и тогда, когда другое число или третье сделаем отрицательным. Значит, какие бы положительные или отрицательные числа под буквами a, b и m мы ни разумели, равенство $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ остается всегда верным.

Частное не изменится также и от деления делимого и делителя на одно и то же число, так как деление равносильно умножению на обратное число.

Заметим, однако, что число, на которое мы умножаем (или делим) делимое и делитель, не должно быть нулем, так как в этом случае, согласно п. в § 33, частное становится неопределенным.

Упражнения.

43. Убедиться поверкою, что следующие равенства верны:

$$(-5)(+2)(-1)=(+2)(-1)(-5)=(+2)(-5)(-1)$$

$$10(-3)(-2)(+5)=10\cdot[(-3)(-2)(+5)]=10(-2)[(-3)(+5)]$$

$$[10+(-3)+(-2)](-7)=10(-7)+(-3)(-7)+(-2)(-7)$$

$$\left(\frac{3}{4}-0,2+\frac{7}{8}\right)\cdot 0,3=\frac{3}{4}\cdot 0,3-0,2\cdot 0,3+\frac{7}{8}\cdot 0,3.$$

44. Основываясь на сочетательном свойстве умножения, как всего удобнее вычислить следующие произведения:

$$8\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 125; \qquad 2,5\cdot 6\cdot 10\cdot 5; \qquad \frac{3}{4}\cdot 8,2\cdot 4\cdot 10?$$

45. Проверить, что частное $3,5:(-7)$ не изменится, если мы умножим делимое и делитель на 4. То же, если разделим на $-0,75$.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ.

ЦЕЛЫЕ ОДНОЧЛЕННЫЕ И МНОГОЧЛЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ.

I. Предварительные понятия.

35. Одночлен и многочлен. Алгебраические выражения делятся на две группы, смотря по тому, какое последнее алгебраическое действие в них входит.

Алгебраическое выражение, в котором последнее по порядку действие не есть сложение или вычитание, называется одночленом.

Значит, одночлен представляет собой или отдельное число, выраженное буквой или цифрой, например $-a$, $+10$, или произведение, например ab, $(a+b)c$, или частное, например $\frac{a-b}{c}$, или степень, например b^2, но **одночлен не должен представлять собою ни сумму, ни разность.**

Если одночлен представляет собою частное, то он называется *дробным* одночленом; все другие одночлены называются *целыми*. Так, одночлен $\frac{a-b}{c}$ есть дробный, $(x-y)\cdot ab$; $a(x+b)^2$ — целые. Так как в начале алгебры мы будем говорить только о целых одночленах, то для краткости мы будем их называть просто „одночленами".

Алгебраическое выражение, составленное из нескольких одночленов, соединенных между собою знаками $+$ или $-$, называется многочленом. Таково, например, выражение:

$$ab-a+b^2-10+\frac{a-b}{c}.$$

Отдельные выражения, от соединения которых знаками $+$ или $-$ получился многочлен, называются его членами. Обыкновенно члены многочлена рассматриваются вместе с теми знаками, которые стоят перед ними; например говорят: член $-a$, член $+b^2$ и т. д. Перед первым членом, если перед ним не поставлено никакого знака, можно подразумевать знак $+$; так, в нашем примере первый член есть ab, или $+ab$.

Выражение, состоящее из двух членов, называется *двучленом*, из трех — *трехчленом* и т. п. Если все члены многочлена целые, то и самый многочлен называется *целым*.

36. Коэфициент. Положим, дано произведение:

$$a3ab(-2),$$

в котором некоторые сомножители выражены цифрами, другие — буквами. Такие произведения можно преобразовать (пользуясь сочетательным

свойством умножения), соединив в одну группу все сомножители, выраженные буквою a, и т. д.:

$$3\cdot(-2)(aa)b,$$

что можно написать короче $-6a^2b$.

Выраженный цифрами сомножитель, поставленный впереди буквенных сомножителей, называется *коэфициентом* одночлена. Так, в одночлене $-6a^2b$ число -6 есть коэфициент.

Заметим, что если коэфициент есть целое положительное число, то он означает, сколько раз повторяется слагаемым то буквенное выражение, к которому он относится; так, $3ab$ означает то же самое, что $(ab)\cdot 3$, т. е. означает сумму $ab+ab+ab$. Если коэфициент есть целое отрицательное число, то он означает, сколько раз повторяется вычитаемым буквенное выражение, к которому он относится; так, $-3x$ означает $-x-x-x$. Если коэфициент есть дробь, то он выражает, какая дробь берется от численной величины буквенного выражения. Так, $\frac{2}{3}ax$ означает то же, что и $ax\cdot\frac{2}{3}$, а умножить число ax на $\frac{2}{3}$ значит взять $\frac{2}{3}$ от этого числа.

37. Свойства многочлена. Всякий многочлен можно рассматривать как алгебраическую сумму его членов. Например, многочлен $2a-b+c$ есть сумма $2a+(-b)+(+c)$, так как выражение $+(-b)$ равносильно выражению $-b$ и выражение $+(+c)$ означает то же, что и $+c$. Вследствие этого, все свойства суммы относительных чисел (§ 25) принадлежат также и многочлену. Напомним два из этих свойств.

а) ***Переместительный закон:*** **численная величина многочлена не изменяется при перемещении его членов (с их знаками).**

б) ***Сочетательный закон:*** **численная величина многочлена не изменяется, если какие-либо его члены мы заменяем их алгебраической суммой.**

Укажем еще следующее свойство многочлена:

в) **Если перед каждым членом многочлена переменим знак на противоположный, то численная величина многочлена изменит также знак на противоположный, а абсолютная величина его не изменится.**

Например, численная величина многочлена $2a^2-ab+b^2-\frac{1}{2}a$ при $a=-4$ и $b=-3$ равна:

$$2(-4)^2-(-4)(-3)+(-3)^2-\frac{1}{2}(-4)=$$
$$=2.\ 16-12+9+2=32-12+9+2=31,$$

а численная величина многочлена $-2a^2+ab-b^2+\frac{1}{2}a$ при тех же значениях букв равна:

$$-2(-4)^2+(-4)(-3)-(-3)^2+\frac{1}{2}(-4)=$$
$$=-2\cdot 16+12-9-2=-32+12-9-2=-31.$$

Упражнения.

46. Упростить следующие произведения:

$ax10xaax$; $aa(-5)bxx(+2)$; $ab\cdot\frac{3}{4}\cdot axx\left(-\frac{1}{2}\right)$; $5mxy(-4)mxyy$.

47. Представить в виде сумм выражения: $2a$; $3ax$; $5a^2b$; $4(a+1)$.

48. Вычислить следующие одночлены:

$7a^2bc$ при $a=3$, $b=2$, $c=\frac{5}{7}$;

$0{,}8a(b+c)$ при $a=1$, $b=\frac{5}{6}$, $c=0{,}25$;

$3(a+b)^2c$ при $a=1$, $b=\frac{5}{6}$, $c=0{,}25$;

$-7x^2y^3$ при $x=-2$, $y=1$;

$0{,}52ax^2y$ при $a=100$, $x=-3$, $y=-2$.

49. Вычислить следующие многочлены:

$2x^4-x^3+5x^2-7x+1$ при $x=1$, при $x=2$;

ax^2+bx+c при $a=3$, $b=-2$, $c=-5$, $x=1$

50. Убедиться поверкою, что при $x=2$ два многочлена: x^3-2x^2+3x-5 и $-x^3+2x^2-3x+5$ дают числа, одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку.

38. Приведение подобных членов. *Члены многочлена, которые отличаются друг от друга только коэфициентами или знаками, или даже и совсем не отличаются, называются подобными.*

Например в многочлене:

$$\underline{4a}-\underline{\underline{3x}}+\underline{0{,}5a}+\underline{\underline{8x}}+3ax-\underline{\underline{2x}}$$

первый член подобен третьему (они подчеркнуты одной чертой), второй член подобен четвертому и шестому (подчеркнуты двумя чертами), а пятый член не имеет себе подобных.

Если в многочлене встречаются подобные между собой члены, то их можно соединить в один член на основании сочетательного свойства многочлена. Так, в приведенном сейчас примере мы можем соединить члены в такие группы:

$$(4a+0{,}5a)+(-3x+8x-2x)+3ax.$$

Но очевидно, что 4 каких-нибудь числа да 0,5 такого же числа составляют 4,5 этого же числа. Значит, $4a+0{,}5a=4{,}5a$. Равным образом, $-3x+8x=5x$ и $5x-2x=3x$. Значит, многочлен можно изобразить так:

$$4{,}5a+3x+3ax.$$

Соединение всех подобных между собою членов многочлена в один член называется приведением подобных членов многочлена.

Замечание. Два подобных члена с одинаковыми коэфициентами, но с разными знаками, взаимно уничтожаются; таковы например, члены: $2a$ и $-2a$, или $\frac{1}{2}x^2$ и $+\frac{1}{2}x^2$.

Примеры.

1. $a+\underline{5mx}-\underline{2mx}+\underline{7mx}-\underline{8mx}=a+2mx.$
2. $\underline{4ax}+b^2-\underline{7ax}-\underline{3ax}+\underline{2ax}=-4ax+b^2=b^2-4ax.$
3. $\underline{4a^2b^3}-\underline{\underline{3ab}}+\underline{0{,}5a^2b^3}+3a^2c+\underline{\underline{8ab}}=4{,}5a^2b^3+5ab+3a^2c.$

Упражнения.

51. $a^3x^2 + 3a^2x^3 + \frac{1}{2}a^2x^3 + a^2x^3$.

52. $2x - 5xy - 8xy - 3{,}1xy - 0{,}2xy$.

53. $a + 8mxy^2 - 4\frac{1}{2}mxy^2$. **54.** $a - 8mxy^2 + 4\frac{1}{2}mxy^2$.

55. $5a^3 - 7a^2b + 7ab^2 + a^2b - 2a^3 - 8ab^2 + a^3 - 12ab^2 + 3a^2b$.

56. $x^5 - 4ax^4 - 2ax^4 + 2a^2x^3 + 5ax^4 - 2a^2x^3 + ax^4 - 7a^2x^3$.

Исторические сведения.

Отрицательные числа встречаются уже у греческого математика Диофанта (в IV веке нашей эры), но он называет их „недопустимыми" и не придает им значения при решении задач. Однако там, где приходится перемножать два числа, имеющие знак —, он пользуется правилом, подобным нашему правилу. Он говорит: „отнимаемое число, будучи умножено на отнимаемое, дает число прибавляемое". Так он получает:

$$(7-3)\cdot(5-2) = 7\cdot 5 - 7\cdot 2 - 3\cdot 5 + 3\cdot 2 = 12.$$

Индусский математик Брамагупта (620 г.) дает уже подробный перечень правил сложения и вычитания относительных чисел. Приведем некоторые из них:

„Сумма двух имуществ есть имущество" (т. е., например, $(+2)+(+3)=5$).

„Сумма двух долгов есть долг" (т. е. $(-2)+(-3)=-5$).

„Сумма имущества и долга равна их разности" (т. е. $(+5)+(-7)=-2$).

„Долг, вычитаемый из нуля, становится имуществом, а имущество долгом" ($0-(-3)=+3$; $0-(+3)=-3$ и т. д.).

В Европе еще в 1544 г. математик Штифель называет отрицательные числа „нелепыми". Жирар в своем сочинении уже пользуется отрицательными числами (1629 г.), но окончательно ввели их в математику Декарт (1637 г.), который и объяснил смысл их, как направленных величин, и ученый художник Леонардо да Винчи (1452—1519 гг.). Раньше для обозначения действий сложения и вычитания употребляли полностью латинские слова plus и minus, которые затем были сокращены до одной буквы p и m с чертой наверху.

II. Алгебраическое сложение и вычитание.

39. Сложение одночленов. Пусть требуется сложить несколько одночленов: $3a$; $-5b$; $+0{,}2a$; $-7b$ и c.

Их сумма выразится так:

$$3a + (-5b) + (+0{,}2a) + (-7b) + c.$$

Но выражения $+(-5b)$, $+(+0{,}2a)$ и $+(-7b)$ равносильны выражениям: $-5b$, $+0{,}2a$ и $-7b$; поэтому сумму данных одночленов можно переписать проще так:

$$\underline{3a} - \underline{\underline{5b}} + \underline{0{,}2a} - \underline{\underline{7b}} + c,$$

что после приведения подобных членов даст:

$$3{,}2a - 12b + c.$$

Правило. **Чтобы сложить несколько одночленов, надо написать их один за другим с их знаками и сделать приведение подобных членов.**

40. Сложение многочленов. Пусть к какому-нибудь алгебраическому выражению, которое мы обозначим одною буквою m, требуется прибавить многочлен $a - b + c$. Искомую сумму можно выразить так:

$$m + (a - b + c).$$

Чтобы преобразовать это выражение, примем во внимание, что многочлен $a-b+c$ представляет собой сумму $a+(-b)+c$; но чтобы прибавить сумму, можно прибавить каждое слагаемое одно за другим. Поэтому:

$$m+(a-b+c)=m+a+(-b)+c.$$

Но прибавить $-b$ все равно, что вычесть b; поэтому:

$$m+(a-b+c)=m+a-b+c.$$

Правило. **Чтобы к какому-нибудь алгебраическому выражению прибавить многочлен, надо приписать к этому выражению все члены многочлена один за другим с их знаками и сделать приведение подобных членов, если они окажутся.**

Если перед первым членом нет знака, то подразумевается $+$.

Пример. $3a^2-5ab+b^2+(4ab-b^2+7a^2)$.

Алгебраическое выражение, которое мы обозначали раньше одною буквою m, дано в этом примере в виде многочлена $3a^2-5ab+b^2$. Применяя указанное правило, найдем:

$$3a^2-5ab+b^2+(4ab-b^2+7a^2)=$$
$$=3a^2-5ab+b^2+4ab-b^2+7a^2=10a^2-ab.$$

Замечание. Если данные для сложения многочлены содержат подобные члены (как в нашем примере), то слагаемые полезно писать одно под другим так, чтобы подобные члены стояли под подобными:

$$\begin{array}{r} 3a^2-5ab+b^2 \\ +\ 7a^2+4ab-b^2 \\ \hline 10a^2-ab \end{array}$$

Упражнения.

Сложить следующие многочлены, подписав их друг под другом (подобные члены под подобными).

57. $(2x-y-z)+(2y+z-x)+(2z-x-y)$.

58. $(3x^3-4x^2+2x-1)+(2x^2-3x+4)+(x^3-2+4x+3x^2)$.

59. $(4a^3-5a^2b+7ab^2-9b^3)+(-2a^3+4a^2b-ab^2-4b^3)+(8ab^2-10a^2b+6a^3+10b^3)$.

41. Вычитание одночленов. Пусть требуется из одночлена $10ax$ вычесть одночлен $-3ax$. Искомая разница выразится так:

$$10ax-(-3ax).$$

Вычитание числа $-3ax$ согласно правилу этого действия можно заменить прибавлением числа, противоположного числу $-3ax$. Такое число есть $+3ax$, поэтому:

$$10ax-(-3ax)=10ax+(+3ax)=10ax+3ax=13ax.$$

Правило. **Чтобы вычесть одночлен, надо приписать его к уменьшаемому с противоположным знаком и сделать приведение подобных членов, если они окажутся.**

42. Вычитание многочлена. Пусть из какого-нибудь алгебраического выражения, которое мы обозначим одною буквою m, требуется вычесть многочлен $a-b+c$, что можно обозначить так:

$$m-(a-b+c).$$

Для этого согласно правилу вычитания достаточно прибавить к m число, противоположное числу $a-b+c$. Такое число есть $-a+b-c$; значит:

$$m-(a-b+c)=m+(-a+b-c).$$

Применяя теперь правило сложения многочленов, получим:

$$m-(a-b+c)=m-a+b-c.$$

Правило. **Чтобы из какого-нибудь алгебраического выражения вычесть многочлен, надо к этому выражению приписать все члены вычитаемого многочлена с противоположными знаками и сделать приведение подобных членов, если они окажутся.**

Замечание. Если требуется вычесть из одного многочлена другой многочлен и в этих многочленах имеются подобные члены, то вычитаемый многочлен полезно писать под уменьшаемым, переменяя знаки у вычитаемого многочлена на противоположные, и так, чтобы подобные члены стояли под подобными. Например, вычитание $(7a^2-2ab+b^2)-(5a^2+4ab-2b^2)$ лучше всего расположить так:

$$\begin{array}{r} 7a^2-2ab+\ b^2 \\ -\ 5a^2-4ab+2b^2 \\ \hline 2a^2-6ab+3b^2 \end{array}$$

Упражнения.

60. $(2p^2-4p+8)-(p^2-5p-7)$.

61. Вычесть $-2y^2+y+6$ из $4x^2+y^2+5$.

62. Вычесть $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}$ из $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+1$.

63. Упростить выражение:

$$x=(2a^2-2b^2+c^2)-(a^2-2b^2-c^2)+(3a^2+4b^2-3c^2).$$

43. Раскрытие скобок, перед которыми стоит знак + или −.

Пусть в выражении

$$2a+(a-3b+c)-(2a-b+2c)$$

требуется раскрыть скобки. Это надо понимать так, что требуется над многочленами, стоящими внутри скобок, произвести те действия, которые указаны знаками, стоящими перед скобками. В нашем примере перед первыми скобками стоит знак +, перед вторыми знак −. Произведя сложение и вычитание по данным нами правилам, получим выражение без скобок:

$$2a+a-3b+c-2a+b-2c=a-2b-c.$$

Таким образом, раскрывая скобки, перед которыми стоит знак +, мы не должны изменять знаки внутри скобок, а раскрывая скобки, перед которыми стоит знак −, мы должны перед всеми членами, стоящими внутри скобок, переменить знаки на противоположные.

Пусть еще требуется раскрыть скобки в выражении

$$10p-[3p+(5p-10)-4].$$

Всего удобнее раскрыть сначала круглые скобки, а потом квадратные:

$$10p-[3p+5p-10-4]=10p-3p-5p+10+4=2p+14.$$

44. Заключение в скобки части многочлена. Для преобразования многочлена иногда бывает полезно заключить в скобки совокупность некоторых его членов, причем перед скобками иногда желательно поставить знак +, т. е. изобразить многочлен в виде суммы, а иногда знак —, т. е. изобразить многочлен в виде разности. Пусть, например, в многочлене $a+b-c$ мы желаем заключить в скобки два последних члена, поставив перед скобками знак +. Тогда пишем так:

$$a+b-c=a+(b-c),$$

т. е. внутри скобок оставляем те же знаки, какие были в данном многочлене. Что такое преобразование верно, убедимся, если раскроем скобки по правилу сложения; тогда получим снова данный многочлен.

Пусть в том же многочлене требуется заключить в скобки два последних члена, поставив перед скобками знак —. Тогда напишем так:

$$a+b-c=a-(-b+c)=a-(c-b),$$

т. е. внутри скобок перед всеми членами переменяем знаки на противоположные. Что такое преобразование верно, убедимся, если раскроем скобки по правилу вычитания; тогда получим снова данный многочлен.

Можно и весь многочлен заключить в скобки, поставив перед скобками знак + или знак —. Например, многочлен $a+b-c$ можно написать так:

$$+(a+b-c) \text{ или } -(-a-b+c).$$

Упражнения.

Раскрыть скобки и упростить:

64. $x+[x-(x-y)]$; $\quad m-\{n-[m+(m-n)]+m\}$.

65. $a+b-c-[a-(b-c)]-[a+(b-c)-(a-c)]$.

66. $(3x^2-4y^2)-(x^2-2xy-y^2)+[2x^2+2xy+(-4xy)+3y^2]$.

67. В многочлене $a-b-c+d$, не изменяя его численной величины:

а) заключить в скобки три последних члена, поставив перед скобками знак —;

б) заключить в скобки два последних члена, поставив перед скобками знак +;

в) заключить в скобки два средних члена, поставив перед скобками знак —.

III. Алгебраическое умножение.

45. Умножение одночленов. а) Пусть надо умножить a^3 на a^2, что можно обозначить так: a^3a^2, или подробнее: $(aaa)(aa)$. Здесь произведение aaa умножается на другое произведение aa. Но чтобы умножить какое-нибудь число на произведение, можно умножить это число на первый сомножитель, полученный результат умножить на второй сомножитель и т. д. Поэтому:

$$a^3a^2=(aaa)aa,$$

что может быть написано и без скобок, так как порядок действия остается и без скобок такой же, какой указан скобками:

$$a^3a^2=aaaaa=a^5.$$

Мы видим, что показатель степени произведения равен сумме показателей степеней сомножителей.

Возьмем еще пример: x^3 умножим на x^4. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, получим:

$$x^3 \cdot x^4 = (xxx)\ (xxxx) = xxxxxxx = x^7.$$

Вообще, произведение a^m на a^n будет:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Значит, произведение степеней одного и того же числа равно такой степени этого числа, у которой показатель есть сумма показателей перемножаемых степеней. Это выражают короче так:

При умножении степеней одного и того же числа показатели их складываются.

Таким образом:

$$m^2m^3 = m^5; \quad x^3x = x^4; \quad y^2yy^3 = y^6.$$

б) Пусть дано умножить:

$$3ax^2\,(-5abx).$$

Так как одночлен $-5abx$ есть произведение, то достаточно умножить множимое на первый сомножитель -5, результат умножить на второй сомножитель a и т. д. Значит:

$$3ax^2\,(-5abx) = 3ax^2\,(-5)\,abx.$$

В этом произведении, пользуясь сочетательным свойством умножения, сгруппируем сомножители в такие группы:

$$(+3)\cdot(-5)\cdot(aa)\cdot b\cdot(x^2x).$$

Произведя умножение в каждой группе, получим: $-15a^2bx^3$.

Правило. **Чтобы умножить одночлен на одночлен, надо перемножить их коэфициенты, сложить показатели одинаковых букв, а те буквы, которые входят только во множимое или только во множитель, перенести в произведение с их показателями.**

Примеры.

1. $0{,}7\,a^3x\,(3a^4x^2y^2) = 2{,}1a^7x^3y^2$. 2. $-3{,}5x^2y\left(\frac{3}{4}x^3\right) = -\frac{21}{8}x^5y$.

46. Квадрат и куб одночлена. Мы знаем, что возвысить в квадрат или куб какое-либо число значит взять его сомножителем два или три раза; например:

$$11^2 = 11\cdot 11 = 121; \quad \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-1\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{4};$$

$$4^3 = 4\cdot 4\cdot 4 = 64; \quad (-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125.$$

Применим это определение к возвышению в квадрат и куб целых одночленов.

1. Пусть требуется возвысить a^4 в квадрат или куб. Согласно определению:

$$(a^4)^2 = a^4 \cdot a^4; \quad (a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4.$$

Применяя правило умножения одночленов, получим:

$$(a^4)^2 = a^8; \quad (a^4)^3 = a^{12}.$$

Точно так же:

$$(a^3)^2 = a^6; \quad (a^3)^3 = a^9.$$

Вообще:

$$(a^m)^2 = a^m a^m = a^{2m}; \quad (a^m)^3 = a^m a^m a^m = a^{3m},$$

т. е., **чтобы возвысить в квадрат или куб степень, надо соответственно умножить на два или на три показатель степени.**

Так:

$$(4^2)^2 = 4^4 = 256; \quad (2^2)^3 = 2^6 = 64 \text{ и т. д.}$$

2. Пусть требуется возвысить в квадрат или в куб произведение abc. Согласно определению:

$$(abc)^2 = (abc)(abc); \quad (abc)^3 = (abc)(abc)(abc).$$

Применяя свойства умножения, получим:

$$(abc)^2 = abcabc = (aa)(bb)(cc) = a^2b^2c^2;$$

$$(abc)^3 = abcabcabc = (aaa)(bbb)(ccc) = a^3b^3c^3.$$

т. е., **чтобы возвысить произведение в квадрат или куб, надо возвысить в эту степень каждый сомножитель отдельно и результаты перемножить.**

Так:

$$(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900;$$

$$(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216.$$

3. Пусть теперь требуется возвысить в квадрат или куб одночлен $-4a^3bc^4$. Применяя только что выведенные правила, будем иметь:

$$(-4a^3bc^4)^2 = (-4)^2 \cdot (a^3)^2 \cdot (b)^2 \cdot (c^4)^2 = 16a^6b^2c^8;$$

$$(-4a^3bc^4)^3 = (-4)^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b)^3 \cdot (c^4)^3 = -64a^9b^3c^{12}.$$

Правила. **1. Чтобы возвысить в квадрат целый одночлен, надо возвысить в квадрат коэфициент одночлена, а показатели букв умножить на два.**

2. Чтобы возвысить в куб целый одночлен, надо возвысить в куб коэфициент одночлена, а показатели букв умножить на три.

47. Умножение многочлена на одночлен. Пусть дано умножить многочлен $a + b - c$ на какое-нибудь алгебраическое выражение, например, на одночлен, который мы обозначим одною буквою m:

$$(a + b - c) \cdot m.$$

Применяя распределительный закон умножения, мы получим:

$$(a + b - c)m = am + bm - cm.$$

Правило. **Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно умножить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные произведения сложить.**

Так как произведение не изменяется от перестановки сомножителей, то это правило применимо также и к умножению одночлена на многочлен. Таким образом: $m(a+b-c)=ma+mb-mc$.

Примеры.

1. $(3x^2-2ax+5a^2)\cdot(-4ax)$.

Здесь умножение членов многочлена на данный одночлен надо производить по правилу умножения одночленов, принимая во внимание также и правило знаков: одинаковые знаки при умножении дают $+$, а разные знаки дают $-$.

Умножаем отдельно каждый член многочлена на одночлен $-4ax$:

$$(3x^2)(-4ax)=-12ax^3;\quad (-2ax)(-4ax)=+8a^2x^2;$$
$$(+5a^2)(-4ax)=-20a^3x.$$

Теперь сложим полученные результаты:

$$-12ax^3+8a^2x^2-20a^3x.$$

2. $(a^2-ab+b^2)(3a)=a^2(3a)-(ab)(3a)+b^2(3a)=$
$=3a^3-3a^2b+3ab^2$.

3. $(7x^2+\frac{3}{4}ax-0{,}3)(2{,}1a^2x)=(7x^2)(2{,}1a^2x)+\left(\frac{3}{4}ax\right)(2{,}1a^2x)-$
$-0{,}3(2{,}1a^2x)=14{,}7a^2x^3+1{,}575a^3x^2-0{,}63a^2x$.

4. $2a(3a-4ax+\frac{1}{2}x^2)=6a^2-8a^2x+ax^2$.

48. Умножение многочлена на многочлен. Пусть дано умножить многочлен $a+b-c$ на многочлен $m-n$, что можно выразить так:

$$(a+b-c)(m-n).$$

Рассматривая множитель $(m-n)$ как одно число (как одночлен), применим правило умножения многочлена на одночлен:

$$(a+b-c)(m-n)=a(m-n)+b(m-n)-c(m-n).$$

Каждый член полученного многочлена представляет собой произведение одночлена на многочлен. Применяя опять предыдущее правило, получим:

$$(am-an)+(bm-bn)-(cm-cn).$$

Раскрыв скобки по правилам сложения и вычитания, окончательно найдем:

$$(a+b-c)(m-n)=am-an+bm-bn-cm+cn.$$

Правило. **Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо умножить каждый член первого многочлена на каждый член второго многочлена и полученные произведения сложить.**

Конечно, при умножении членов первого многочлена на члены второго многочлена нужно руководствоваться правилами знаков: одинаковые знаки дают $+$, разные знаки $-$.

Например:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(a^3 - 3ab^2 + b^3).$$

Умножим сначала все члены множимого на первый член множителя:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)a^3 = a^5 - 5a^4b + a^3b^2 - 3a^3.$$

Затем умножим все члены множимого на второй член множителя:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(-3ab^2) = -3a^3b^2 + 15a^2b^3 - 3ab^4 + 9ab^2.$$

Далее, умножим на третий член множителя:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(+b^3) = a^2b^3 - 5ab^4 + b^5 - 3b^3.$$

Наконец, сложим все полученные произведения и сделаем приведение подобных членов; окончательный результат будет:

$$a^5 - 5a^4b - 2a^3b^2 - 3a^3 + 16a^2b^3 - 8ab^4 + 9ab^2 + b^5 - 3b^3.$$

Примеры.

1. $(a - b)(m - n - p) = am - bm - an + bn - ap + bp.$
2. $(x^2 - y^2)(x + y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3.$
3. $(3an + 2n^2 - 4a^2)(n^3 - 5an) = 3an^3 + 2n^4 - 4a^2n^2 - 15a^2n^2 - 10an^3 + 20a^3n = -7an^3 + 2n^4 - 19a^2n^2 + 20a^3n.$
4. $(2a^2 - 3)^2 = (2a^2 - 3)(2a^2 - 3) = (2a^2)^2 - 3(2a^2) - (2a^2)3 + 9 = 4a^4 - 6a^2 - 6a^2 + 9 = 4a^4 - 12a^2 + 9.$

Упражнения.

63. $(5a^2b^3)(3ab^4c)$; $\left(\frac{3}{4}ax^3\right)\left(\frac{5}{6}ax^3\right)$.

69. $(0{,}3abx)(2{,}7a^3bx^2)$; $(7a^2b^4c)(3ab^3c^2)\left(\frac{1}{21}a^3b\right)$.

70. $\left(\frac{3}{7}mx^2y^3\right)^2$; $(2a^3bx^2)^3$.

71. $(0{,}1xmy^3)^2$; $\left(\frac{1}{2}m^2ny^3\right)^3$.

72. $(3a^2 - 2b^3 + c)2ab$.

73. $(5a - 4a^2b + 3a^3b^2 - 7a^4b^3)5a^2b$.

74. $(a + b - c)(m - n)$; $(2a - b)(3a + b^2)$.

75. $\left(a + \frac{1}{2}b\right)(2a - b)$; $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$.

76. $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$.

77. $(2x + 3y)(3x - 2y)$; $(y - 1)(y^3 + y^2 + y + 1)$.

49. Расположенный многочлен. Расположить многочлен по степеням какой-нибудь буквы значит написать его члены в такой последовательности, чтобы показатели этой буквы увеличивались или уменьшались от первого члена к последнему. Так, многочлен $1 + 2x + 3x^2 - x^3$ расположен по возрастающим степеням буквы x. Тот же многочлен будет расположен по убывающим степеням буквы x, если члены его напишем в обратном порядке: $-x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

Буква, по которой расположен многочлен, называется *главной* его буквой. Член, содержащий главную букву с наибольшим показателем,

называется *высшим членом* многочлена; член, содержащий главную букву с наименьшим показателем или не содержащий ее вовсе, называется *низшим членом* многочлена.

50. Умножение расположенных многочленов всего удобнее производить так, как будет указано на следующем примере.

Умножить $3x - 5 + 7x^2 - x^3$ на $2 - 8x^2 + x$.

Расположив оба многочлена по убывающим степеням буквы x, пишут множитель под множимым и под ними проводят черту:

$$\begin{array}{r} -x^3+7x^2+3x-5 \\ -8x^2+x+2 \\ \hline 8x^5-56x^4-24x^3+40x^2 \\ -x^4+7x^3+3x^2-5x \\ -2x^3+14x^2+6x-10 \\ \hline 8x^5-57x^4-19x^3+57x^2+x-10 \end{array}$$

Умножают все члены множимого на первый член множителя (на $-8x^2$) и полученное произведение пишут под чертою. Умножают затем все члены множимого на второй член множителя (на $+x$) и полученное второе произведение пишут под первым так, чтобы подобные члены находились под подобными. Так же поступают и далее. Под последним произведением проводят черту, под которою пишут полное произведение, складывая все отдельные произведения.

Можно оба многочлена расположить и по возрастающим степеням и затем производить умножение в том порядке, как было сейчас указано.

51. Высший и низший члены произведения. Из рассмотрения предыдущего примера следует:

высший член произведения равен произведению высшего члена множимого на высший член множителя;

низший член произведения равен произведению низшего члена множимого на низший член множителя.

Так как все остальные члены произведения будут иметь показатель при главной букве меньший, чем высший член, и в то же время больший, чем низший член, то высший и низший члены произведения не могут иметь подобных членов.

Остальные члены произведения могут получиться от соединения нескольких подобных членов в один. Может даже случиться, что в произведении, после приведения подобных членов, все члены уничтожатся, кроме высшего и низшего, как это видно на следующем примере:

$$\begin{array}{r} x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4 \\ x-a \\ \hline x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x \\ -ax^4-a^2x^3-a^3x^2-a^4x-a^5 \\ \hline x^5 \qquad\qquad -a^5 \end{array}$$

$$x^5 - a^5 = x^5 - a^5.$$

52. Число членов произведения. Пусть во множимом будет 5 членов, а во множителе 3 члена. Умножив каждый член множимого на первый член множителя, мы получим 5 членов произведения; умножим затем каждый член множимого на второй член множителя, мы получим

еще 5 членов произведения и т. д.; значит, всех членов в произведении окажется $5 \cdot 3$, т. е. 15. Вообще, **число членов произведения до приведения в нем подобных членов равно произведению числа членов множимого на число членов множителя.**

Так как высший и низший члены произведения не могут иметь себе подобных членов, а все прочие члены могут уничтожаться, то **число членов произведения двух или нескольких многочленов после приведения в нем подобных членов не может быть меньше двух.**

Упражнения.

Расположить следующие многочлены по убывающим степеням буквы x и сделать их умножение:

78. $24x + 6x^2 + x^3 + 60$ и $12x - 6x^2 + 12 + x^3$.

79. $(x^5 - x^3 + x - 1)(x^4 + x^2 - 1)$.

80. $(x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5)(x + a)$.

53. Некоторые формулы умножения двучленов. Полезно запомнить следующие формулы умножения двучленов:

а) $\underline{(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2}$.

Например:

$$17^2 = (10+7)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 7 + 7^2 = 100 + 140 + 49 = 289.$$

Таким образом, **квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.**

б) $\underline{(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2}$.

Например:

$$19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361.$$

Таким образом, **квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.**

в) Так как разность двух чисел и вообще алгебраических выражений может быть представлена в виде алгебраической суммы, то оба предыдущих правила можно соединить в одно и выразить так:

Квадрат двучлена равен квадрату первого члена плюс удвоенное произведение первого члена на второй плюс квадрат второго члена.

Нужно только помнить, что каждый член возвышаемого в квадрат двучлена должен быть взят с его знаком.

Например:

1. $(2ab - c^2)^2 = (2ab)^2 + 2(2ab)(-c^2) + (-c^2)^2 = 4a^2b^2 - 4abc^2 + c^4$.
2. $(-m + 3n^3)^2 = (-m)^2 + 2(-m)(3n^3) + (3n^3)^2 = m^4 - 6mn^3 + 9n^6$.

г) $\underline{(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab + b^2 = a^2 - b^2}$.

Например:

$$25 \cdot 15 = (20+5) \cdot (20-5) = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375.$$

Таким образом, **произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел.**

54. Применение этих формул. При помощи указанных формул можно производить умножение многочленов проще, чем обыкновенным путем.

Примеры.

1. $(4a^3-1)^2=(4a^3)^2-2(4a^3)\cdot 1+1^2=16a^6-8a^3+1.$
2. $(x+y)(y-x)=(y+x)(y-x)=y^2-x^2.$
3. $(x+y+1)(x-y+1)=[(x+1)+y]\ [(x+1)-y]=$
$=(x+1)^2-y^2=x^2+2x+1-y^2.$
4. $(a-b+c)(a+b-c)=[a-(b-c)][a+(b-c)]=$
$=a^2-(b-c)^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-b^2+2bc-c^2.$

Упражнения.

81. $(a+1)^2$; $(1+2a)^2$; $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.
82. $(3a^2+1)^2$; $(0{,}1mx+5x^2)^2$.
83. $(5a-2)^2$; $(3x-2a)^2$; $\left(3a^2-\frac{1}{2}\right)^2$.

84. Пользуясь формулами для $(a+b)^2$ и $(a-b)^2$, найти следующие квадраты: 101^2; 997^2; 95^2; 57^2; 72^2; 89^2.

85. $(2m-3n)^2$; $(3ax-4ay)^2$; $\left[0{,}2x^3-\left(\frac{3}{8}\right)\right]^2$.

86. $\left(\frac{1}{2}x^2-3\frac{1}{2}x\right)^2$; $(0{,}25p-0{,}2q)^2$.

87. $(a+1)(a-1)$; $(2a+5)(2a-5)$.

88. $(2x-3)(3+2x)$; $(a^2+1)(1-a^2)$.

Найти сокращенным путем следующие произведения:

89. $(x^2+1)(x+1)(x-1)$; $(4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)$.

90. $(m+n-p)(m+n+p)$; $[a+(b+c)][a-(b+c)]$.

55. Куб суммы и куб разности двух чисел. К формулам умножения двучленов добавим еще следующие две:

а) $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$
$=a^3+\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}+\underline{a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$

т. е. **куб суммы двух чисел равен кубу первого числа плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго плюс куб второго числа.**

Например:

$$11^3=(10+1)^3=10^3+3\cdot 10^2\cdot 1+3\cdot 10\cdot 1^2+1^3=$$
$$=1000+300+30+1=1331.$$

б) $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=$
$=a^3-\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}-\underline{a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$

т. е. **куб разности двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго минус куб второго числа.**

Например:

$$29^3 = (30-1)^3 = 30^3 - 3\cdot 30^2\cdot 1 + 3\cdot 30\cdot 1^2 - 1^3 =$$
$$= 27\,000 - 2700 + 90 - 1 = 24\,389.$$

Если возьмем члены возвышаемого в куб двучлена с их знаками, то оба предыдущих правила мы можем соединить в одно:

Куб двучлена равен кубу первого члена плюс утроенное произведение квадрата первого члена на второй плюс утроенное произведение первого члена на квадрат второго плюс куб второго члена.

Например:

$$(2a-3b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(-3b) + 3(2a)(-3b)^2 + (-3b)^3 =$$
$$= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3.$$

Упражнения.

91. $(a+1)^3$; $(a-1)^3$; $(2x+3)^3$; $(5-3x)^3$.

92. $\left(\frac{1}{2}m-2\right)^3\left(\frac{3}{4}p-\frac{1}{3}q\right)^3\left(5-3\right)^3$.

IV. Алгебраическое деление.

56. Деление одночленов. а) Пусть требуется разделить:

$$a^5 : a^2.$$

Так как делимое должно равняться делителю, умноженному на частное, а при умножении показатели одинаковых букв складываются, то в искомом частном показателем буквы a должно быть такое число, которое, сложенное с 2, составляет 5; такое число равно разности $5-2$. Значит:

$$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3.$$

Подобно этому найдем:

$$x^3 : x^2 = x; \qquad y^4 : y = y^3 \text{ и т. п.}$$

Значит, частное от деления степеней одного и того же числа равно такой степени этого числа, у которой показатель есть разность от вычитания из показателя делимого показателя делителя. Это выражают короче так: **при делении степеней одного и того же числа показатель делителя вычитается из показателя делимого.**

б) Пусть дано разделить:

$$12a^3b^2x : 4a^2b^2.$$

Согласно определению деления, частное, будучи умножено на делитель, должно составить делимое. Поэтому у искомого частного коэфициент должен быть 12:4, т. е. 3; показатель у буквы a получится вычитанием из показателя этой буквы в делимом показателя той же буквы в делителе, буква b совсем не войдет в частное, а буква x перейдет в частное со своим показателем.

Таким образом: $12a^3b^2x : 4a^2b^2 = 3ax$.

Поверка: $3ax\cdot 4a^2b^2 = 12a^3b^2x$.

Правило. **Чтобы разделить одночлен на одночлен, надо коэфициент делимого разделить на коэфициент делителя, из показателей букв делимого вычесть показатели тех же букв делителя и перенести в частное без изменения показателей те буквы делимого, кототорых нет в делителе.**

Примеры.

1. $3m^3n^4x : 4m^2nx = \frac{3}{4}mn^3$.

2. $-ax^4y^3 : -\frac{5}{6}axy^2 = +\frac{6}{5}x^3y$.

3. $0{,}8ax^n : -0{,}02ax = -40x^{n-1}$.

57. Нулевой показатель. Если при делении степеней одного и того же числа показатель делителя окажется равным показателю делимого, то частное должно равняться 1; например $a^3 : a^3 = 1$, потому что $a^3 = a^3 \cdot 1$. Условимся производить вычитание показателей и в этом случае; тогда в частном мы получим букву с нулевым показателем: $a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0$. Конечно, этот показатель не имеет того значения, которое мы придавали показателям ранее, так как нельзя повторить число сомножителем 0 раз. Мы условимся **под видом a^0 разуметь частное от деления одинаковых степеней буквы a,** и так как это частное равно 1, то мы будем принимать a^0 за 1.

58. Признаки невозможности деления одночленов. Если частное от деления целых одночленов не может быть выражено точно целым одночленом, то говорят, что такое деление невозможно. Деление одночленов невозможно в двух случаях:

а) **Когда в делителе есть буквы, которых нет в делимом.** Например, нельзя разделить $4ab^2$ на $2ax$, так как всякий целый одночлен, умноженный на $2ax$, даст произведение, содержащее букву x, а в нашем делимом такой буквы совсем нет.

б) **Когда показатель какой-либо буквы в делителе больше показателя той же буквы в делимом.** Например, деление $10a^3b^2 : 5ab^3$ невозможно, так как какой бы целый одночлен мы ни написали в частном, он, будучи умножен на делитель, даст в произведении одночлен, содержащий букву b с показателем не меньше 3, тогда как в делимом эта буква входит с показателем 2.

Когда один одночлен не делится на другой, то частное может быть только указано при помощи знаков деления; так, частное от деления $4a$ на $5b$ можно написать:

$$4a : 5b, \text{ или } \frac{4a}{5b}.$$

Упражнения.

93. $8a^5x^3y : 4a^3x^2$; $3ax^3 : (-5ax)$.

94. $a^8b : \left(-\frac{5}{6}a^5b\right)$; $12a^mb^3 : 4ab$.

59. Деление многочлена на одночлен. Пусть требуется разделить многочлен $a+b-c$ на какой-нибудь одночлен, который мы обозначим одной буквой m:

$$(a+b-c) : m, \text{ или } \frac{a+b-c}{m}.$$

Многочлен $a+b-c$ есть алгебраическая сумма, а чтобы разделить алгебраическую сумму на какое-нибудь число, можно разделить на это число каждое слагаемое отдельно. Поэтому:

$$\frac{a+b-c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}.$$

В этом можно убедиться и поверкою: умножив многочлен $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$ на делитель m, мы получим делимое $a+b-c$.

Правило. **Чтобы разделить многочлен на одночлен, надо разделить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные частные сложить.**

Примеры.

1. $(20a^3-8a^2-a):4a=5a^2-2a-\frac{1}{4}$.

2. $(4x^2-2x+10):2x=2x-1+\frac{10}{2x}$.

3. $\left(\frac{1}{2}x^3-0{,}3x^3+1\right):2x^2=\frac{1}{4}x-0{,}15+\frac{1}{2x^2}$.

60. Деление одночлена на многочлен. Пусть требуется одночлен a разделить на многочлен $b+c-d$. Частное от такого деления не может быть выражено ни целым одночленом, ни целым многочленом, так как если допустим, что частное равно какому-нибудь целому одночлену или целому многочлену, то произведение этого частного на многочлен $b+c-d$ дало бы тоже многочлен, а не одночлен. Частное от деления a на $b+c-d$ может быть только обозначено знаками деления:

$$a:(b+c-d) \text{ или } \frac{a}{b+c-d}.$$

Упражнения.

95. $(4a^2b+6ab^2-12a^3b^3):\frac{3}{4}ab$.

96. $(36a^2x^5-24a^3x^4+4a^4x^3):4a^2x^3$.

97. $(3a^2y-6a^2y^2+3a^2y^3-3a^2y^4):3a^2y$.

61. Деление многочлена на многочлен. Частное от деления многочлена на многочлен только в редких случаях можно выразить в виде целого многочлена. Например:

$$(a^2+2ab+b^2):(a+b)=(a+b),$$

так как

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.$$

Вообще же подобные частные можно только обозначить знаком деления. Например, частное от деления $a-b+c$ на $d-e$ выразится так:

$$\frac{a-b+c}{d-e} \text{ или } (a-b+c):(d-e).$$

62. Деление расположенных многочленов. Частное в виде целого многочлена иногда удается выразить, если оба многочлена можно расположить по степеням одной и той же буквы. Покажем, как это сделать, на следующем примере:

$$(5x^2-19x^3+17x+6x^4-4):(1-5x+3x^2).$$

Напишем оба многочлена по убывающим степеням буквы x и расположим деление так, как оно располагается при делении целых чисел:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4-19x^3+5x^2+17x-4 & 3x^2-5x+1 \\ \cline{2-2} -6x^4+10x^3-2x^2 & 2x^2-3x-4 \\ \cline{1-1} \text{1-й остаток} \quad -9x^3+3x^2+17x-4 & \\ +9x^3-15x^2+3x & \\ \cline{1-1} \text{2-й остаток} \quad -12x^2+20x-4 & \\ +12x^2-20x+4 & \\ \cline{1-1} \text{3-й остаток} \quad 0 & \end{array}$$

Предположим, что искомое частное равно какому-нибудь многочлену и что члены этого многочлена расположены тоже по убывающим степеням буквы x.

Делимое должно равняться произведению делителя на частное. Из умножения расположенных многочленов известно, что высший член произведения равен произведению высшего члена множимого на высший член множителя. В делимом высший член есть первый, в делителе и частном высшие члены тоже первые. Значит, 1-й член делимого ($6x^4$) должен быть произведением 1-го члена делителя ($3x^2$) на 1-й член частного. Отсюда следует: чтобы найти 1-й член частного, достаточно разделить 1-й член делимого на 1-й член делителя. Разделив, находим 1-й член частного $2x^2$. Пишем его под чертою в частном.

Умножим все члены делителя на 1-й член частного и полученное произведение вычтем из делимого. Для этого напишем его под делимым так, чтобы подобные члены стояли под подобными, и у всех членов вычитаемого переменим знаки на обратные. Получим после вычитания 1-й остаток. Если бы этот остаток оказался равным нулю, то это значило бы, что в частном никаких других членов кроме найденного 1-го нет, т. е. что частное есть одночлен. Если же, как в нашем примере, 1-й остаток не есть нуль, то будем рассуждать так.

Делимое есть произведение всех членов делителя на каждый член частного. Мы вычли из делимого произведение всех членов делителя на 1-й член частного; следовательно, в 1-м остатке заключается произведение всех членов делителя на 2-й, на 3-й и следующие члены частного. Высший член в остатке есть 1-й; высший член делителя тоже 1-й; высший член в частном (не считая 1-го) есть 2-й член. Значит, 1-й член остатка ($-9x^3$) должен равняться произведению 1-го члена делителя на 2-й член частного. Отсюда заключаем: чтобы найти 2-й член частного, достаточно разделить 1-й член 1-го остатка на 1-й член делителя. Разделив, находим 2-й член частного $-3x$. Пишем его в частном.

Умножим на 2-й член частного все члены делителя и полученное произведение вычтем из 1-го остатка. Получим 2-й остаток. Если этот остаток равен нулю, то деление окончено; если же, как в нашем примере, 2-й остаток не равен нулю, то будем рассуждать так:

2-й остаток есть произведение всех членов делителя на 3-й, на 4-й и следующие члены частного. Так как из этих членов частного высший есть 3-й, то подобно предыдущему 3-й член частного найдем, если 1-й член 2-го остатка разделим на 1-й член делителя. Разделив, находим -4. Умножив на -4 все члены делителя и вычтя произведение из

остатка, получим 3-й остаток. В нашем примере этот остаток оказался нулем; это показывает, что в частном других членов кроме найденных не может быть. Если бы 3-й остаток был не 0, то надо было бы делить первый член этого остатка на 1-й член делителя; от этого получился бы 4-й член частного, и т. д.

Можно было бы расположить делимое и делитель по возрастающим степеням одной и той же буквы и затем поступать так, как сейчас было сказано; при этом пришлось бы основываться на том, что низший член произведения равен произведению низшего члена множимого на низший член множителя.

Примеры. а)

$$\begin{array}{r|l} 28x^4 - 13ax^3 - 26a^2x^2 + 15a^3x & 7x^2 + 2ax - 5a^2 \\ \quad - 8ax^3 + 20a^2x^2 & \hline \\ \hline -21ax^3 - 6a^2x^2 + 15a^3x & 4x^2 - 3ax \\ \quad + 6a^2x^2 - 15a^3x & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Мы здесь не писали произведений 1-го члена делителя на 1-й, на 2-й и т. д. члены частного, потому что эти произведения всегда равны тем членам, под которыми они подписываются, и при вычитании всегда взаимно уничтожаются. Обыкновенно так и делают.

б)

$$\begin{array}{r|l} x^3 - a^3 & x - a \\ \quad + ax^2 & \hline \\ \hline ax^2 - a^3 & x^2 + ax + a^2 \\ \quad + a^3x & \\ \hline a^3x - a^3 & \\ \quad + a^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

в)

$$\begin{array}{r|l} x^4 - a^4 & x - a \\ \quad + ax^3 & \hline \\ \hline ax^3 - a^4 & x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 \\ \quad + a^2a^2 & \\ \hline a^2x^2 - a^4 & \\ \quad + a^3x & \\ \hline a^3x - a^4 & \\ \quad + a^4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Подобным образом можно также убедиться, что разности $x^5 - a^5$, $x^6 - a^6 \ldots$ и вообще $x^m - a^m$ делятся без остатка на разность $x - a$, т. е. что **разность одинаковых степеней двух чисел делится на разность этих чисел без остатка.**

63. Признаки невозможности деления многочленов. Деление многочлена на многочлен нельзя выполнить в следующих случаях:

а) **Если показатель главной буквы в высшем члене делимого меньше показателя той же буквы в высшем члене делителя,** потому что тогда нельзя получить высшего члена частного.

б) **Если показатель главной буквы в низшем члене делимого меньше показателя той же буквы в низшем члене делителя,** потому что тогда нельзя получить низшего члена частного.

в) Если показатели главной буквы в высшем и низшем членах делимого не меньше соответственно показателей этой буквы в высшем и низшем членах делителя, то еще нельзя сказать, чтобы деление было возможно. В этом случае, чтобы судить о возможности или невозможности деления, надо приступить к выполнению самого действия и

продолжать его до тех пор, пока окончательно не убедимся в возможности или невозможности получить частное в виде многочлена.

Упражнения.

98. $(x^2-3x-4):(x+1)$; $(y^2-y-2):(y-2)$.

99. $(6x^3+2-3x^2-4x):(2x-1)$.

100. $(3a^5-15a^2x^2+6a^3x^3):(x^2-5ax+2a^2)$.

101. $(x^6-a^6):(x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5)$.

V. Разложение на множители.

64. Предварительное замечание. Говоря об алгебраическом делении, мы указывали, что в некоторых случаях частное можно только обозначить знаком деления. Получаемые при этом выражения, вроде таких: $\frac{a}{b}$, $\frac{2x}{3a}$, $\frac{x^2-4x+y^2}{x+y}$ и т. п. принято называть *алгебраическими дробями.*

Мы вскоре увидим, что алгебраические дроби, подобно арифметическим, могут быть иногда упрощены посредством **сокращения,** т. е. посредством деления делимого и делителя на их общие множители, если таковые окажутся. Для того чтобы такое сокращение возможно было производить без затруднения, надо научиться разлагать алгебраические выражения на множители (подобно тому как в арифметике для сокращения дробей надо уметь разлагать целые числа на составляющие их множители).

65. Разложение целых одночленов. Возьмем какой-нибудь целый одночлен, например $6a^2b^3$. Так как он представляет собой произведение, то по одному его виду его сразу можно разложить на составляющие множители. Так:

$$6a^2b^3=2\cdot3(aa)(bbb)=2\cdot3aabbb.$$

Соединяя эти сомножители в какие-нибудь группы (пользуясь сочетательным свойством умножения), мы можем для этого одночлена указать разнообразные разложения, например:

$$6a^2b^3=(6a)(ab^3)=(2a^2b)(3b^2)=(3ab^2)(2ab)$$ и т. п.

66. Разложение многочленов. Укажем простейшие случаи, когда многочлен может быть разложен на множители.

а) Так как

$$(a+b-c)m=am+bm-cm,$$

то и наоборот:

$$am+bm-cm=(a+b-c)m.$$

Таким образом, если все члены многочлена содержат общий множитель, то его можно вынести за скобки.

Например:

1. $x^6-2x^2+3x=x(x^5-2x+3)$.
2. $16a^2-4a^3=4a^2(4-a)$.
3. $5m(x-1)+3n(x-1)=(x-1)(5m+3n)$.

б) Так как

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

то и наоборот:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Таким образом, если двучлен представляет собой квадрат одного числа без квадрата другого числа, то его можно заменить произведением суммы этих чисел на их разность.

Например:

1. $x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$.
2. $y^2-1=y^2-1^2=(y+1)(y-1)$.
3. $9a^2-\frac{1}{4}=(3a)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(3a+\frac{1}{2}\right)\left(3a-\frac{1}{2}\right)$.
4. $25x^2-0{,}01=(5x)^2-0{,}1^2=(5x+0{,}1)(5x-0{,}1)$.
5. $m^4-n^4=(m^2)^2-(n^2)^2=(m^2+n^2)(m^2-n^2)=$
$=(m^2+n^2)(m+n)(m-n)$.
6. $x^2-(x-1)^2=[x+(x-1)][x-(x-1)]=$
$=(x+x-1)(x-x+1)=2x-1$.

в) Так как

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \text{ и } (a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$

то и наоборот:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$

и

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(a-b)(a-b).$$

Значит, если трехчлен представляет собой сумму квадратов каких-нибудь двух количеств, увеличенную или уменьшенную на удвоенное произведение этих количеств, то его можно заменить квадратом суммы или разности этих количеств.

Примеры.

1. a^2+2a+1.

Так как $1=1^2$ и $2a=2\cdot 1$, то $a^2+2a+1=(a+1)^2$.

2. x^4+4-4x^2.

Здесь $x^4=(x^2)^2$, $4=2^2$ и $4x^2=2x^2\cdot 2$; поэтому:

$$x^4+4-4x^2=(x^2-2)^2.$$

Можно также написать, что $x^4+4-4x^2=(2-x^2)^2$, так как двучлены x^2-2 и $2-x^2$, будучи возвышены в квадрат, дают трехчлены, отличающиеся только порядком членов:

$$(x^2-2)^2=x^4-4x^2+4; \quad (2-x^2)^2=4-4x^2+x^4.$$

3. $-x+25x^2+0{,}01$.

Здесь есть два квадрата: $25x^2=(5x)^2$ и $0{,}01=0{,}1^2$. Удвоенное произведение чисел $5x$ и $0{,}1$ составляет $2\cdot 5x\cdot 0{,}1=x$. Так как в данном трехчлене оба квадрата стоят со знаком $+$, а удвоенное произведение (т. е. x) со знаком $-$, то

$$-x+25x^2+0{,}01=25x^2-x+0{,}01=(5x-0{,}1)^2=(0{,}1-5x)^2.$$

4. $-x^2-y^2+2xy$.

Вынесем знак — за скобки: $-(x^2+y^2-2xy)$. Трехчлен, стоящий в скобках, очевидно, есть $(x-y)^2$. Значит:

$$-x^2-y^2+2xy=-(x^2+y^2-2xy)=-(x-y)^2=-(y-x)^2.$$

г) Иногда многочлен можно разложить на множители посредством соединения его членов в некоторые группы.

Например:

1. $ax+ay+bx+by=(ax+ay)+(bx+by)=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$.
2. $12-4x-3x^2+x^3=(12-4x)-(3x^2-x^3)=4(3-x)-x^2(3-x)=(3-x)(4-x^2)=(3-x)(2+x)(2-x)$.
3. $m^2+n^2-2mn-p^2=(m^2+n^2-2mn)-p^2=(m-n)^2-p^2=(m-n+p)(m-n-p)$.
4. $x^2-y^2+6y-9=x^2-(y^2-6y+9)=x^2-(y-3)^2=[x+(y-3)][x-(y-3)]=(x+y-3)(x-y+3)$.

д) Иногда бывает полезно ввести вспомогательные члены или какой-нибудь член разложить на два члена.

Например:

1. $a^3-b^3=a^3-a^2b+a^2b-b^3=a^2(a-b)+b(a^2-b^2)=a^2(a-b)+b(a+b)(a-b)=(a-b)[a^2+b(a+b)]=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
2. $a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b+b^3=a^2(a+b)-b(a^2-b^2)=(a+b)[a^2-b(a-b)]=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
3. $2x^2+3xy+y^2=2x^2+2xy+xy+y^2=2x(x+y)+y(x+y)=(x+y)(2x+y)$.

Упражнения.

102. $2a+2x$; $ax+ax$; $4-6xy$.
103. $4ax-2ay$; $6x^2y+9xy^2$.
104. $12a^2b-9a^2b^2+6ab^3$; $xy^27xy+4x^2y$.
105. m^2-n^2; a^2-1; $1-a^2$.
106. x^2-4; m^2-9; $4x^2-y^2$.
107. $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{9}y^6$; $0{,}01a^6-9$; $3a^5-48ab^8$.
108. $(x-y)^2-a^2(a+2b)^2-1$; $a^2-(b+c)^2$.
109. $(x+y)^2-(x-y)^2$; $16x^2-4(x+y)^2$.
110. $x^2-2xy+y^2$; m^2+n^2+2mn.
111. $2ab+a^2+b^2$; $a^2-4ab+4b^2$.
112. $x^2+8x+16$; x^2+1+2x.
113. $5a^3-20a^2b+20ab^2$.
114. $a+2ab+b^2-c^2$; $a^2-b^2+2bc-c^2$.
115. $ax+bx+ay+by$; $ac-ad+bd-bc$.
116. $a^2+ab-a-b$; $xz-3y-3z+xy$;
117. $4mn+xy-2nx-2my$; $8a^3-12a^2-18a+27$ (на 3 множителя).

VI. Алгебраические дроби.

67. Отличие алгебраической дроби от арифметической. Частное от деления двух алгебраических выражений в том случае, когда деление только указано, называется **алгебраической дробью.** Таковы, например, выражения:

$$\frac{a}{b},\quad \frac{a+b}{c-d},\quad \frac{2x^2-x+5}{x+2}.$$

Рассмотрим некоторые особенности алгебраических дробей.

Возьмем дробь $\frac{b}{a}$; найдем ее численную величину при $a=12$ и $b=4$, затем при $a=3$ и $b=7$ и, наконец, при $a=-20$ и $b=30$. Получим соответственно числа 3, $\frac{3}{7}$ и $-\frac{2}{3}$. Таким образом:

численная величина алгебраической дроби может быть числом целым и дробным, положительным и отрицательным.

Так как a и b могут принимать, в зависимости от условий задачи, всевозможные числовые значения, то:

числитель и знаменатель алгебраической дроби могут, каждый в отдельности, быть числом целым и дробным, положительным и отрицательным.

Таким образом понятие алгебраической дроби шире, чем арифметической. Последнюю можно рассматривать как частный случай алгебраической дроби.

68. Основное свойство дроби. Так как дробь есть частное от деления числителя на знаменатель, а частное не изменяется от умножения (или деления) делимого и делителя на одно и то же число (кроме нуля) (§ 34, г), то это же свойство принадлежит и дроби, т. е. **величина дроби не изменяется, если ее числитель и знаменатель умножим (или разделим) на одно и то же число** (кроме нуля). Например, если мы умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}}$ на $-\frac{4}{9}$, то будем иметь:

прежняя дробь

$$-\frac{2}{3}:\frac{7}{5}=-\frac{10}{21};$$

новая дробь

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right]:\left[\frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right]=\left(+\frac{8}{27}\right):\left(-\frac{28}{45}\right)=$$

$$=-\frac{8\cdot 45}{27\cdot 28}=-\frac{360}{756}=-\frac{10}{21};$$

мы видим, что величина дроби осталась прежняя.

Пользуясь этим свойством дроби, мы можем выполнять над алгебраическими дробями такие же преобразования, какие в арифметике указываются для дробей арифметических, т. е. мы можем сокращать, если возможно, дроби и приводить их, если нужно, к одному знаменателю.

69. Приведение членов дроби к целому виду. Если случится, что члены дроби сами содержат в себе дроби, то, умножая их на выбранное надлежащим образом число или на алгебраическое выражение, мы можем освободиться от этих дробей. Например:

1) $\dfrac{\frac{3}{4}a}{b}$; умножив оба члена на 4, получим $\dfrac{3a}{4b}$;

2) $\dfrac{\frac{2}{3}m}{\frac{7}{8}n}$; » » » » 24, » $\dfrac{16m}{21n}$;

3) $\dfrac{ax-1}{1-\frac{1}{x}}$; » » » » x, » $\dfrac{ax^2-x}{x-1}$.

Упражнения.

Привести члены дроби к целому виду:

118. $\dfrac{\frac{5}{7}x}{y}$; $\dfrac{0{,}3ab}{m}$; $\dfrac{a^2}{1\frac{3}{8}b}$; $\dfrac{m}{2{,}36n}$.

119. $\dfrac{\frac{3}{4}ab}{\frac{5}{6}x^2}$; $\dfrac{3\frac{1}{2}a^3}{3\frac{3}{4}b}$; $\dfrac{3x-\frac{1}{4}}{a-b}$.

120. $\dfrac{2\frac{1}{8}(a+b)}{4\frac{1}{4}}$; $\dfrac{3a-\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{6}a}$.

121. $\dfrac{ax+b+\frac{c}{x}}{ax+1}$; $\dfrac{1+\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$.

70. Перемена знаков у членов дроби. Переменить знак на противоположный перед числителем и знаменателем дроби — это все равно, что умножить их на — 1, от чего величина дроби не изменится. Так:

$$\frac{-8}{-4}=2 \text{ и } \frac{+8}{+4}=2; \quad \frac{-10}{+2}=-5 \text{ и } \frac{+10}{-2}=-5.$$

Заметим, что если переменим знак перед каким-нибудь одним членом дроби и в то же время переменим знак перед самою дробью, то величина дроби тоже не изменится; например:

$$\frac{-10}{+2}=-5; \quad -\frac{-10}{-2}=-5; \quad -\frac{+10}{+2}=-5.$$

Этими свойствами дроби можно иногда воспользоваться для некоторого ее преобразования; например:

$$\frac{m^2-n^2}{n-m}=-\frac{m^2-n^2}{-(m-n)}=-\frac{(m+n)(m-n)}{m-n}=-(m+n).$$

Упражнения.

Переменить знаки у числителя и знаменателя дробей:

122. $\dfrac{1-x}{-x}$; $\dfrac{-3a^2}{a-b}$; $\dfrac{1-a}{2-b}$.

123. $\dfrac{-a^2-b^2+2ab}{b-a}$; $\dfrac{1-m^2}{-m+1}$.

124. Не изменяя величины дробей, поставить знак — перед каждой дробью:

$$\frac{-3a}{6}; \quad \frac{5x^2}{-3}; \quad \frac{1-a}{b}; \quad \frac{a}{2-x}; \quad \frac{m^2-n^2}{n-m}.$$

71. Сокращение дробей. Алгебраическая дробь может быть приведена к более простому виду в том случае, когда числитель и знаменатель содержат общие множители.

Примеры.

$$\frac{48ab}{60ac}=\frac{4b}{5c};\qquad \frac{3a^2b}{7a^3b}=\frac{3}{7a};\qquad \frac{160a^3b^2cd^2}{120a^3b^5c}=\frac{4a^2d^2}{3b^3}.$$

Из приведенных примеров видно, что:

при сокращении дробей коэфициенты числителя и знаменателя сокращаются на их общий наибольший делитель, а общие буквенные множители сокращаются на наименьшую степень, в которой они входят в числитель и в знаменатель.

Если у дроби числитель или знаменатель (или тот и другой) — многочлены, то надо предварительно разложить эти многочлены на множители (так, как было указано в § 66); если в числе их окажутся одинаковые, то на них дробь можно сократить.

Примеры.

$$\frac{6x^2+8xy}{9xy+12y^2}=\frac{2x(3x+4y)}{3y(3x+4y)}=\frac{2x}{3y};$$

$$\frac{x^2-1}{2x+2}=\frac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)}=\frac{x-1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)$$

(вместо деления на 2 поставлено умножение на $\frac{1}{2}$).

Упражнения.

Сократить дроби:

125. $\frac{7}{7x}$; $\frac{2m}{3m^2}$; $\frac{4a^2b}{6ab^2}$; $\frac{42x^3y^2}{112x^2y^2}$.

126. $\frac{12ab}{8ax}$; $\frac{3a^2bc}{12ab^2}$; $\frac{48a^3x^2y^4}{45a^2xy}$.

127. $\frac{ab}{a^2+ab}$; $\frac{9xy}{3x^2-3xy}$; $\frac{4a+8}{4a-8}$.

128. $\frac{a^2+a}{a^2-a}$; $\frac{x-3}{x^2-9}$; $\frac{a^2+a}{a^2-1}$.

129. $\frac{x(x-1)^2}{2x^2(x-1)(x+1)}$; $\frac{ax+x^2}{3bx-cx^2}$; $\frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}$.

130. $\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2-b^2}$; $\frac{p^2-1}{(1+py)^2-(p+y)^2}$.

72. Приведение дробей к общему знаменателю. а) Возьмем дроби, у которых знаменатели — буквенные одночлены; например:

$$\frac{a}{2b};\quad \frac{c}{3ab};\quad \frac{d}{5ab^2}.$$

За общий знаменатель нужно, очевидно, взять $30ab^2$. Дополнительными множителями тогда будут: $15a$, $10b$ и 6.

$$\frac{a}{2b}\overset{15ab}{=}\frac{15a^2b}{30ab^2};\qquad \frac{c}{3ab}\overset{10b}{=}\frac{10bc}{30ab^2};\qquad \frac{d}{5ab^2}\overset{6}{=}\frac{6d}{30ab^2}.$$

Возьмем еще пример:

$$\frac{a}{12b^2c};\quad \frac{3b}{8a^3c^4d^2};\quad \frac{5c}{18ab}.$$

Общий знаменатель должен делиться на все данные знаменатели. Следовательно, наименьшим коэфициентом в общем знаменателе является общее наименьшее кратное данных коэфициентов. Буквенные сомножители должны войти в общий знаменатель в такой степени, которая делилась бы на каждую степень, которую этот множитель имеет в знаменателях. Значит, в данном примере за коэфициент общего знаменателя мы должны взять общее наименьшее кратное чисел 12, 8 и 18, т. е. 72. Множитель a должен быть взят с показателем 3; множитель b с показателем 2 и т. д. Общий знаменатель будет: $72a^3b^2c^4d^2$.

Дополнительными множителями будут: $6a^3c^3d^2$, $9b^2$ и $4a^2bc^4d^2$.

$$\frac{a}{12b^2c}=\frac{6a^4c^3d^2}{72a^3b^2c^4d^2};\quad \frac{3b}{8a^3c^4d^2}=\frac{27b^3}{72a^3b^2c^4d^2};\quad \frac{5c}{18ab}=\frac{20a^2bc^3d^2}{72a^3b^2c^4d^2}.$$

Из этих примеров видно:

чтобы найти общий знаменатель нескольких алгебраических дробей с одночленными знаменателями, надо взять общее наименьшее кратное коэфициентов знаменателей данных дробей, затем взять буквенные множители в наивысшей степени, в которой они входят в данные знаменатели; произведение всех этих множителей и будет общим знаменателем данных дробей.

б) Далее возьмем дроби, у которых знаменатели многочлены; например:

$$\frac{x}{a-c};\quad \frac{y}{a+b};\quad \frac{z}{a^2-b^2}.$$

Разложим каждый знаменатель на множители. Первые два не разлагаются, а третий равен $(a+b)(a-b)$. Значит, общим знаменателем будет a^2-b^2; получим:

$$\frac{x}{a-b}=\frac{ax+bx}{a^2-b^2};\quad \frac{y}{a+b}=\frac{ay-by}{a^2-b^2};\quad \frac{z}{a^2-b^2}.$$

в) Может случиться, что никакая пара знаменателей не имеет общих множителей. Тогда надо поступить так, как это делается в арифметике, а именно: умножить числитель и знаменатель каждой дроби на произведение знаменателей всех остальных дробей.

Например:

1. $\frac{a}{3m};\ \frac{2b}{5n};\ \frac{3c}{2p};\ \ldots\ldots \frac{a\cdot 5n\cdot 2p}{3m\cdot 5n\cdot 2p};\ \frac{2b\cdot 3m\cdot 2p}{5n\cdot 3m\cdot 2p};\ \frac{3c\cdot 3m\cdot 5n}{2p\cdot 3m\cdot 5n}$, т. е.

$$\frac{10anp}{30mnp};\quad \frac{12bmp}{30mnp};\quad \frac{45cmn}{30mnp}.$$

2. $\frac{a}{a+b};\ \frac{b}{a-b};\ \ldots\ldots \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)};\ \frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)}$, т. е.

$$\frac{a^2-ab}{a^2-b^2};\quad \frac{ab+b^2}{a^2-b^2}.$$

Упражнения. Привести дроби к одному знаменателю:

131. $\frac{3}{a}; \frac{4}{6}$; $\frac{x}{3y}; \frac{y}{4x}; \frac{x}{4}; \frac{4}{x}$.

132. $\frac{2}{a}; \frac{3}{b}; \frac{1}{2c}$; $\frac{7x}{4a^2}; \frac{2}{3b^2}; \frac{4b^2}{5x}$.

133. $\frac{5xy}{3a^2bc}; \frac{3ab}{4mx^2y}$; $\frac{x}{4ab}; \frac{y}{8a^3b^2}$.

134. $\frac{3}{8ab}; 3x; \frac{a}{5x^3}$ (представить $3x$ дробью $\frac{3x}{1}$).

135. $\frac{x+y}{2x-2y}; \frac{x-y}{3x+3y}$; $\frac{1}{m+1}; \frac{2}{m^2-1}; \frac{3}{m-1}$.

136. $\frac{2}{x^2-2x+1}; \frac{3a}{x-1}$; $\frac{1}{x-1}; \frac{2}{2x-1}; \frac{1}{(x-1)(2x-1)}$.

137. $\frac{x}{28a^3b^2}; \frac{y}{21a^2b}$; $\frac{a-b}{b}; \frac{2a}{a-b}; \frac{1}{a^2-b^2}$.

73. Сложение и вычитание дробей. По правилу деления многочлена на одночлен (§ 59) мы можем написать:

$$\frac{a+b+c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}; \quad \frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

Читая эти равенства справа налево, находим:

1. Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители и под суммою подписать тот же знаменатель.

2. Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, надо вычесть их числители и под разностью подписать тот же знаменатель.

Если данные для сложения или вычитания дроби имеют разные знаменатели, то предварительно их следует привести к одному знаменателю.

Например:

1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf+cbf+ebd}{bdf}$. (над a: df; над c: bf; над e: bd)

2. $\frac{3m^2}{10a^2bc}-\frac{5n^2}{4ab^2}=\frac{6bm^2-25acn^2}{20a^2b^2c}$. (над $3m^2$: $2b$; над $5n^2$: $5ac$)

3. $\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x^2+3}{2x^2-2}$:

$2x-2=2(x-1)$ | доп. множ. $=x+1$

$2x^2-2=2(x^2-1)=2(x+1)(x-1)$ | „ „ $=1$

Общ. знам. $2(x+1)(x-1)$.

В результате вычитания получим:

$$\frac{(x+1)^2-(x^2+3)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+2x+1-x^2-3}{2(x+1)(x-1)}=\frac{2x-2}{2(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}.$$

Упражнения.

138. $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}$; $\frac{2}{x^2}+\frac{5}{3x}$; $\frac{a-1}{2}-\frac{2x+3}{4}$.

139. $1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}$ (изобразить 1 дробью $\frac{1}{1}$).

140. $1+\frac{x-1}{2}$; $x-\frac{2(3-x)}{3}$; $1-\frac{2(x-1)}{3}$.

141. $\frac{2+x}{1+2x}-\frac{2-x}{1-2x}-\frac{1+6x}{4x^2-1}$. 142. $\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{a^2+ab}-\frac{a+b}{a^2-ab}$.

143. Во что обратится дробь $\frac{m-x}{n-1}$, если вместо x подставить $\frac{mn}{m+n}$?

74. Умножение дробей. **Чтобы умножить дробь на дробь, надо умножить числитель на числитель и знаменатель на знаменатель и первое произведение взять числителем, а второе знаменателем, т. е.**

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}. \qquad (1)$$

Это правило совпадает с правилом умножения арифметических дробей. Но так как под буквами могут подразумеваться не только целые положительные числа, но дробные и отрицательные, то необходимо проверить это правило и для дробей алгебраических, когда числа a, b, c и d будут какие угодно. Предположим сначала, что все эти числа положительные и дробные. Пусть, например:

$$a=\frac{2}{3},\quad b=\frac{7}{8},\quad c=\frac{5}{6}\quad\text{и}\quad d=\frac{9}{4}.$$

Подставим эти числа в равенство (1), вычислим отдельно его левую и его правую части и сравним результаты; получим:

$$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}:\frac{7}{8}=\frac{2\cdot 8}{3\cdot 7};\qquad \frac{c}{d}=\frac{5}{6}:\frac{9}{4}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 9};$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{2\cdot 8}{3\cdot 7}\cdot\frac{5\cdot 4}{6\cdot 9}=\frac{2\cdot 8\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 7\cdot 6\cdot 9}$$

(окончательного вычисления производить не будем).

Теперь найдем правую часть равенства (1):

$$ac=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 6};\qquad bd=\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{4}=\frac{7\cdot 9}{8\cdot 4};$$

$$\frac{ac}{bd}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 6}:\frac{7\cdot 9}{8\cdot 4}=\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 4}{3\cdot 6\cdot 7\cdot 9}.$$

Сравнивая полученные результаты, мы видим, что они одинаковы, так как (согласно переместительному закону умножения целых чисел) $2\cdot 8\cdot 5\cdot 4=2\cdot 5\cdot 8\cdot 4$ и $3\cdot 7\cdot 6\cdot 9=3\cdot 6\cdot 7\cdot 9$. Следовательно, равенство (1) остается верным и в этом случае.

Теперь допустим, что какое-нибудь из чисел a, b, c и d сделалось отрицательным. Пусть, например, $a=-\frac{2}{3}$ (b, c и d имеют прежние значения). Тогда дробь $\frac{a}{b}$ сделается отрицательной, и вся левая часть равенства (1) также будет отрицательным числом. В правой части произведение ac сделается отрицательным, и потому вся правая часть тоже будет отрицательным числом. Абсолютная же величина у левой части

и у правой части останется прежняя. Значит, равенство (1) не нарушится. Так же убедимся, что равенство (1) остается верным и тогда, когда и другие числа сделаются отрицательными.

Все то, что мы сейчас говорили о частном примере, может быть повторено о всяком другом примере; значит, равенство (1) верно при всяких значениях букв a, b, c и d.

75. Квадрат и куб дроби. Применим правило умножения дробей к возвышению их в квадрат и куб. Согласно правилу:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2};\quad \left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3}.$$

Отсюда следует:

чтобы возвысить в квадрат или куб алгебраическую дробь, надо возвысить в эту степень отдельно числитель и знаменатель.

76. Деление дробей. **Чтобы разделить дробь на дробь, надо умножить числитель первой дроби на знаменатель второй, знаменатель первой на числитель второй и первое произведение взять числителем, а второе знаменателем, т. е.**

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Что это равенство верно для всех чисел a, b, c, d, можно убедиться простою проверкою деления: умножив частное на делитель, мы получим делимое:

$$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{abc\overset{cd}{\smile}}{bcd}=\frac{a}{b}.$$

77. Замечания. 1) Так как $\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$, то правило деления можно высказать иначе:

чтобы разделить дробь на дробь, достаточно первую дробь умножить на обратную второй.

2) Всякое целое алгебраическое выражение можно рассматривать как дробь, у которой числитель есть это целое выражение, а знаменателем служит 1; например $a=\frac{a}{1}$; $3x^2=\frac{3x^2}{1}$ и т. п. Поэтому данные нами **правила действий над дробями можно применять и к таким случаям, когда какое-нибудь из данных выражений есть целое,** стоит только это целое изобразить дробью. Например:

$$a:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}.$$

Упражнения.

144. $-\frac{3x}{5a}\cdot\frac{10ab}{7x^3}$; $\frac{1-a}{5x^3}\cdot\frac{x^2}{1-a^2}$.

145. $\frac{4x^2y^2}{15n^4a^3}\cdot 45p^2q^2$; $\frac{x^2-1}{3}\cdot\frac{6a}{x+1}$.

146. $\left(a+\frac{ab}{a+b}\right)\left(b-\frac{ab}{a+b}\right)$; $\frac{3a^2b^5c^4}{4x^2y^2z^4}:\frac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^3z^2}$.

147. $\frac{12a^4b^2}{5mp}:4ab^2$; $81a^3b^2:\frac{27ab^2}{5x^2y}$.

148. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}:\frac{5a^2+5b^2}{a+b}$; $\left(x+\frac{xy}{x-y}\right):\left(x-\frac{xy}{x+y}\right)$.

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ.

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

I. Общие свойства уравнений.

78. Равенства и их свойства. Два числа или два алгебраических выражения, соединенные между собою знаком $=$, составляют *равенство*. Числа эти или выражения называются *частями* равенства; то, что стоит налево от знака $=$, составляет *левую* часть, а то, что стоит направо от этого знака, составляет *правую* часть. Например, в равенстве:

$$a+a+a=a\cdot 3$$

левая часть есть сумма $a+a+a$, а правая — произведение $a\cdot 3$.

Обозначив каждую часть равенства одною буквою, мы можем главнейшие свойства равенства выразить так:

а) Если $a=b$, то $b=a$, т. е. **части равенства можно менять местами.**

б) Если $a=b$ и $b=c$, то $a=c$, т. е., **если два числа равны порознь третьему, то они равны и между собою.**

в) Если $a=b$ и $m=n$, то $a+m=b+n$ и $a-m=b-n$, т. е., **если к равным числам прибавим или от равных чисел вычтем равные числа, то равенство не нарушится.**

г) Если $a=b$ и $m=n$, то $am=bn$ и $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$, т. е., **если равные числа умножим или разделим на равные числа, то равенство не нарушится.**

Полезно обратить внимание на то, что **умножение или деление обеих частей равенства на -1 равносильно перемене знаков перед частями равенства.** Так, если обе части равенства $-x=-5$ умножить на -1, то получим: $x=5$.

79. Тождество. Два алгебраических выражения называются *тождественными*, если при всяких численных значениях входящих в них букв они имеют одну и ту же численную величину. Таковы, например, выражения:

$$ab \text{ и } ba;\quad a+(b+c) \text{ и } a+b+c.$$

Если в каком-нибудь равенстве обе его части составляют тождественные алгебраические выражения, то такое равенство называется **тождеством.** Таково, например, равенство:

$$a+b+c=a+(b+c).$$

Тождеством называется также и такое равенство, в которое входят только числа, выраженные цифрами, если обе его части, по выполнении всех действий, указанных в них, дают одно и то же число; например:

$$(40 \cdot 5) : 8 = 5^2.$$

80. Уравнение. Положим, мы желаем решить такую задачу: отцу 40 лет, сыну 17 лет. Через сколько лет отец будет вдвое старше сына?

Обыкновенным (арифметическим) путем задачу решить трудно. Решим ее, применив буквенное обозначение. Обозначим искомое число лет буквой x. Через x лет отцу будет $40 + x$ лет, а сыну будет $17 + x$ лет. По условию задачи число лет отца, т. е. $(40 + x)$, должно быть вдвое больше числа лет сына, т. е. $(17 + x)$. Это мы можем записать в виде равенства:

$$40 + x = 2(17 + x).$$

Проверкой убеждаемся, что это равенство верно лишь при $x = 6$. В самом деле при этом значении x будет:

$$40 + 6 = 2(17 + 6); \quad 46 = 46.$$

При всяком другом числе, которое мы подставим вместо x, равенство нарушится.

Это равенство нельзя назвать тождеством, так как оно верно не при всяких значениях входящей в него буквы. Только подстановка 6 вместо x обращает это равенство в тождество:

$$46 = 46.$$

Если обе части равенства, содержащего одну или несколько букв, имеют одинаковую численную величину не при всяких численных значениях этих букв, то оно называется *уравнением*, а числа, обозначенные этими буквами, называются *неизвестными* (числами) уравнения. Эти числа обыкновенно обозначаются последними буквами латинского алфавита (x, y, z...).

Уравнения бывают с одним неизвестным, с двумя и т. д.

Решить уравнение — значит найти те значения входящих в него неизвестных, которые удовлетворяют уравнению, т. е. обращают его в тождество. Эти значения неизвестных называются *корнями* уравнения.

Уравнение с одним неизвестным может иметь один корень, два корня и более; например, уравнение $3x - 2 = 13$ имеет один корень (5), уравнение $x^2 + 2 = 3x$ имеет два корня (1 и 2), уравнение $(x - 1)(x - 2)(x + 1) = 0$ имеет три корня (1, 2 и -1)[1]) и т. п. Может даже случиться, что уравнение совсем не имеет корня. Таково, например, уравнение $x^2 = -4$; какое бы положительное или отрицательное число мы ни подставили на место x, квадрат этого числа не может равняться отрицательному числу.

Уравнение, выведенное выше из условий нашей задачи, имеет корень 6. Это и есть ответ на вопрос задачи. В самом деле, через 6 лет отцу будет 46 лет, а сыну 23 года, т. е. вдвое меньше.

---

[1]) Вспомним, что если какой-нибудь сомножитель равен нулю, то и произведение равно нулю и обратно.

Таким образом для решения некоторых задач полезно прибегать к составлению уравнений и научиться решать их; а для этого необходимо ознакомиться с некоторыми общими свойствами уравнений.

Решим для примера приведенное выше уравнение:

$$40 + x = 2(17 + x).$$

Раскроем скобки в правой части уравнения:

$$40 + x = 34 + 2x.$$

Отнимем от обеих частей уравнения по x; получим:

$$40 = 34 + x.$$

Отнимем, наконец, от обеих частей уравнения по 34. Получим:

$$6 = x \text{ и, значит, } x = 6.$$

Итак, посредством ряда преобразований нашего уравнения мы получили для x значение 6.

Примерно таким образом, как мы увидим далее, решаются и другие уравнения.

Упражнения.

149. Какие из следующих равенств можно назвать тождествами и какие — уравнениями:

$$x + y = y + x; \qquad (a - b + x)c = ac - bc + xc;$$
$$3a - 4 = 2a + 1; \qquad 8x + 1 = 5x + 7; \qquad a(bc) = abc;$$
$$2x = x + 1; \qquad (xy) : y = x; \qquad a : 2b = \frac{a}{2} : b?$$

81. Равносильные уравнения. Два уравнения называются равносильными, если все корни одного уравнения служат корнями другого уравнения, и обратно, все корни этого другого уравнения служат корнями первого уравнения. Например, два уравнения:

$$x^2 + 2 = 3x \quad \text{и} \quad 3x - 2 = x^2$$

равносильны, так как у них одни и те же корни, именно 1 и 2; уравнения же

$$7x = 14 \quad \text{и} \quad x^2 + 2 = 3x$$

не равносильны, так как первое имеет только один корень 2, тогда как второе, кроме этого корня, имеет еще другой корень 1.

Когда, решая какое-нибудь уравнение, мы совершаем над ним некоторые преобразования, то этими преобразованиями мы заменяем данное уравнение последовательно другими, более простыми, до тех пор, пока не получим уравнения самого простого вида: $x = a$; тогда мы говорим, что это число a и есть корень данного уравнения. Но утверждать это безошибочно мы можем только тогда, когда у нас есть уверенность, что все уравнения, полученные при преобразованиях, равносильны данному уравнению.

Преобразования, которые нам приходится совершать над уравнениями, основаны на двух свойствах уравнения, которые мы сейчас рассмотрим.

82. Первое свойство уравнений. Возьмем какое-нибудь уравнение, например, такое:

$$x^2+2=3x. \qquad (1)$$

Положим, что к обеим частям этого уравнения мы прибавили какое-нибудь одно и то же число m (положительное, отрицательное или нуль); тогда мы получим новое уравнение:

$$x^2+2+m=3x+m. \qquad (2)$$

Докажем, что это уравнение равносильно данному. Для этого достаточно убедиться, во-первых, в том, что всякий корень уравнения (1) удовлетворяет и уравнению (2); и во-вторых, обратно, в том, что всякий корень уравнения (2) удовлетворяет и уравнению (1).

а) Пусть уравнение (1) имеет какой-нибудь корень, например, $x=1$. Это значит, что когда в это уравнение на место x подставим 1, то выражение x^2+2 сделается равным выражению $3x$ (каждое из этих выражений обратится в число 3). Но тогда при $x=1$ суммы x^2+2+m и $3x+m$ сделаются равными, так как если к равным числам (3 и 3) прибавим одно и то же число (m), то и получим равные числа ($3+m$ и $3+m$). Значит, корень $x=1$ должен быть также корнем уравнения (2). Если уравнение (1) имеет еще какой-нибудь корень, то о нем можно сказать то же самое, что сейчас мы говорили о корне $x=1$, т. е. что он удовлетворяет и уравнению (2). Таким образом, каждый корень уравнения (1) принадлежит и уравнению (2).

б) Допустим, что уравнение (2) имеет какой-нибудь корень, например, $x=2$. Это значит, что если в это уравнение на место x подставим 2, то выражение x^2+2+m сделается равным выражению $3x+m$ (именно, каждое из этих выражений обратится в число $6+m$). Но тогда при $x=2$ и выражения x^2+2 и $3x$ сделаются равными, так как если от равных чисел ($6+m$ и $6+m$) отнимем одно и то же число (m), то и получим равные числа. Значит, $x=2$ есть также корень и уравнения (1). Если бы уравнение (2) имело еще какой-нибудь корень, то о нем можно было бы повторить то же самое, что мы сейчас сказали о корне $x=2$, т. е. что и этот другой корень должен удовлетворять уравнению (1).

Значит, всякий корень уравнения (2) должен быть и корнем уравнения (1).

Если же корни уравнений (1) и (2) одни и те же, то уравнения эти равносильны. Свойство это относится и к вычитанию из частей уравнения одного и того же числа, так как вычитание какого-нибудь числа равносильно прибавлению этого числа с противоположным знаком.

Таким образом, если к обеим частям уравнения прибавим или от них вычтем одно и то же число, то получим новое уравнение, равносильное первому.

83. Следствия. Из этого свойства можно вывести следующие следствия, которыми часто приходится пользоваться при решении уравнений:

1. Члены уравнения можно переносить из одной его части в другую, переменив перед такими членами знаки на обратные. Например, прибавив к обеим частям уравнения

$$8+x^2=7x-2$$

по 2, получим:

$$8 + x^2 + 2 = 7x.$$

Член -2 из правой части перешел в левую с обратным знаком $+$. Вычтя из последнего уравнения по x^2, получим:

$$8 + 2 = 7x - x^2.$$

Член $+x^2$ перешел из левой части в правую с обратным знаком.

2. Если два одинаковые члена с одинаковыми знаками стоят в разных частях уравнения, то такие члены можно уничтожить. Например, если дано уравнение

$$6x + 3 = x^2 + 3,$$

то, отняв от обеих частей этого уравнения по 3, получим:

$$6x = x^2.$$

84. Второе свойство уравнений. Возьмем то же самое уравнение

$$x^2 + 2 = 3x \qquad (1)$$

и умножим обе его части на какое-нибудь число m, положительное или отрицательное (только не на нуль). Тогда получим новое уравнение:

$$(x^2 + 2)\,m = 3xm. \qquad (2)$$

Чтобы обнаружить равносильность этих двух уравнений, будем рассуждать совершенно так же, как мы рассуждали относительно первого свойства, а именно: покажем, во-первых, что всякий корень уравнения (1) удовлетворяет уравнению (2), и, во-вторых, обратно: всякий корень уравнения (2) удовлетворяет уравнению (1).

а) Пусть уравнение (1) имеет какой-нибудь корень, например, $x = 1$. Это значит, что когда в это уравнение на место x подставим 1, то выражение $x^2 + 2$ сделается равным выражению $3x$ (каждое из этих выражений обратится в число 3). Но тогда при $x = 1$ и произведения $(x^2 + 2)\,m$ и $3xm$ сделаются равными, так как если равные числа (3 и 3) умножим на одно и то же число (m), то и получим равные числа ($3m$ и $3m$). Значит, корень $x = 1$ должен быть также и корнем уравнения (2). Так как все это можно повторить о всяком ином корне уравнения (1), то заключаем, что всякий корень уравнения (1) принадлежит и уравнению (2).

б) Обратно, пусть уравнение (2) имеет какой-нибудь корень, например, $x = 2$. Это значит, что если в это уравнение на место x подставим 2, то произведения $(x^2 + 2)\,m$ и $3xm$ сделаются равными (каждое из них обратится в число $6m$). Но тогда при $x = 2$ и выражения $x^2 + 2$ и $3x$ сделаются равными, так как если равные числа ($6m$ и $6m$) разделим на одно и то же число m, не равное нулю, то и получим равные числа. Значит, корень $x = 2$, как и всякий другой корень уравнения (2), есть также и корень уравнения (1); поэтому уравнения эти равносильны.

Предположим теперь, что число m, на которое мы умножали обе части уравнения, равно нулю. Например, умножим на нуль части уравнения $x^2 + 2 = 3x$, которое имеет два корня: 1 и 2; мы получим тогда новое уравнение:

$$(x^2 + 2) \cdot 0 = 3x \cdot 0.$$

Уравнению этому удовлетворяют не только 1 и 2, но и всякое произвольное значение x. Так, подставляя на место x числа 5, 6 и т. д., получим:

$$(5^2+2)\cdot 0=3\cdot 5\cdot 0;\quad (6^2+2)\cdot 0=3\cdot 6\cdot 0,$$

т. е.

$$27\cdot 0=15\cdot 0;\quad 38\cdot 0=18\cdot 0,$$

или

$$0=0;\quad 0=0$$

(так как произведение всякого числа на нуль есть нуль). Значит, от умножения на нуль равносильность уравнений нарушается.

Таким образом, **если обе части уравнения мы умножим или разделим на одно и то же число, не равное нулю, то получим новое уравнение, равносильное первому.**

85. Следствия. Из второго свойства уравнений можно вывести следующие три следствия:

1. Если все члены уравнения имеют общий множитель, не равный нулю и не содержащий неизвестных, то все члены уравнения можно на него разделить. Например:

$$60x-160=340-40x.$$

Разделив все члены на 20, получим уравнение более простое:

$$3x-8=17-2x.$$

2. Уравнение можно освободить от дробных членов. Например:

$$\frac{7x-3}{6}-\frac{x-5}{4}=\frac{43}{6}.$$

Приведем все члены к общему знаменателю:

$$\frac{14x-6}{12}-\frac{3x-15}{12}=\frac{86}{12},\quad \text{или:}\quad \frac{14x-6-(3x-15)}{12}=\frac{86}{12}.$$

Отбросив общего знаменателя, мы тем самым умножим обе части уравнения на одно и то же, не равное нулю, число (на 12); от этого получим уравнение, равносильное с данным:

$$14x-6-(3x-15)=86,\quad \text{или:}\quad 14x-6-3x+15=86.$$

3. Перед всеми членами уравнения можно переменить знаки на противоположные, потому что это все равно, что умножить обе части уравнения на -1. Например, произведя такое умножение частей уравнения $-8-x^2=-7+2$, получим: $8+x^2=7-2$.

86. Умножение или деление частей уравнения на одно и то же алгебраическое выражение. Иногда приходится для преобразования данного уравнения умножить (или разделить) обе его части на одно и то же алгебраическое выражение (в следующем параграфе мы увидим этому пример). Полученное после умножения новое уравнение лишь тогда окажется равносильным данному, когда алгебраическое выражение, на которое мы умножим (или разделим) обе части данного уравнения, **не равно нулю,** так как от умножения на нуль равносильность уравнений нарушается.

87. Посторонние корни. Умножать обе части уравнения на одно и то же алгебраическое выражение приходится тогда, когда мы решаем уравнение, содержащее дроби, в знаменатели которых входит неизвестное. Пусть, например, надо решить уравнение:

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2}. \qquad (1)$$

Общий знаменатель всех дробей есть, очевидно, $(x-2)^2$. Приведя все члены к этому знаменателю:

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{x-2}{(x-2)^2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2},$$

отбросим его, т. е., другими словами, умножим все члены на $(x-2)^2$:

$$x^2+2=x-2+2x+2,$$

т. е.

$$x^2+2=3x.$$

Уравнение это имеет два корня: 1 и 2. Но мы не можем ручаться за то, что оба эти корня годны и для первоначального уравнения, так как обе части этого уравнения нам пришлось умножить на выражение $(x-2)^2$, которое при $x=2$ обращается в нуль, а при умножении на нуль равносильность уравнений может нарушиться.

Остается испытать найденные корни 1 и 2 с целью определить, годны ли они не только для уравнения (2), но и для уравнения (1). Корень $x=1$ удовлетворяет уравнению (1):

$$\frac{1^2}{(1-2)^2}+\frac{2}{(1-2)^2}=\frac{1}{1-2}+\frac{2\cdot 1+2}{(1-2)^2},$$

$$\frac{1}{(-1)^2}+\frac{2}{(-1)^2}=\frac{1}{-1}+\frac{2+2}{(-1)^2},$$

$$1+2=-1+4, \quad \text{т. е.} \quad 3=3.$$

Но другой корень, $x=2$, для уравнения (1) не годится, так как при $x=2$ оно принимает невозможный вид:

$$\frac{4}{0}+\frac{2}{0}=\frac{1}{0}+\frac{6}{0}$$

(деление на нуль невозможно).

Мы видим, таким образом, что если в данном уравнении имеются дроби, знаменатели которых содержат неизвестное, и мы освободились от этих знаменателей, умножив обе части уравнения на общий знаменатель, то, найдя корни полученного уравнения, мы должны еще подстановкой испытать их, с целью определить, нет ли среди корней посторонних.

Обратно, разделив обе части уравнения на алгебраическое выражение, содержащее неизвестное, мы можем потерять некоторые корни.

Например, разделив обе части уравнения:

$$(2x+3)(x-3)=(3x-1)(x-3)$$

на $x-3$, получим новое уравнение:

$$2x+3=3x-1,$$

которое не будет равносильно данному, так как имеет лишь один корень $x=4$, тогда как первое имеет два корня: $x=4$ и $x=3$.

II. Уравнение с одним неизвестным.

88. Решение уравнений первой степени с одним неизвестным. На следующих двух примерах покажем способ решения уравнений первой степени с одним неизвестным.

1. Решить уравнение:

$$3x+2(4x-3)=5(x+2)-4.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$3x+8x-6=5x+10-4.$$

Перенесем члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а известные члены в правую (см. следствие первого свойства уравнений):

$$3x+8x-5x=10-4+6.$$

Сделаем приведение подобных членов:

$$6x=12.$$

Наконец, делим обе части уравнения на 6 (на основании второго свойства уравнений). Получаем окончательно:

$$x=2.$$

Чтобы убедиться, не совершили ли мы какой-либо ошибки при решении уравнения, надо произвести проверку решения. Для этого подставим найденный корень в данное уравнение вместо x, произведем указанные в уравнении действия, и если уравнение превратится в тождество, то корень найден правильно. В нашем случае получим:

$$3\cdot 2+2(4\cdot 2-3)=5(2+2)-4,$$

или

$$16=16.$$

Значит, решение правильно.

2. Решить уравнение:

$$\frac{3x-4}{2}+\frac{3x+2}{5}-x=\frac{7x-6}{6}-1.$$

Приводим все члены к общему знаменателю, который равен 30.

$$\frac{15(3x-4)}{30}+\frac{6(3x+2)}{30}=\frac{30x}{30}-\frac{5(7x-6)}{30}-\frac{30}{30}.$$

Умножаем все члены уравнения на 30 (или, что то же, отбрасываем общий знаменатель):

$$15(3x-4)+6(3x+2)-30x=5(7x-6)-30.$$

Раскрываем скобки:

$$45x-60+18x+12-30x=35x-30-30.$$

Переносим члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а известные члены в правую:

$$45x + 18x - 30x - 35x = 60 - 12 - 30 - 30.$$

Приводим подобные члены:

$$-2x = -12.$$

Делим обе части на коэфициент при неизвестном (можно было предварительно умножить обе части на -1, чтобы сделать их положительными):

$$x = \frac{-12}{-2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Производим поверку:

$$\frac{3\cdot 6-4}{2} + \frac{3\cdot 6+2}{5} - 6 = \frac{7\cdot 6-6}{5} - 1; \quad 7+4-6 = 6-1; \quad 5 = 5.$$

Из приведенных примеров находим, что для решения уравнения первой степени с одним неизвестным надо:

1. **Освободить уравнение от дробных членов (привести к целому виду).**

2. **Раскрыть скобки.**

3. **Перенести члены, содержащие неизвестное, в одну часть, а известные члены — в другую.**

4. **Сделать приведение подобных членов.**

5. **Разделить обе части уравнения на коэфициент при неизвестном.**

Далее надо произвести поверку правильности найденного решения путем подстановки его в первоначальное уравнение.

Понятно, что в зависимости от вида уравнения не всегда приходится производить все пять указанных операций.

Замечание. После произведения над уравнением первых четырех операций у нас остается в каждой части по одному члену: в правой — член, содержащий неизвестное, в левой — известный член. В общем виде это уравнение может быть представлено в такой форме:

$$ax = b,$$

где a и b могут быть числами положительными, отрицательными или даже равными нулю. Уравнение такого вида называется нормальным видом уравнения первой степени с одним неизвестным.

Упражнения.

Решить следующие уравнения:

150. $2x + 1 = 35$; $19 = 4 + 3y$; $7y - 11 = 24$.

151. $3x + 23 = 104$; $89 = 11y - 10$; $38 = 2 + 3x$.

152. $3x = 15 - 2x$; $4x - 3 = 9 - 2x$; $5x + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{2}$.

153. $2{,}5x - 0{,}86 = 4 + 0{,}7x$; $29 + 2x = (x-7)\cdot 3$.

154. $x - 7 = \frac{3x+13}{20}$; $-x = 3$; $-2x = 8$.

155. $\frac{2x+1}{2} = \frac{7x+5}{8}$; $x + \frac{11-x}{3} = \frac{20-x}{2}$.

156. $x+\frac{3x-9}{5}=11-\frac{15x-12}{3}$.

157. $3x-4-\frac{4(7x-9)}{15}=\frac{4}{5}\left(6+\frac{x-1}{3}\right)$.

158. $2x-\frac{19-2x}{2}=\frac{2x-11}{2}$.

159. $\frac{x-1}{7}+\frac{23-x}{5}=2-\frac{4+x}{4}$.

89. Понятие о составлении уравнений. С помощью уравнений можно сравнительно легко решать такие задачи, которые решить арифметическим путем затруднительно или даже невозможно. Вся трудность заключается в том, как составить такое уравнение, решение которого дало бы искомый ответ. Общего способа составления уравнений указать нельзя, так как условия задач могут быть очень разнообразны. Можно лишь указать на некоторые общие приемы при составлении уравнений по данным задачи. Вообще же навыки в этом отношении дает только практика.

Покажем на примере общие приемы составления уравнений.

Задача. Школа закупила толстых и тонких тетрадей всего 80 штук. Толстая тетрадь стоит 35 коп., тонкая 4 коп. Сколько было куплено тех и других, если уплачено 9 руб. 40 коп.?

1. Определяем, какую из неизвестных величин обозначить через x.

В нашей задаче два неизвестных: число толстых тетрадей и число тонких. Обозначим через x, например, число толстых тетрадей. Так как всех тетрадей 80, то тонких будет $80-x$.

Число толстых тетрадей x
„ тонких „ $80-x$.

2. Выражаем математически при помощи x и данных к задаче чисел все условия задачи.

В нашей задаче сказано, что толстая тетрадь стоит 35 коп., а тонкая 4 коп. Следовательно, мы можем задать вопрос, сколько стоили все купленные толстые и тонкие тетради (такой вопрос мы ставим потому, что в задаче дана стоимость всех тетрадей).

Стоимость толстых тетрадей $35x$ коп.
„ тонких „ $4(80-x)$ коп.
Общая стоимость тетрадей 9 руб. 40 коп.

3. Составляем уравнение.

Так как в задаче сказано, что общая стоимость тетрадей равна 9 руб. 40 коп., то сумма стоимости толстых тетрадей $35x$ и тонких $4(80-x)$ должна дать как раз 9 руб. 40 коп.

$$35x+4(80-x)=940.$$

Решив это уравнение, получим для x число 20.

Мы через x обозначили число толстых тетрадей. Следовательно, толстых тетрадей было куплено 20, а тонких

$$80-20=60 \text{ тетрадей.}$$

Заметим, что обычно в задаче бывает ровно столько данных, сколько их требуется для составления уравнения. Поэтому, составив уравнение, полезно посмотреть, были ли использованы все данные задачи, т. е. все ли данные в задаче числа в той или иной форме вошли в уравнение.

Упражнения.

160. Сумма двух чисел равна 2548; найти эти числа, если известно, что одно из них меньше другого на 148.

161. Сумма трех слагаемых равна 100; второе слагаемое больше первого на 10, а третье слагаемое больше второго на 20. Найти эти слагаемые.

162. Всадник догоняет пешехода, находящегося впереди его на 15 *км*. Через сколько часов всадник догонит пешехода, если каждый час первый проезжает по 10 *км*, а второй проходит только по 4 *км*?

163. Из двух сортов чаю составлена смесь в 32 *кг*. Килограмм первого сорта стоит 8 руб., а второго сорта 6 руб. 50 коп. Сколько килограммов взято того и другого сорта, если килограмм смеси стоит (без прибыли и убытка) 7 руб. 10 коп.?

164. Велосипедист проехал некоторое расстояние со скоростью 8 *км* в час. Возвратиться он должен был другой дорогой, которая была на 3 *км* длиннее первой, и хотя он, возвращаясь, ехал со скоростью 9 *км* в час, он употребил времени на возвращение более $7\frac{1}{2}$ минут. Как длинны были обе дороги?

90. Буквенные уравнения. Нет надобности, чтобы неизвестное всегда обозначалось буквою x: оно может быть обозначено и какою угодно другою буквою. Возьмем, например, формулу:

$$s = \frac{1}{2} bh,$$

выражающую площадь s треугольника, у которого основание равно b линейных единиц и высота равна h таких же единиц. Формула эта представляет собой уравнение, в котором каждое из чисел s, b и h может быть принято за неизвестное. Пусть, например, предложена такая задача: найти основание треугольника, у которого высота равна h каких-нибудь линейных единиц, а площадь составляет s соответствующих квадратных единиц. Тогда в нашей формуле число b должно считаться неизвестным, а числа s и h известными. Конечно, мы можем неизвестное основание обозначить буквою x и написать уравнение так:

$$s = \frac{1}{2} hx,$$

откуда

$$x = s : \frac{1}{2} h = 2s : h = \frac{2s}{h}.$$

Но можно, не заменяя b на x, прямо из уравнения $s = \frac{1}{2} bh$ определить b в зависимости от s и h:

$$s = \frac{1}{2} bh; \quad 2s = bh; \quad b = \frac{2s}{h}.$$

Вообще надо привыкнуть решать не только **численные** уравнения, в которых данные числа выражены цифрами, а неизвестное обозначено буквой x, но и **буквенные** уравнения, в которых данные числа и неизвестное обозначены какими угодно буквами.

Примеры.

1. $a + bx = c$;

$bx = c - a$;

$x = \frac{c-a}{b}$.

2. $a(x - c) = b(x + d)$;

$ax - ac = bx + bd$;

$ax - bx = bd + ac$;

$x(a - b) = bd + ac$;

$x = \frac{bd + ac}{a - b}$.

3. $\frac{y}{a} - y = b$;

$y - ay = ab$;

$y(1 - a) = ab$;

$y = \frac{ab}{1-a}$.

4. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$;

$bx + ax = ab$;

$x(b + a) = ab$;

$x = \frac{ab}{a+b}$.

Упражнения.

165. $(a + x)(b + x) = (a - x)(b - x)$.

166. $(x - a)(x + b) + c = (x + a)(x - b)$.

167. Из уравнения: $a + bx = 4 - 3(a - x)$ найти x, в зависимости от a и b.

168. Площадь q трапеции, у которой основания равны b_1 и b_2, а высота h, определяется по формуле: $q = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$. Найти отсюда h в зависимости от q, b_1 и b_2.

III. Системы уравнений первой степени.

Система двух уравнений с двумя неизвестными.

91. Задача. Из опыта найдено, что слиток из серебра и меди весом в 148 *кг* теряет в воде весу $14\frac{2}{3}$ *кг*. Определить, сколько в нем серебра и сколько меди, если известно, что в воде 21 *кг* серебра теряют 2 *кг*, а 9 *кг* меди теряют 1 *кг*.

Положим, что в данном слитке содержится серебра x *кг*, а меди y *кг*. Тогда одно уравнение будет:

$$x + y = 148.$$

Для составления другого уравнения примем во внимание, что если 21 *кг* серебра теряют в воде 2 *кг* весу, то это значит, что 1 *кг* серебра теряет в воде $\frac{2}{21}$ *кг*. Тогда x *кг* должны терять в воде $\frac{2}{21}x$ *кг* весу. Подобно этому, если 9 *кг* меди теряют в воде 1 *кг*, то это значит, что 1 *кг* меди теряет $\frac{1}{9}$ *кг*; следовательно, y *кг* меди теряют $\frac{1}{9}y$ *кг*. Поэтому второе уравнение будет:

$$\frac{2}{21}x + \frac{1}{9}y = 14\frac{2}{3}.$$

Мы получили, таким образом, два уравнения с двумя неизвестными:

$$x + y = 148 \quad \text{и} \quad \frac{2}{21}x + \frac{1}{9}y = 14\frac{2}{3} = \frac{44}{3}.$$

Второе уравнение можно упростить, освободив его от дробей. Для этого приведем все дроби к одному знаменателю:

$$\frac{6}{63}x+\frac{7}{63}y=\frac{924}{63}.$$

Теперь умножим обе части уравнения на 63, после чего получим равносильное уравнение:

$$6x+7y=924.$$

Мы имеем теперь два уравнения:

$$x+y=148 \text{ и } 6x+7y=924.$$

Мы можем решить эти два уравнения несколькими способами. Например, из первого уравнения определим x в зависимости от y:

$$x=148-y.$$

Так как во втором уравнении буквы x и y означают те же числа, что и в первом уравнении, то мы можем во второе уравнение подставить вместо x разность $148-y$:

$$6(148-y)+7y=924.$$

Решим это уравнение с одним неизвестным:

$$888-6y+7y=924; \quad y=924-888=36.$$

Тогда

$$x=148-36=112.$$

Таким образом в данном слитке содержится 112 *кг* серебра и 36 *кг* меди.

92. Нормальный вид уравнения первой степени с двумя неизвестными. Возьмем такой пример уравнения с двумя неизвестными:

$$2(2x+3y-5)=\frac{5}{8}(x+3)+\frac{3}{4}(y-4).$$

С целью упростить это уравнение сделаем в нем тот же ряд преобразований, какой был указан раньше с одним неизвестным, а именно:

1. Раскроем скобки:

$$4x+6y-10=\frac{5}{8}x+\frac{15}{8}+\frac{3}{4}y-3.$$

2. Освободимся от знаменателей, умножив все члены на 8:

$$32x+48y-80=5x+15+6y-24.$$

3. Перенесем неизвестные члены в одну часть уравнения, а известные в другую:

$$32x+48y-5x-6y=15-24+80.$$

4. Сделаем приведение подобных членов:

$$27x+42y=71.$$

Таким образом, данное уравнение после указанных преобразований оказывается такого вида, при котором в левой части уравнения находятся только два члена: один с неизвестным x (в первой степени) и другой с неизвестным y (в первой степени), правая же часть уравнения

состоит только из одного члена, не содержащего неизвестных. Коэфициенты при x и y могут быть или оба положительные (как во взятом нами примере), или оба отрицательные (этот случай, впрочем, можно свести на предыдущий, умножив все члены уравнения на -1), или один положительный, а другой отрицательный; член, стоящий в правой части, может быть или положительным числом (как в настоящем примере), или отрицательным и даже нулем. Обозначив коэфициенты при x и y буквами a и b и член, не содержащий неизвестных, буквою c, мы можем уравнение с двумя неизвестными первой степени в общем виде представить так:

$$ax + by = c.$$

Такой вид уравнения называется *нормальным* видом уравнения первой степени с двумя неизвестными.

93. Неопределенность одного уравнения с двумя неизвестными. Одно уравнение с двумя неизвестными имеет бесчисленное множество корней. Действительно, если для одного какого-нибудь неизвестного мы назначим произвольное число и это число подставим в уравнение, то тогда мы получим уравнение с одним вторым неизвестным, которое и можно найти из этого уравнения. Назначив для первого неизвестного какое-нибудь другое число, мы тем же путем получим для второго неизвестного новое число и т. д. Таким образом, мы можем получить сколько угодно пар решений.

Пусть, например, нам дана такая задача: найти стороны равнобедренного треугольника, которого периметр равен 40 *м*. Обозначив длину основания этого треугольника буквою x и длину каждой из его боковых сторон буквой y, мы можем написать уравнение: $x + 2y = 40$.

Назначим для x какое-нибудь произвольное число, например, 10. Тогда найдем: $10 + 2y = 40$, $2y = 30$, $y = 15$. Значит, если основание треугольника будет 10 *м*, то каждая боковая сторона его должна быть по 15 *м*. Теперь назначим для x какое-нибудь другое число, например, 8. Тогда $2y = 32$ и $y = 16$. Таким образом, мы можем найти сколько угодно решений и, следовательно, уравнение и задача оказываются неопределенными.

94. Система уравнений. Принято говорить, что несколько уравнений образуют систему, если во всех этих уравнениях каждая из букв x, y, ... означает одно и то же число для всех уравнений. Если, например, два уравнения

$$\begin{cases} 2x - 5 = 3y - 2 \\ 8x - y = 2y + 21 \end{cases}$$

рассматриваются при том условии, что буква x означает одно и то же число в обоих уравнениях, равным образом и буква y, то такие уравнения образуют систему. Это бывает всякий раз в том случае, когда уравнения составлены из условий одной и той же задачи.

Укажем два способа решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

95. Способ подстановки. Этот способ мы уже применяли раньше, когда решали задачу о слитке из серебра и меди.

Возьмем теперь более сложный пример:

$$8x - 5y = -16; \qquad 10x + 3y = 17.$$

(Оба уравнения мы привели к нормальному виду.)

Из одного уравнения, например из первого, определим одно какое-нибудь неизвестное, например y, в зависимости от другого неизвестного:

$$y = \frac{8x + 16}{5}.^{1})$$

Так как второе уравнение должно удовлетворяться теми же значениями, как и первое, то мы можем подставить в него вместо y найденное выражение, отчего получим уравнение с одним неизвестным x:

$$10x + 3 \cdot \frac{8x + 16}{5} = 17.$$

Решим это уравнение:

$$10x + \frac{24x + 48}{5} = 17; \qquad 50x + 24x + 48 = 85; \qquad x = \frac{1}{2}.$$

Тогда:

$$y = \frac{8x + 16}{5} = \frac{4 + 16}{5} = 4.$$

Мы могли бы определить из одного уравнения неизвестное x в зависимости от y и полученное выражение подставить на место x в другое уравнение; тогда мы получили бы уравнение с неизвестным y.

Способ этот особенно удобен тогда, когда коэфициент при каком-нибудь неизвестном равен 1. Тогда всего лучше определить это неизвестное в зависимости от другого неизвестного (не придется делить на коэфициент). Например:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x + y = 22. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим: $y = 22 - 4x$.

Тогда первое уравнение дает:

$$3x - 2(22 - 4x) = 11; \qquad 3x - 44 + 8x = 11; \qquad 11x = 44 + 11 = 55;$$

$$x = \frac{55}{11} = 5; \qquad y = 22 - 4 \cdot 5 = 2.$$

Правило. **Чтобы решить систему двух уравнений с двумя неизвестными способом подстановки, надо определить из какого-нибудь уравнения одно неизвестное в зависимости от другого неизвестного и полученное выражение подставить в другое уравнение; от этого получается уравнение с одним неизвестным. Решив его, находят это неизвестное. Подставив найденное число в выражение, выведенное раньше для первого неизвестного, находят и это другое неизвестное.**

96. Способ алгебраического сложения. Предположим сначала, что в данной системе уравнений (приведенных предварительно к нормальному виду) коэфициенты при каком-нибудь неизвестном, например, при y, будут одинаковы. Пусть, например, нам дана система:

$$\begin{cases} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33, \end{cases}$$

в которой перед неизвестным y коэфициенты численно одинаковы и имеют противоположные знаки. Мы знаем, что если к равным числам прибавим

[1]) Для вывода этой формулы мы перенесли член $-5y$ направо, а член -16 налево, затем разделили обе части уравнения на 5 и поменяли местами части уравнения. Надо привыкнуть эти преобразования делать в уме.

вим (или от них вычтем) равные числа, то и получим равные числа. Поэтому, если мы сложим (или вычтем) левые части данных уравнений между собою и правые части между собою, то знак $=$ не нарушится (это выражают короче так: уравнения можно почленно складывать или вычитать).

Заметив это, сложим данные уравнения; тогда члены $-2y$ и $+2y$ взаимно уничтожатся, и мы получим одно уравнение с неизвестным x:

$$\begin{array}{r} 7x-2y=27 \\ 5x+2y=33 \\ \hline 12x\qquad =60, \end{array}$$ откуда $x=5$.

Подставив в одно из данных уравнений вместо x найденное для него число 5, получим уравнение, из которого найдем y:

$$7\cdot 5-2y=27;\quad 35-2y=27;\quad 35-27=2y;\quad 8=2y;\quad y=4.$$

Если бы в уравнениях перед исключаемым неизвестным были одинаковы и коэфициенты и знаки, то, переменив перед всеми членами одного какого-нибудь уравнения знаки на противоположные, мы привели бы этот случай к только что рассмотренному. Так, если дана система

$$\begin{cases} 3x-5y=8 \\ 3x+7y=32, \end{cases}$$

в которой перед неизвестным x в обоих уравнениях одинаковы и коэфициенты и знаки, то мы переменим, положим, в первом уравнении знаки на противоположные (другими словами, умножим обе части уравнения на -1) и затем сложим уравнения[1]):

$$\begin{array}{r} -3x+5y=-\ 8 \\ 3x+7y=\ \ 32 \\ \hline 12y=\ \ 24; \end{array}\qquad y=2;$$

$$3x+7\cdot 2=32;\quad 3x=32-14=18;\quad x=6.$$

Возьмем теперь систему, в которой коэфициенты различны, например такую:

$$\begin{cases} 7x+6y=29 \\ -5x+8y=10. \end{cases}$$

Мы можем тогда предварительно **уравнять коэфициенты** при каком-нибудь одном неизвестном, например, при x. Для этого найдем кратное (лучше всего наименьшее) коэфициентов 7 и 5 (это будет 35) и умножим обе части каждого уравнения на соответствующий дополнительный множитель (как это делается при приведении дробей к общему знаменателю):

$$\begin{cases} 7x+6y=29 & (\text{на } 5) \\ -5x+8y=10 & (\text{на } 7) \end{cases}\qquad \begin{cases} 35x+30y=145 \\ -35x+56y=\ 70, \end{cases}$$

и тогда этот случай приведется к предыдущему.

---

[1]) Конечно, переменить знаки перед всеми членами уравнения на противоположные и затем сложить его с другим уравнением, — это все равно, что вычесть его почленно из этого другого уравнения.

Правило. Чтобы решить систему двух уравнений с двумя неизвестными способом алгебраического сложения, сначала уравнивают в данных уравнениях коэфициенты перед одним из двух неизвестных, и в том случае, когда перед этим неизвестным знаки в уравнениях даны одинаковыми, переменяют в одном из уравнений знаки на противоположные. Сложив затем уравнения, получают одно уравнение с одним неизвестным, которое и определяют из этого уравнения. Подставив найденное число в одно из данных уравнений, находят затем и другое неизвестное.

97. Система уравнений с буквенными коэфициентами. Иногда приходится решать такую систему уравнений, в которой коэфициенты выражены буквами. Пусть, например, требуется решить систему:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Мы можем решить эту систему любым из двух способов, указанных нами для системы с числовыми коэфициентами. Всего проще в данном случае применить способ алгебраического сложения, т. е. поступить так: переменить в одном из уравнений знаки на противоположные, уравнять коэфициенты перед одним неизвестным, например, перед y, и сложить оба уравнения:

$$\begin{array}{rr|c|l} ax + by = & c & b' & ab'x + bb'y = b'c \\ -a'x - b'y = & -c' & b & -a'bx - bb'y = -c'b \\ \hline & & & (ab' - a'b)x = b'c - c'b, \end{array}$$

откуда находим:

$$x = \frac{bc' - c'b}{ab' - a'b}.$$

Подобным же образом найдем y:

$$\begin{array}{rr|c|l} ax + by = & c & a' & aa'x + a'by = a'c \\ -a'x - b'y = & -c' & a & -aa'x - ab'y = -ac' \\ \hline & & & (a'b - ab')y = a'c - ac', \end{array}$$

откуда:

$$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}.$$

Упражнения.

169. Решить способом подстановки следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + y = 3 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ x + 4y = -15 \end{cases}$$

170. Следующие системы решить способом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} 4x + 7x = 5 \\ -2x + 5y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 5y = 20 \\ 2x - 10y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - 8y = 19 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$$

171. Решить следующие уравнения каким-нибудь способом:

$$\begin{cases} (2x - 1)(y + 2) = (x - 2)(2y + 5) \\ 5x - 2 = 2y + 15 \end{cases}$$

172. $\begin{cases} ax + by = c \\ y = mx \end{cases} \qquad \begin{cases} x + a = my \\ y + b = nx \end{cases}$

173. Найти значения a и b в двучлене $y=ax+b$ при условии, что $y=-11$, если $x=-2$, и $y=1$, если $x=2$.

174. Куплено 8 *кг* одного товара и 19 *кг* другого и за все заплачено 16 руб. 40 коп.; в другой раз по тем же ценам куплено 20 *кг* первого товара и 16 *кг* второго и заплачено за все 28 руб. 40 коп. Узнать цену килограмма каждого товара.

175. Трест приобрел для продажи 65 велосипедов, обыкновенных и моторных. За обыкновенные велосипеды он платил по 100 руб. за каждый, а за моторные по 400 руб. При продаже всего этого товара трест получил прибыли 2980 руб., причем прибыль составляла 12% на обыкновенные велосипеды и 25% на моторные. Сколько было тех и других?

176. Инженер должен поставить телеграфные столбы между двумя местами. Он рассчитал, что если поставить по одному столбу в крайних пунктах и через каждые 60 *м* между этими пунктами, то тогда у него не достанет 21 столба. Если же ставить столбы через 55 *м*, то не достанет только 1 столба. Сколько всех столбов и на каком расстоянии он должен их поставить?

177. Два прямоугольных треугольника имеют одинаковую гипотенузу. У первого треугольника один катет на 4 *м* короче, а другой на 8 *м* длиннее соответствующих катетов другого треугольника. Вычислить эти катеты, если известно, что площадь первого на 34 *кв. м* больше площади второго.

Система трех уравнений с тремя неизвестными.

98. Нормальный вид уравнения первой степени с тремя неизвестными. Если в уравнении первой степени с тремя неизвестными x, y и z сделаны те же преобразования, какие были нами раньше указаны для уравнения с одним и двумя неизвестными, то мы приведем уравнение к такому виду (называемому нормальным), при котором в левой части уравнения находятся только три члена: один с x, другой с y и третий с z, а в правой части будет один член, не содержащий неизвестных.

Таково, например, уравнение:

$$5x-3y-4z=-12.$$

Общий (нормальный) вид его есть следующий:

$$ax+by+cz=d,$$

где a, b, c и d какие-нибудь данные относительные числа.

99. Неопределенность двух и одного уравнения с тремя неизвестными. Положим, нам дана система двух уравнений с тремя неизвестными:

$$5x-3y+z=2; \qquad 2x+y-z=6.$$

Назначим одному неизвестному, например, z, какое-нибудь произвольное число, положим, 1, и подставим это число на место z:

$$\begin{cases} 5x-3y+1=2 \\ 2x+y-1=6 \end{cases}, \text{ т. е. } \begin{cases} 5x-3y=1 \\ 2x+y=7. \end{cases}$$

Мы получим, таким образом, систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решив ее каким-нибудь способом, найдем:

$$x=2, \qquad y=3;$$

значит, данная система с тремя неизвестными удовлетворяется при $x=2$,

$y=3$ и $z=1$. Дадим теперь неизвестному z какое-нибудь иное значение, например $z=0$, и подставим это значение в данные уравнения:

$$5x-3y=2; \qquad 2x+y=6.$$

Мы снова получим систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решив ее каким-нибудь способом, найдем:

$$x=\frac{20}{11}=1\frac{9}{11}, \qquad y=2\frac{4}{11}.$$

Значит, данная система удовлетворяется при $x=1\frac{9}{11}$, $y=2\frac{4}{11}$ и $z=0$. Назначив для z еще какое-нибудь (третье) значение, мы снова получим систему двух уравнений с двумя неизвестными, из которой найдем новые значения для x и y. Так как для z мы можем назначать сколько угодно различных чисел, то и для x и y можем получить сколько угодно значений (соответствующих взятым значениям z). Значит, два уравнения с тремя неизвестными допускают бесчисленное множество решений; другими словами, такая система неопределенна.

Еще бóльшая неопределенность будет, если имеется всего одно уравнение с тремя неизвестными. Тогда можно будет для каких-нибудь двух неизвестных назначить произвольные числа; третье же неизвестное найдется из данного уравнения, если подставить в него значения, взятые произвольно для двух неизвестных.

100. Система трех уравнений с тремя неизвестными. Для того чтобы можно было найти определенные численные значения для трех неизвестных x, y и z, необходимо, чтобы была задана система трех уравнений. Такая система может быть решена способом подстановки, а также и способом алгебраического сложения уравнений. Покажем применение этих способов на следующем примере (каждое уравнение предварительно приведено к нормальному виду):

$$\begin{cases} 3x-2y+5z=7 \\ 7x+4y-8z=3 \\ 5x-3y-4z=-12. \end{cases}$$

101. Способ подстановки. Из какого-нибудь уравнения, например, из первого, определим одно неизвестное, например, x, в зависимости от двух остальных неизвестных:

$$x=\frac{7+2y-5z}{3}.$$

Так как во всех уравнениях x означает одно и то же число, то мы можем поставить найденное выражение на место x в остальные уравнения:

$$7\cdot\frac{7+2y-5z}{3}+4y-8z=3,$$

$$5\cdot\frac{7+2y-5z}{3}-3y-4z=-12.$$

Мы приходим, таким образом, к системе двух уравнений с двумя неизвестными y и z. Решив эту систему по какому-нибудь из способов, указанных раньше, найдем численные значения для y и z. В нашем

примере это будут значения: $y=3$, $z=2$; поставив эти числа в выражение, выведенное нами для x, найдем и это неизвестное:

$$x=\frac{7+2\cdot 3-5\cdot 2}{3}=1.$$

Таким образом, предложенная система имеет решение: $x=1$, $y=3$, $z=2$ (в чем можно убедиться поверкой).

102. Способ алгебраического сложения. Из трех данных уравнений возьмем какие-нибудь два, например первое и второе, и, уравняв в них коэфициенты перед одним неизвестным, например, перед z, исключим из них это неизвестное способом алгебраического сложения; от этого получим одно уравнение с двумя неизвестными x и y. Потом возьмем какие-нибудь два других уравнения из трех данных, например, первое и третье (или второе и третье), и тем же способом исключим из них то же неизвестное, т. е. z; от этого получим еще одно уравнение с x и y:

1) $3x-2y+5z=7$ (на 8)	$24x-16y+40z=56$
2) $7x+4y-8z=3$ (на 5)	$35x+20y-40z=15$
	$59x+4y=71$
1) $3x-2y+5z=7$ (на 4)	$12x-8y+20z=28$
2) $5x-3y-4z=-12$ (на 5)	$25x-15y-20z=-60$
	$37x-23y=-32$

Решим получившиеся два уравнения: $x=1$, $y=3$. Вставим эти числа в одно из трех данных уравнений, например, в первое:

$$3\cdot 1-2\cdot 3+5z=7;\quad 5z=7-3+6=10;\quad z=2.$$

Замечание. Теми же двумя способами мы можем привести систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными к системе трех уравнений с тремя неизвестными (а эту систему — к системе двух уравнений с двумя неизвестными и т. д.). Вообще систему m уравнений с m неизвестными мы можем привести к системе $m-1$ уравнений с $m-1$ неизвестными (а эту систему к системе $m-2$ уравнений с $m-2$ неизвестными и т. д.).

Упражнения.

178. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$

179. $\begin{cases} 2x+5y-3z-6\frac{1}{4}=0 \\ 5x-6y+2z=12 \\ 5z=42\frac{1}{4}-7x+y \end{cases}$

180. $\begin{cases} 3x-y+z=17 \\ 5x+3y-2z=10 \\ 7x+4y-5z=3 \end{cases}$

181. $\begin{cases} \frac{x+3y}{5x+6z}=\frac{7}{9} \\ \frac{3y+4z}{x+2y}=\frac{8}{7} \\ x+y+z=128 \end{cases}$

Некоторые особые случаи систем уравнений.

103. Случай, когда не все неизвестные входят в каждое из данных уравнений, например:

$$\begin{cases} 10x - y + 3z = 5 \\ 4v - 5x = 6 \\ 2y + 3z = 6 \\ 3y + 2v = 4 \end{cases}$$

В этом случае система решается быстрее, чем обыкновенно, так как в некоторых уравнениях уже исключены те или другие неизвестные. Надо только сообразить, какие неизвестные и из каких уравнений следует исключить, чтобы возможно скорее дойти до одного уравнения с одним неизвестным. В нашем примере, исключив z из первого и третьего уравнений и v из второго и четвертого, получим два уравнения с x и y:

$$\begin{array}{r} 10x - y + 3z = 5 \\ -2y - 3z = -6 \\ \hline 10x - 3y = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4v - 5x = 6 \\ -4v - 6y = -8 \\ \hline -5x - 6y = -2 \end{array}$$

Решив эти уравнения, найдем: $x = 0$; $y = \frac{1}{3}$.

Теперь вставим эти числа во второе и третье уравнения; тогда получим:

$$v = \frac{3}{2}; \qquad z = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}.$$

104. Случай, когда неизвестные входят только в виде дробей: $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \ldots$. Пусть дана, например, система:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{7}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Всего проще такую систему можно решить посредством введения вспомогательных неизвестных. Положим, что $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$ и $\frac{1}{z} = z'$. Тогда мы получим такую систему с неизвестными x', y' и z':

$$\begin{cases} x' + y' - z' = \frac{7}{6} \\ x' - y' - z' = -\frac{5}{6} \\ y' - x' - z' = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем:

$$x'=\frac{1}{2},\quad y'=1,\quad z'=\frac{1}{3},$$

т. е.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{y}=1,\quad \frac{1}{z}=\frac{1}{3}.$$

Отсюда окончательно находим:

$$x=2,\qquad y=1,\qquad z=3.$$

Возьмем еще другой пример:

$$\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=-13 \\ \frac{6}{x}-\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=5\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{x}+\frac{7}{y}+\frac{2}{z}=3\frac{1}{2} \end{cases}$$

Дроби $\frac{3}{x}$, $\frac{2}{y}$ и т. п. можно рассматривать как произведения: $3\cdot\frac{1}{x}$, $2\cdot\frac{1}{y}$ и т. д. Поэтому, если положим, что $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$ и $\frac{1}{z}=z'$, то система изобразится так:

$$3x'+2y'-4z'=-13;$$

$$6x'-3y'-z'=5\frac{1}{2};$$

$$-5x'+7y'+2z'=3\frac{1}{2}.$$

Из этих уравнений находим:

$$x'=2,\qquad y'=\frac{1}{2},\qquad z'=5;$$

значит:

$$\frac{1}{x}=2,\qquad \frac{1}{y}=\frac{1}{2},\qquad \frac{1}{z}=5,$$

откуда:

$$x=\frac{1}{2},\qquad y=2,\qquad z=\frac{1}{5}.$$

105. Случай, когда полезно все данные уравнения сложить. Пусть имеем систему:

$$\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ x+z=c \end{cases}$$

Сложив все три уравнения, найдем:

$$2(x+y+z)=a+b+c;$$

$$x+y+z=\frac{a+b+c}{2}.$$

Вычтя из последнего уравнения каждое из данных, получим:

$$z=\frac{a+b+c}{2}-a;\qquad x=\frac{a+b+c}{2}-b;\qquad y=\frac{a+b+c}{2}-c.$$

Упражнения.

182. $\begin{cases} 3x+5y=74 \\ 7x+2z=66 \\ 2y+z=25 \end{cases}$

183. $\begin{cases} \frac{6}{x}+\frac{5}{y}=1 \\ \frac{30}{x}+\frac{31}{y}=6 \end{cases}$

184. $\begin{cases} 4x-3z+u=10 \\ 5y+z-4u=1 \\ 3y+u=17 \\ x+2y+3u=25 \end{cases}$

185. $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{4}{z}=\frac{1}{12} \\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=\frac{19}{24} \\ \frac{4}{x}-\frac{5}{y}+\frac{1}{2}=\frac{6}{z} \end{cases}$

186. Как всего проще решить систему:

$$\begin{cases} x+y+z=29\frac{1}{4} \\ x+y-z=18\frac{1}{4} \\ x-y+z=13\frac{3}{4} \end{cases}$$

187. Три покупателя купили кофе, сахар и чай. Первый покупатель за 8 *кг* кофе, 10 *кг* сахару и 9 *кг* чаю уплатил 35 руб.; второй покупатель за 4 *кг* кофе, 15 *кг* сахару и 5 *кг* чаю уплатил 40 руб, а третий покупатель израсходовал 82 руб. 50 коп. на покупку 12 *кг* кофе, 20 *кг* сахару и 10 *кг* чаю. Найти цену киллограмма кофе, сахару и чаю.

188. Имеются три куска сплава из золота, серебра и меди; куски эти содержат:

1) 5 частей золота, 6 частей серебра, 8 частей меди;
2) 3 части „ 5 „ „ 7 „ „
3) 7 частей „ 13 „ „ 18 „ „

По скольку килограммов надо взять от каждого куска, чтобы образовать сплав, в котором было бы 79 *кг* золота, 118 *кг* серебра и 162 *кг* меди?

Исторические сведения.

С уравнением мы встречаемся уже в глубокой древности, у египтян. В папирусе, написанном Ахмесом (за 2000 лет до нашей эры), встречаются уравнения первой степени с одним неизвестным, причем это неизвестное обозначалось словом „хау" — куча.

У греческого математика Диофанта (в IV в. нашей эры) мы находим самые разнообразные уравнения, в том числе и уравнения с несколькими неизвестными, однако он не дает общего способа их решения.

Ньютон дает уже несколько способов решения системы уравнений, в том числе и способ подстановки.

Уравнениями много занимались арабские ученые, причем они при решении уравнений пользовались правилами прибавления к обеим частям уравнения и вычитания из них одинаковых членов. Первое действие называлось „восстановление", по-арабски algebre; второе — „противоположение" — almukabalah. От первого из этих слов (альджебр) и произошло название „алгебра".

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ.

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ.

I. Основные свойства корней.

106. Определение корня. Корнем второй степени (или квадратным) из числа a называется такое число, квадрат которого равняется a. Так, квадратный корень из 49 есть 7, а также и -7, так как $7^2 = 49$ и $(-7)^2 = 49$. Корнем третьей степени (кубичным) из числа a называется такое число, куб которого равняется a. Например, кубичный корень из -125 есть -5, так как $(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$.

Вообще *корнем n-ой степени из числа a называется такое число, n-ая степень которого равна a.*

Число n, означающее, какой степени находится корень, называется показателем корня.

Корень обозначается знаком $\sqrt{\ }$ (знак радикала, т. е. знак корня). Под горизонтальной чертой его пишут то число, из которого корень отыскивается (подкоренное число), а над отверстием угла ставят показатель корня. Так:

корень кубичный из 27 обозначается ..... $\sqrt[3]{27}$;

корень четвертой степени из 32 обозначается.. $\sqrt[4]{32}$.

Показателя квадратного корня принято не писать вовсе; например, вместо $\sqrt[2]{16}$ пишут $\sqrt{16}$.

Действие, посредством которого отыскивается корень, называется извлечением корня; оно обратно возвышению в степень, так как посредством этого действия отыскивается то, что дано при возвышении (именно основание степени), а дано то, что при возвышении в степень отыскивается (именно сама степень). Поэтому **правильность извлечения корня мы можем всегда поверять возвышением в степень.** Например, чтобы проверить равенство $\sqrt[3]{125} = 5$, достаточно 5 возвысить в куб; получив подкоренное число 125, мы заключаем, что число 5 есть действительно корень кубичный из 125.

107. Арифметический корень. Корень называется арифметическим, если он извлекается из положительного числа и сам представляет собою положительное число. Например, арифметический корень из 49 есть 7, тогда как число -7, которое тоже есть квадратный корень из 49, нельзя назвать арифметическим.

Укажем следующие два свойства арифметического корня.

а) Пусть требуется найти арифметический $\sqrt{49}$. Такой корень будет 7, так как $7^2=49$. Зададимся вопросом, нельзя ли подыскать какое-нибудь другое положительное число x, которое тоже было бы равно $\sqrt{49}$. Предположим, что такое число существует. Тогда оно должно быть либо меньше 7, либо больше 7. Если допустим, что $x<7$, то тогда и $x^2<49$ (с уменьшением множимого и множителя произведение уменьшается); если же допустим, что $x>7$, то тогда и $x^2>49$. Значит, никакое положительное число, ни меньшее 7, ни большее 7, не может равняться $\sqrt{49}$. Таким образом, **арифметический корень данной степени из данного числа может быть только один.**

К другому заключению мы пришли бы, если бы говорили не о положительном значении корня, а о каком-нибудь; так, $\sqrt{49}$ равен и числу 7, и числу -7 [так как и $7^2=49$ и $(-7)^2=49$].

б) Возьмем какие-нибудь два неравные положительные числа, например 49 и 64. Из того, что $49<64$, мы можем заключить, что и $\sqrt{49}<\sqrt{64}$ (если только знаком $\sqrt{\ }$ будем обозначать арифметический квадратный корень). Действительно: $7<8$. Подобно этому из того, что $64<125$, мы можем заключить, что и $\sqrt[3]{64}<\sqrt[3]{125}$. Действительно: $\sqrt[3]{64}=4$ и $\sqrt[3]{125}=5$ и $4<5$. Вообще:

меньшему положительному числу соответствует и меньший арифметический корень (той же степени).

108. Алгебраический корень. Корень называется *алгебраическим*, если не требуется, чтобы он извлекался из положительного числа и чтобы сам он был положительный. Таким образом, если под выражением $\sqrt[n]{a}$ разумеется алгебраический корень n-ой степени, то это значит, что число a может быть и положительное и отрицательное, и самый корень может быть и положительным и отрицательным.

Укажем следующие четыре свойства алгебраического корня.

а) **Корень нечетной степени из положительного числа есть положительное число.**

Так, $\sqrt[3]{8}$ должен быть числом положительным (он равен 2), так как отрицательное число, возвышенное в степень с нечетным показателем, дает отрицательное число.

б) **Корень нечетной степени из отрицательного числа есть отрицательное число.**

Так, $\sqrt[3]{-8}$ должен быть отрицательным числом (он равен -2), так как положительное число, возвышенное в какую бы то ни было степень, дает положительное число, а не отрицательное.

в) **Корень четной степени из положительного числа имеет два значения с противоположными знаками и с одинаковой абсолютной величиной.**

Так, $\sqrt{+4}=+2$ и $\sqrt{+4}=-2$, потому что $(+2)^2=+4$ и $(-2)^2=+4$; точно так же $\sqrt[4]{+81}=+3$ и $\sqrt[4]{+81}=-3$, потому что степени $(+3)^4$ и $(-3)^4$ равны одному и тому же числу $+81$.

Двойное значение корня обозначается обыкновенно постановкою двух знаков перед абсолютной величиной корня; так, пишут:

$$\sqrt{4}=\pm 2;\quad \sqrt{a^2}=\pm a;\quad \sqrt{9x^4}=\pm 3x^2.$$

г) **Корень четной степени из отрицательного числа не может равняться никакому, ни положительному, ни отрицательному числу,** так как и то и другое после возвышения в степень с четным показателем дает положительное число, а не отрицательное. Например, $\sqrt{-9}$ не равен ни $+3$, ни -3 и никакому иному числу.

Корень четной степени из отрицательного числа принято называть *мнимым* числом, относительные же числа называются *вещественными*, или *действительными* числами.

Упражнения.

Чему равны следующие выражения:

189. $\sqrt{100}$; $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{\frac{9}{16}}$; $\sqrt{a^2}$; $\sqrt{x^2}$.

190. $(\sqrt{5})^2$; $(\sqrt[3]{27})^3$; $(\sqrt[5]{a})^5$; $(\sqrt{1+x})^2$.

191. $\sqrt[3]{+27}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$; $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; $\sqrt[3]{-0{,}001}$.

192. $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-a^2}$; $\sqrt[4]{-16}$.

109. Извлечение корня из произведения, из степени и из дроби.

а) Пусть надо извлечь квадратный корень из произведения abc. Если бы требовалось произведение возвысить в квадрат, то, как мы видели, (§ 46) можно возвысить в квадрат каждый сомножитель отдельно. Так как извлечение корня есть действие, обратное возвышению в степень, то надо ожидать, что и для извлечения корня из произведения можно извлечь его из каждого сомножителя отдельно, т. е. что:

$$\sqrt{abc}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}.$$

Чтобы убедиться в верности этого равенства, возвысим правую часть его в квадрат (по теореме: чтобы возвысить в степень произведение...):

$$(\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2(\sqrt{c})^2.$$

Но, согласно определению корня:

$$(\sqrt{a})^2=a,\ (\sqrt{b})^2=b,\ (\sqrt{c})^2=c.$$

Следовательно:

$$(\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c})^2=abc.$$

Если же квадрат произведения $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$ равен abc, то это значит, что произведение это равно квадратному корню из abc. Подобно этому:

$$\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c},$$

так как:

$$(\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c})^3=(\sqrt[3]{a})^3(\sqrt[3]{b})^3(\sqrt[3]{c})^3=abc.$$

Значит, **чтобы извлечь корень из произведения, надо извлечь его из каждого сомножителя отдельно.**

б) Легко убедиться поверкой, что следующие равенства верны:

$$\sqrt{a^4}=a^2, \text{ потому что } (a^2)^2=a^4,$$
$$\sqrt[3]{x^{12}}=x^4, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad (x^4)^3=x^{12} \text{ и т. п.}$$

Значит, чтобы извлечь корень из степени, показатель которой делится на показатель корня, надо разделить показатель степени на показатель корня.

в) Верны будут также и следующие равенства:

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}, \text{ потому что } \left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}.$$
$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}.$$

Вообще:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Значит, чтобы извлечь корень из дроби, надо извлечь его из числителя и знаменателя отдельно.

Заметим, что в этих истинах предполагается, что речь идет о корнях арифметических.

Примеры.

1. $\sqrt{9a^4b^6}=\sqrt{9}\sqrt{a^4}\sqrt{b^6}=3a^2b^3;$
2. $\sqrt[3]{125a^6x^9}=\sqrt[3]{125}\ \sqrt[3]{a^6}\ \sqrt[3]{x^9}=5a^2x^3.$

Замечание. Если искомый корень четной степени и предполагается алгебраический, то перед найденным результатом надо поставить двойной знак $\pm$. Так,

$$\sqrt{9x^4}=\pm 3x^2.$$

Упражнения.

193. $\sqrt{4\cdot 9}$; $\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 0{,}01\cdot 25}$; $\sqrt{4a^2b^2}$; $\sqrt{9a^2x^2y^4}$.

194. $\sqrt[3]{-27a^3b}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}a^4x^4}$; $\sqrt[5]{abc}$.

195. $\sqrt{a^4}$; $\sqrt{2^4}$; $\sqrt{x^4}$; $\sqrt{(a+b)^4}$.

196. $\sqrt[3]{2^6}$; $\sqrt[3]{-a^6}$; $\sqrt[3]{x^9}$; $\sqrt[3]{(m+n)^6}$.

197. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$; $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$; $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3}}$; $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3}}$; $\sqrt{\frac{x}{y}}$.

198. $\sqrt{25a^6b^2c^4}$; $\sqrt{0{,}36x^4y^2}$; $\sqrt{\frac{1}{4}(b+c)^6x^4}$.

II. Извлечение квадратного корня из чисел.

110. Предварительные замечания. а) Для сокращения речи в этой главе вместо „квадратный корень“ будем просто говорить „корень“.

б) Если возвысим в квадрат числа натурального ряда: 1, 2, 3, 4, 5..., то получим такую таблицу квадратов:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144... .

Очевидно, имеется очень много целых чисел, которые в этой таблице не находятся; из таких чисел, конечно, нельзя извлечь целый корень. Поэтому, если требуется извлечь корень из какого-нибудь целого числа, например, требуется найти $\sqrt{4082}$, то мы условимся это требование понимать так: извлечь целый корень из 4082, если это возможно, если же нельзя, то мы должны найти наибольшее целое число, квадрат которого заключается в 4082 (такое число есть 63, так как $63^2 = 3969$, а $64^2 = 4096$).

в) Если данное число меньше 100, то корень из него находится по таблице умножения.

111. Извлечение корня из целого числа, меньшего 10000, но большего 100. Пусть надо найти $\sqrt{4082}$. Так как это число меньше 10 000, то корень из него меньше 100. С другой стороны, данное число больше 100, значит, корень из него больше 10 (или равен 10). Но всякое число, которое больше 10 (или равно 10), но меньше 100, имеет две цифры, значит, искомый корень есть сумма

$$\text{десятки} + \text{единицы},$$

и поэтому квадрат его должен равняться сумме:

$$(\text{десятки})^2 + 2 \cdot (\text{дес.}) \cdot (\text{един.}) + (\text{единицы})^2.$$

Сумма эта должна быть наибольшим квадратом, заключающимся в 4082. Так как $(\text{десятки})^2$ составляют сотни, то квадрат десятков надо искать в сотнях данного числа. Сотен в данном числе 40 (мы находим их число, отделив запятой две цифры справа). Но в 40 заключается несколько целых квадратов: 36, 25, 16... и др. Возьмем из них наибольший, 36, и допустим, что квадрат десятков корня будет равен именно этому наибольшему квадрату. Тогда число десятков в корне должно быть 6. Проверим теперь, что это всегда должно быть так, т. е. всегда **число десятков корня равно наибольшему целому корню из числа сотен подкоренного числа.** Действительно, в нашем примере число десятков корня не может быть больше 6, так как $(7 \text{ дес.})^2 = 49$ сотен, что превосходит 4082. Но оно не может быть и меньше 6, так как 5 дес. (с единицами) меньше 6 дес., а между тем $(6 \text{ дес.})^2 = 36$ сотен, что меньше 4082. А так как мы ищем наибольший целый корень, то мы не должны брать для корня 5 дес., когда и 6 дес. оказывается не много. Итак, мы нашли число десятков корня, именно 6. Пишем эту цифру направо от знака =, запомнив, что она означает десятки корня. Возвысив ее в квадрат, получим 36 сотен. Вычитаем эти 36 сотен из 40 сотен подкоренного числа и к остатку приписываем цифры 82:

$$\begin{array}{l} \sqrt{40'82} = 6 \\ \underline{36} \\ 48'2 \end{array}$$

В числе 482 должна содержаться сумма:

$$2\,(6 \text{ дес.}) \cdot (\text{един.}) + (\text{един})^2.$$

Произведение (6 дес.)·(един.) должно составлять десятки, поэтому удвоенное произведение десятков на единицы надо искать в десятках остатка, т. е. в 48 (мы получим число их, отделив в остатке 48'2 одну цифру справа). Удвоенные десятки корня составляют 12. Значит, если 12 умножим на единицы корня (которые пока неизвестны), то мы должны получить число, содержащееся в 48. Поэтому мы разделим 48 на 12. Для этого налево от остатка проводим вертикальную черту и за нею (отступив от черты на одно место влево для цели, которая сейчас обнаружится) напишем удвоенную первую цифру корня, т. е. 12, и на нее разделим 48.

В частном получим 4. Однако заранее нельзя ручаться, что цифру 4 можно принять за единицы корня, так как мы сейчас разделили на 12 все число десятков остатка, тогда как некоторая часть из них может и не принадлежать удвоенному произведению десятков на единицы, а входить в состав квадрата единиц. Поэтому цифра 4 может оказаться велика. Надо ее испытать. Она, очевидно, будет годиться в том случае, если сумма $2 \cdot (6 \text{ дес.}) \cdot 4 + 4^2$ окажется не больше остатка 482. Сумму эту мы можем вычислить сразу таким простым приемом: за вертикальной чертой к удвоенной цифре корня (к 12) приписываем справа цифру 4 (поэтому-то мы и отступили от черты на одно место) и на нее же умножим полученное число (124 на 4).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{40'82} = 6 & \\ 36 & \\ \hline 124 & 48'2 \\ 4 & 496 \end{array}$$

Действительно, производя это умножение, мы умножаем 4 на 4, значит, находим квадрат единиц корня; затем мы умножаем 12 десятков на 4, значит, находим удвоенное произведение десятков корня на единицы. В результате получаем сразу сумму того и другого. Полученное произведение оказалось 496, что больше остатка 482; значит, цифра 4 велика. Тогда испытаем таким же образом следующую меньшую цифру 3. Для этого сотрем цифру 4 и произведение 496 и вместо цифры 4 поставим 3 и умножим 123 на 3.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{40'82} = 63 & \\ 36 & \\ \hline 123 & 48'2 \\ 3 & 369 \\ \hline & 113 \end{array}$$

Произведение 369 оказалось меньше остатка 482; значит, цифра 3 годится (если бы случилось, что и эта цифра велика, тогда надо было бы испытать следующую меньшую цифру 2). Пишем цифру 3 в корне направо от цифры десятков. Последний остаток 113 показывает избыток

данного числа над наибольшим целым квадратом, заключающимся в нем. Для поверки возвысим в квадрат 63 и к результату приложим 113:

$$\begin{array}{r} 63^2 = 3969 \\ +\ 113 \\ \hline 4082 \end{array}$$

Так как в сумме получилось данное число 4082, то действие сделано верно.

Примеры.

1. $\sqrt{12'25} = 35$

	9	
65	32'5	
5	32 5	
	0	

2. $\sqrt{86'55} = 93$

	81	
183	55'5	
3	54 9	
	6	

3. $\sqrt{16'05} = 40$

	16	
8	0'5	

4. $\sqrt{8'72} = 29$

	4	
49	47'2	
9	44'1	
	31	

5. $\sqrt{64'00} = 80$

64	
00	

В примере четвертом при делении 47 десятков остатка на 4 мы получаем в частном 11. Но так как цифра единиц корня не может быть двузначным числом 11 или 10, то надо прямо испытать цифру 9.

В примере пятом после вычитания из первой грани квадрата 8 остаток оказывается 0, и следующая грань тоже состоит из нулей. Это показывает, что искомый корень состоит только из 8 десятков и потому на место единиц надо поставить нуль.

112. Извлечение корня из целого числа, большего 10000. Пусть требуется найти $\sqrt{35782}$. Так как подкоренное число превосходит 10 000, то корень из него больше $\sqrt{10000} = 100$ и, следовательно, он состоит из 3 цифр или более. Из скольких бы цифр он ни состоял, мы можем его всегда рассматривать как сумму только десятков и единиц. Если, например, корень оказался бы 482, то мы можем его считать за сумму 48 десятков + 2 единицы. Тогда квадрат корня будет состоять по прежнему из трех слагаемых:

$$(\text{десятки})^2 + 2 \cdot (\text{дес.}) \cdot (\text{един.}) + (\text{един.})^2.$$

Теперь мы можем рассуждать совершенно так же, как и при нахождении $\sqrt{4082}$ (в предыдущем параграфе). Разница будет только та, что для нахождения десятков корня из 4082 мы должны были извлечь корень из 40 и это можно было сделать по таблице умножения; теперь же для получения десятков $\sqrt{357'82}$ нам придется извлечь корень из 357, что по таблице умножения выполнить нельзя. Но мы можем найти $\sqrt{357}$

тем приемом, который был описан в предыдущем параграфе, так как число $357 < 10\,000$. Наибольший

$$\sqrt{3'57'82} = 189$$

	1
28	25'7
8	22 4
369	338'2
9	332 1
	61

целый корень из 357 оказывается 18. Значит, в $\sqrt{3'57'82}$ должно быть 18 десятков.

Чтобы найти единицы, надо из 3'57'82 вычесть квадрат 18 десятков, для чего достаточно вычесть квадрат 18 из 357 сотен и к остатку снести две последние цифры подкоренного числа. Остаток от вычитания квадрата 18 из 357 у нас уже есть: это 33. Значит, для получения остатка от вычитания квадрата 18 дес. из 3'57'82 достаточно к 33 приписать справа цифры 82.

Далее поступаем так, как мы поступали при нахождении $\sqrt{4082}$, а именно: налево от остатка 3382 проводим вертикальную черту и за нею пишем (отступив от черты на одно место) удвоенное число найденных десятков корня, т. е. 36 (дважды 18). В остатке отделяем одну цифру справа и делим число десятков остатка, т. е. 338, на 36. В частном получаем 9. Эту цифру испытываем, для чего ее приписываем к 36 справа и на нее же умножаем. Произведение оказалось 3321, что меньше остатка. Значит, цифра 9 годится, пишем ее в корне.

Вообще, **чтобы извлечь квадратный корень из какого угодно целого числа, надо сначала извлечь корень из числа его сотен; если это число более 100, то придется искать корень из числа сотен этих сотен, т. е. из десятков тысяч данного числа; если и это число более 100, придется извлекать корень из числа сотен десятков тысяч, т. е. из миллионов данного числа, и т. д.**

Примеры.

1. $\sqrt{8'72\,00'00} = 2952$

	4
49	47'2
9	44'1
585	310'0
5	292 5
5902	1750'0
2	1180 4
	569 6

2. $\sqrt{3'50'32'60'89} = 18717$

	1
28	25'0
8	22 4
367	263'2
7	256 9
3741	636'0
1	374 1
37427	26 1 98'9
7	261 98 9
	0

3. $\sqrt{9'51'10'56} = 3084$

9	
608 |	511'0
8 |	486 4
6164 |	2465'6
4 |	2465 6
	0

В последнем примере, найдя первую цифру и вычтя квадрат ее, получаем в остатке 0. Сносим следующие 2 цифры 51. Отделив десятки, мы получаем 5 дес., тогда как найденная удвоенная цифра корня есть 6. Значит, от деления 5 на 6 мы получаем 0. Ставим в корне 0 на втором месте и к остатку сносим следующие 2 цифры; получаем 5110. Далее продолжаем как обыкновенно.

4. $\sqrt{81'00'00} = 900$

81
0

В этом примере искомый корень состоит только из 9 сотен и потому на месте десятков и на месте единиц надо поставить нули.

Правило. **Чтобы извлечь квадратный корень из данного целого числа, разбивают его, от правой руки к левой, на грани по две цифры в каждой, кроме последней, в которой может быть и одна цифра.**

Чтобы найти первую цифру корня, извлекают квадратный корень из первой грани.

Чтобы найти вторую цифру, из первой грани вычитают квадрат первой цифры корня, к остатку сносят вторую грань и число десятков получившегося числа делят на удвоенную первую цифру корня; полученное целое число подвергают испытанию.

Испытание это производится так: за вертикальной чертой (налево от остатка) пишут удвоенное ранее найденное число корня и к нему с правой стороны приписывают испытуемую цифру; получившееся после этой приписки число умножают на испытуемую цифру. Если после умножения получится число, большее остатка, то испытуемая цифра не годится, и надо испытать следующую меньшую цифру.

Следующие цифры корня находятся по тому же приему.

Если после снесения грани число десятков получившегося числа окажется меньше делителя, т. е. меньше удвоенной найденной части корня, то в корне ставят 0, сносят следующую грань и продолжают действие дальше.

113. Число цифр корня. Из рассмотрения процесса нахождения корня следует, что **в корне должно быть столько цифр, сколько в подкоренном числе заключается граней по две цифры каждая** (в левой грани может быть и одна цифра); другими словами: **если в подкоренном числе — четное число цифр, то в корне цифр будет вдвое меньше этого числа; если же в подкоренном числе — нечетное число цифр, то в корне будет цифр вдвое меньше этого нечетного числа, увеличенного на единицу.**

Упражнения.

Извлечь квадратный корень из следующих чисел:

199. $\sqrt{289}$; $\sqrt{4225}$; $\sqrt{61009}$; $\sqrt{582169}$.

200. $\sqrt{135424}$; $\sqrt{956484}$; $\sqrt{57198969}$.

201. $\sqrt{68492176}$; $\sqrt{422220304}$. **202.** $\sqrt{285970396644}$.

203. Объяснить, почему всякое целое число, оканчивающееся на какую-нибудь из четырех цифр: 2, 3, 7 и 8, не может быть точным квадратом.

III. Извлечение приближенных квадратных корней.

114. Два случая, когда нельзя извлечь точный корень. Точным квадратным корнем из данного целого или дробного числа называется такое число, квадрат которого в точности равняется данному числу. Укажем признаки, по которым можно иногда судить, что из данного числа точный корень не извлекается.

а) Если из данного целого числа не извлекается точный целый корень (получается при извлечении остаток), то из такого числа нельзя найти и дробный точный корень, так как всякая дробь, неравная целому числу, будучи умножена сама на себя, дает в произведении тоже дробь, а не целое число.

б) Так как корень из дроби равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя, то точный корень из несократимой дроби не может быть найден в том случае, если его нельзя извлечь из числителя и знаменателя. Например, из дробей $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{9}$ и $\frac{11}{51}$ нельзя извлечь точный корень, так как в первой дроби нельзя его извлечь из знаменателя, во второй — из числителя и в третьей — ни из числителя, ни из знаменателя.

Из таких чисел, из которых нельзя извлечь корень, можно извлекать лишь приближенные корни, о которых мы будем сейчас говорить.

115. Приближенный корень с точностью до 1. Приближенным квадратным корнем с точностью до 1 из данного числа (целого или дробного — все равно) называется такое целое число, которое удовлетворяет следующим двум требованиям: 1) квадрат этого числа меньше данного числа (или равен ему); 2) но квадрат этого числа, увеличенного на 1, больше данного числа. Другими словами, *приближенным квадратным корнем с точностью до 1 называется наибольший целый квадратный корень из данного числа*, т. е. тот корень, который мы находили в предыдущей главе. Корень этот называется приближенным с точностью до 1, потому что для получения точного корня к этому приближенному корню надо было бы добавить еще некоторую дробь, меньшую 1, так что если вместо неизвестного точного корня мы возьмем этот приближенный, то сделаем ошибку, меньшую 1.

Положим, требуется найти приближенный квадратный корень с точностью до 1 из 395,74. Тогда, не обращая внимания на дробь, извлечем корень только из целого числа:

$$\sqrt{3'95} = 19$$

	1
29	29'5
9	26 1
	3 4

Полученный корень 19 будет искомый, так как

$$19^2 < 395{,}74, \text{ а } 20^2 > 395{,}74.$$

Правило. **Чтобы извлечь приближенный квадратный корень с точностью до 1, надо извлечь наибольший целый корень из целой части данного числа.**

Найденное по этому правилу число есть приближенный корень с недостатком, так как в нем недостает до точного корня некоторой дроби (меньшей 1). Если этот корень увеличим на 1, то получим другое число, в котором есть некоторый избыток над точным корнем, и избыток этот меньше 1. Этот увеличенный на 1 корень можно назвать тоже приближенным корнем с точностью до 1, но с избытком.

116. Приближенный корень с точностью до $\frac{1}{10}$. Пусть требуется найти $\sqrt{2{,}35104}$ с точностью до $\frac{1}{10}$ (с недостатком). Это значит, что требуется найти такую десятичную дробь, которая состояла бы из целых единиц и десятых долей и которая удовлетворяла бы двум следующим требованиям: 1) квадрат этой дроби не превосходит 2,35104, но 2) если увеличим ее на $\frac{1}{10}$, то квадрат этой увеличенной дроби превосходит 2,35104.

$$\sqrt{2{,}35'104} = 1{,}5$$

	1
25	13'5
5	12 5
	10

Чтобы найти такую дробь, мы сначала найдем приближенный корень с точностью до 1, т. е. извлечем корень только из целого числа 2. Получим 1 (и в остатке 1). Пишем в корне цифру 1 и ставим после нее запятую. Теперь будем искать цифру десятых. Для этого приписываем к остатку 1 цифры 35, стоящие направо от запятой, и продолжаем извлечение так, как будто мы извлекали корень из целого числа 235. Полученную цифру 5 пишем в корне на месте десятых. Остальные цифры подкоренного числа (104) нам не нужны. Что полученное число 1,5 будет действительно приближенный корень с точностью до $\frac{1}{10}$, видно из следующего: если бы мы находили наибольший целый корень из 235 с точностью до 1, то получили бы 15, значит:

$$15^2 \leqslant 235, \text{ но } 16^2 > 235.$$

Разделив все эти числа на 100, получим:

$$\frac{15^2}{100} \leqslant 2{,}35; \qquad \frac{16^2}{100} > 2{,}35,$$

т. е.:

$$\left(\frac{15}{10}\right)^2 \leqslant 2{,}35; \qquad \left(\frac{16}{10}\right)^2 > 2{,}35,$$

или

$$1{,}5^2 \leqslant 2{,}35; \qquad 16^2 > 2{,}35.$$

Следовательно,

$$1{,}5^2 < 2{,}35104; \quad 1{,}6^2 > 2{,}35104\ ^1).$$

Значит, число 1,5 есть та десятичная дробь, которую мы назвали приближенным корнем с точностью до $\frac{1}{10}$.

Найдем этим приемом еще следующие приближенные корни с точностью до 0,1:

$$\sqrt{57{,}40} = 7{,}5 \qquad \sqrt{0{,}30} = 0{,}5 \qquad \sqrt{0{,}03\,8} = 0{,}1$$

49 | 25 | 1

145 | 84′0 | 5 | 2

5 | 725

115

117. Приближенный корень с точностью до $\frac{1}{100}$, до $\frac{1}{1000}$ и т. д.

Пусть требуется найти с точностью до $\frac{1}{100}$ приближенный $\sqrt{248}$ с недостатком. Это значит: найти такую десятичную дробь, которая состояла бы из целых, десятых и сотых долей и которая удовлетворяла бы двум требованиям: 1) квадрат ее не превосходит 248, но 2) если увеличим эту дробь на $\frac{1}{100}$, то квадрат этой увеличенной дроби превосходит 248. Такую дробь мы найдем в такой последовательности: сначала отыщем целое число, потом цифру десятых, затем и цифру сотых. Корень из целого числа будет 15 целых. Чтобы получить цифру десятых, надо, как мы видели, приписать к остатку 23 еще 2 цифры, стоящие направо от запятой.

$$\sqrt{2'48',00'00} = 15{,}74$$

1

25 | 14′8 | 5 | 125

307 | 2300′ | 7 | 2149

3144 | 151000′ | 4 | 125776

2524

В нашем примере этих цифр нет вовсе, ставим на их место нули. Приписав их к остатку и продолжая действие так, как будто находим корень из целого числа 24 800, мы найдем цифру десятых 7. Остается найти цифру сотых. Для этого приписываем к остатку 151 еще 2 нуля и продолжаем извлечение, как будто мы находим корень из целого

---

1) От прибавления числа 0,00104 двойной знак $\leqslant$ должен измениться, очевидно, в знак $<$, а знак $>$ остается (так как $0{,}00104 < 0{,}01$).

числа 2 480 000. Получаем 15,74. Что это число действительно есть приближенный корень из 248 с точностью до $\frac{1}{100}$ с недостатком, видно из следующего. Если бы мы находили наибольший целый квадратный корень из целого числа 2 480 000, то получили бы 1574; значит:

$$1574^2 \leqslant 2\,480\,000, \text{ но } 1575^2 > 2\,480\,000.$$

Разделив все числа на 10 000 ($= 100^2$), получим:

$$\frac{1574^2}{100^2} \leqslant 248{,}0000; \qquad \frac{1575^2}{100^2} > 248{,}0000,$$

т. е.

$$\left(\frac{1574}{100}\right)^2 \leqslant 248{,}0000; \qquad \left(\frac{1575}{100}\right)^2 > 248{,}0000,$$

или

$$15{,}74^2 \leqslant 248; \qquad 15{,}75^2 > 248.$$

Значит, 15,74 есть та десятичная дробь, которую мы назвали приближенным корнем с недостатком с точностью до $\frac{1}{100}$ из 248.

Применяя этот прием к нахождению приближенного корня с точностью до $\frac{1}{1000}$, до $\frac{1}{10000}$ и т. д., найдем следующее:

Правило. **Чтобы извлечь из данного целого числа или из данной десятичной дроби приближенный корень с недостатком с точностью до $\frac{1}{10}$, до $\frac{1}{100}$, до $\frac{1}{1000}$ и т. д., находят сначала приближенный корень с недостатком с точностью до 1, извлекая корень из целого числа (если его нет, пишут в корне 0 целых).**

Потом находят цифру десятых. Для этого к остатку приписывают две цифры подкоренного числа, стоящие направо от запятой (если их нет, приписывают к остатку два нуля), и продолжают извлечение так, как это делается при извлечении корня из целого числа. Полученную цифру пишут в корне на месте десятых.

Затем находят цифру сотых. Для этого к остатку приписывают снова две цифры, стоящие направо от тех, которые были только что снесены, и т. д.

Таким образом, при извлечении корня из целого числа с десятичной дробью надо делить на грани по две цифры в каждой, начиная от запятой, как влево (в целой части числа), так и вправо (в дробной части).

Примеры.

1. Найти до $\frac{1}{100}$ корни: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{0{,}3}$;

а) $\sqrt{2} = 1{,}41$

1	
24 | 4	10'0
	9 6
281 | 1	40'0
	28 1
	11 9

б) $\sqrt{0{,}30} = 0{,}54$

25	
104 | 4	50'0
	41 6
	8 4

2. Извлечь до $\frac{1}{10000}$: а) $\sqrt{0{,}38472}$; б) $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

а) $\sqrt{0{,}38'47'20} = 0{,}6202$;

36	
122 |	24'7
2 |	24 4
12402 |	32'00'0
2 |	24 80 4
	7 19 6

б) $\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{0{,}42'85'71'42}$

$\sqrt{0{,}42'85'71'42} = 0{,}6546$

36	
125 |	68'5
5 |	62 5
1304 |	6 07'1
4 |	5 21 6
13086 |	8 554'2
6 |	7 851 6
	702 6

В последнем примере мы обратили дробь $\frac{3}{7}$ в десятичную, вычислив 8 десятичных знаков, чтобы образовались 4 грани, потребные для нахождения 4 десятичных знаков корня.

Замечание. Существуют особые таблицы, в которых помещены квадратные корни (вычисленные с известною точностью) из очень многих чисел. Способы пользования такими таблицами обыкновенно указываются в предисловии к таблицам.

118. Извлечение корня из обыкновенных дробей. Точный квадратный корень из несократимой дроби можно извлечь лишь тогда, когда оба члена дроби точные квадраты (§ 114). В этом случае достаточно извлечь корень из числителя и знаменателя отдельно, например:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}.$$

Приближенный корень из обыкновенной дроби с какою-нибудь десятичною точностью проще всего можно находить, если предварительно обратим обыкновенную дробь в десятичную, вычислив в этой дроби такое число десятичных знаков после запятой, которое было бы вдвое больше числа десятичных знаков в искомом корне. Пусть, например, надо найти $\sqrt{2\frac{3}{7}}$ с точностью до 0,01, т. е. с двумя десятичными знаками после запятой. Для этого обратим $2\frac{3}{7}$ в десятичную дробь с 4 десятичными знаками: $2\frac{3}{7} = 2{,}4285\ldots$ и извлечем приближенный корень из 2,4285 с точностью до 0,01:

$\sqrt{2{,}4285} = 1{,}55$

1	
25 |	14'2
5 |	12 5
305 |	178'5
5 |	152 5
	260

Впрочем, можно поступать и иначе. Объясним это на следующем примере:

Найти приближенный $\sqrt{\frac{5}{24}}$.

Сделаем знаменатель точным квадратом. Для этого достаточно было бы умножить оба члена дроби на знаменатель 24; но в этом примере можно поступить иначе. Разложим 24 на простые множители: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Из этого разложения видно, что если 24 умножить на 2 и еще на 3, то тогда в произведении каждый простой множитель будет повторяться четное число раз, и, следовательно, знаменатель сделается квадратом:

$$\sqrt{\frac{5}{24}} = \sqrt{\frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{24 \cdot 3^2}} = \frac{\sqrt{30}}{2^2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{30}}{12}.$$

Остается вычислить $\sqrt{30}$ с какой-нибудь точностью и результат разделить на 12. При этом надо иметь в виду, что от деления на 12 уменьшится и дробь, показывающая степень точности. Так, если найдем $\sqrt{30}$ с точностью до $\frac{1}{10}$ и результат разделим на 12, то получим приближенный корень из дроби $\frac{5}{24}$ с точностью до $\frac{1}{120}$ $\left(\text{а именно } \frac{54}{120} \text{ и } \frac{55}{120}\right)$.

Упражнения.

204. $\sqrt{13}$ до 1; $\sqrt{13}$ до 0,1; $\sqrt{13}$ до 0,001.

205. $\sqrt{101}$ до $\frac{1}{100}$; $\sqrt{0{,}8}$ до 0,01.

206. $\sqrt{0{,}0081}$ до $\frac{1}{100}$; $\sqrt{19{,}0963}$ до $\frac{1}{100}$.

207. $\sqrt{356}$ до 1, затем до 0,1, далее до 0,01.

208. Вычислить до 0,01 квадратный корень из следующих дробей, обратив каждую из них в десятичную с достаточным числом десятичных знаков:

$$\frac{3}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{7}{11},\ \frac{5}{12},\ \frac{7}{250}.$$

209. То же, не обращая дроби в десятичные, а сделав знаменатель точным квадратом; определить степень погрешности.

210. Вычислить корни:

$$\sqrt{0{,}3}, \quad \sqrt{5{,}7} \left(\text{оба до } \frac{1}{10}\right);$$

$$\sqrt{2{,}313}, \quad \sqrt{0{,}00264} \left(\text{оба до } \frac{1}{100}\right).$$

Исторические сведения.

Знак $\sqrt{\ }$ для обозначения действия извлечения корня введен в математику Рудольфом в 1525 г. Раньше просто писали целое слово „корень“ (по-латыни radix), которое затем было сокращено до одной первой буквы, а эта последняя постепенно и приняла вид $\sqrt{\ }$

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ.

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ.

119. Задача. Моторная лодка спустилась по течению реки на расстояние 28 *км* и тотчас же вернулась назад; на это ей потребовалось 7 часов. Найти скорость движения лодки в стоячей воде, если известно, что вода в реке движется со скоростью 3 *км* в час.

Пусть скорость движения лодки в стоячей воде будет x *км* в час; тогда по течению реки она двигалась со скоростью $(x+3)$ *км* в час, а против течения со скоростью $(x-3)$ *км* в час. Следовательно, 28 *км* лодка прошла в $\frac{28}{x+3}$ часов, когда двигалась по течению, и в $\frac{28}{x-3}$ часов, когда возвращалась назад.

Согласно условию задачи мы имеем уравнение:

$$\frac{28}{x+3}+\frac{28}{x-3}=7.$$

Освободив дроби от знаменателей, получим:

$$28\,(x-3)+28\,(x+3)=7\,(x+3)\,(x-3),$$

т. е.

$$28x-84+28x+84=7\,(x^2-9)=7x^2-63,$$

или

$$56x=7x^2-63.$$

Мы получили уравнение, в котором есть член, содержащий неизвестное во второй степени, но нет членов, содержащих неизвестное в более высоких степенях. Такое уравнение называется *уравнением второй степени, или квадратным.*

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что это уравнение имеет корни 9 и -1, из которых ответом на вопрос задачи может служить только первый корень.

Выведем общее правило для решения квадратных уравнений.

120. Нормальный вид квадратного уравнения. В квадратном уравнении (а также и в уравнениях более высоких степеней) принято, после упрощения уравнения, переносить все его члены в одну левую часть, так что правая часть уравнения делается равной нулю. Так, уравнение, составленное нами для решения предыдущей задачи, после указанного перенесения членов будет:

$$56x-7x^2+63=0,$$

или после расположения членов по убывающим степеням буквы x:

$$-7x^2+56x+63=0.$$

Числа -7, $+56$ и $+63$ называются *коэфициентами* этого квадратного уравнения; из них число $+63$ называется *свободным* членом, а числа -7 и $+56$ *первым* и *вторым* коэфициентами (мы предполагаем, что члены уравнения всегда расположены по убывающим степеням буквы x). Числа эти могут быть и положительные, и отрицательные, и даже нули (кроме первого коэфициента, который не может быть нулем, так как в противном случае уравнение не было бы квадратным). Если ни один из трех коэфициентов не равен нулю, то уравнение называется *полным*. Общий вид такого уравнения (*нормальный* вид) есть следующий:

$$ax^2+bx+c=0.$$

Заметим, что первый коэфициент a мы можем всегда сделать положительным, переменив в случае надобности перед всеми членами знаки на противоположные (другими словами, умножив обе части уравнения на -1). Так, приведенное выше уравнение мы можем написать так:

$$7x^2-56x-63=0.$$

121. Решение неполных квадратных уравнений. Квадратное уравнение называется *неполным*, когда в нем нет члена, содержащего x в первой степени, или нет свободного члена; другими словами, когда второй коэфициент b равен нулю, или когда свободный член c равен 0. В первом случае уравнение имеет вид $ax^2+c=0$, во втором $ax^2+bx=0$ (может даже случиться, что одновременно и $b=0$ и $c=0$; тогда уравнение будет вида $ax^2=0$). Рассмотрим решение всех этих неполных уравнений.

1. Неполное квадратное уравнение вида $ax^2+c=0$. Возьмем три следующих примера:

а) $3x^2-27=0$. Перенеся свободный член направо, получим: $3x^2=27$ и, следовательно, $x^2=9$. Значит, x есть квадратный корень из 9, т. е. число $+3$ или число -3. Условимся знаком $\sqrt{\ }$ обозначать арифметическое значение корня; тогда мы можем написать: $x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$. Таким образом, данное уравнение имеет 2 решения. Обозначая одно из них x_1, а другое x_2, мы можем эти решения написать так:

$$x_1=+\sqrt{9}=+3, \qquad x_2=-\sqrt{9}=-3.$$

б) $2x^2-0{,}15=0$. Перенеся свободный член, получим:

$$2x^2=0{,}15 \text{ и } x^2=0{,}075.$$

Значит:

$$x=\pm\sqrt{0{,}075}.$$

Найдем $\sqrt{0{,}075}$ с точностью, положим, до $\frac{1}{100}$ (§ 117):

$$\sqrt{0{,}07\,50}=0{,}27$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & \\ \hline 47 & 35\,0 \\ 7 & 32\,9 \\ \hline & 2\,1 \end{array}$$

Следовательно, $x_1 = 0{,}27\ldots$, $x_2 = -0{,}27\ldots$.

в) $2x^2 + 50 = 0$. Перенеся 50 направо, получим:

$$2x^2 = -50; \qquad x^2 = -\frac{50}{2} = -25; \qquad x = \pm\sqrt{-25}.$$

Так как из отрицательного числа нельзя извлечь квадратного корня, то данное уравнение не имеет решений (вещественных).

Таким образом, неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$ вообще решается так:

$$ax^2 = -c; \qquad x^2 = -\frac{c}{a}; \qquad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Если выражение $-\frac{c}{a}$ есть число положительное (что будет тогда, когда числа a и c разных знаков), то из него можно извлечь квадратный корень (точно или приближенно), и тогда для x получаем два значения с одинаковою абсолютною величиною, но одно положительное, другое отрицательное. Если же выражение $-\frac{c}{a}$ есть число отрицательное (что будет тогда, когда числа c и a одинаковых знаков), то уравнение не имеет вещественных корней.

2. Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$. Как частный пример, возьмем уравнение $2x^2 - 7x = 0$. В левой части этого уравнения вынесем x множителем за скобки:

$$x(2x - 7) = 0.$$

Теперь левая часть уравнения есть произведение, а правая равна нулю. Но произведение равняется нулю только тогда, когда какой-нибудь из сомножителей равен нулю; поэтому наше уравнение удовлетворяется только тогда, когда первый сомножитель x равен нулю или когда второй сомножитель $2x - 7$ равен нулю (и когда, следовательно, $x = \frac{7}{2}$). Значит, данное уравнение имеет два решения:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

Таким образом, неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ решается вообще так:

$$ax^2 + bx = 0; \qquad x(ax + b) = 0;$$

$$x_1 = 0; \qquad ax_2 + b = 0; \qquad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

3. Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 = 0$. Такое уравнение имеет, очевидно, только корень $x = 0$.

Упражнения.

211. $3x^2 - 147 = 0$; $\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0$; $x^2 + 25 = 0$.

212. $\frac{3(x^2 - 11)}{5} - \frac{2(x^2 - 60)}{7} = 36$; $\frac{4}{x - 3} - \frac{4}{x + 3} = \frac{1}{3}$.

213. $2x^2 - 7x = 0$; $\frac{3}{7}x^2 + x = 0$; $0{,}2x^2 - \frac{3}{4}x = 0$.

214. $x^2 = x$; $x^2 - 16x = 0$; $7x^2 = 0$; $0{,}7x^2 = 0$

215. $(x - 2)(x - 5) = 0$; $x(x + 4) = 0$; $3(y - 2)(y + 3) = 0$.

122. Примеры решения полных квадратных уравнений. Для первого примера возьмем то квадратное уравнение, которое было составлено для задачи § 119:

$$7x^2 - 56x - 63 = 0.$$

Разделим все его члены на 7 и перенесем свободный член направо:

$$x^2 - 8x = 9.$$

Зададимся теперь вопросом, нельзя ли к двучлену $x^2 - 8x$ приложить такой третий член, чтобы образовался трехчлен, представляющий собою полный квадрат. Мы легко ответим на этот вопрос, если изобразим двучлен так:

$$x^2 - 2x \cdot 4.$$

Теперь ясно, что если этот двучлен дополним членом 4^2, то получим трехчлен:

$$x^2 - 2x \cdot 4 + 4^2,$$

равный квадрату разности $x - 4$. Но если к левой части уравнения мы добавим число 4^2 (т. е. 16), то и к правой части должны добавить то же самое число. Сделав это, получим:

$$x^2 - 8x + 16 = 9 + 16, \text{ т. е. } (x - 4)^2 = 25.$$

Таким образом, разность $x - 4$ есть такое число, квадрат которого равен 25; значит, эта разность должна равняться квадратному корню из 25, т. е. числу 5 или числу -5:

$$x - 4 = +\sqrt{25} = +5, \quad \text{или} \quad x - 4 = -\sqrt{25} = -5.$$

Перенеся теперь член -4 в правую часть, найдем два решения:

$$x_1 = 4 + 5 = 9 \quad \text{и} \quad x_2 = 4 - 5 = -1.$$

Оба эти решения годны для данного уравнения (в чем можно убедиться поверкою), но для задачи, из которой выведено уравнение, отрицательное решение -1 не годится, так как в задаче отыскивается абсолютная величина скорости, а не ее направление.

Для второго примера возьмем уравнение:

$$3x^2 + 15x - 7 = 0.$$

Разделим все члены на 3 и перенесем свободный член направо:

$$x^2 + 5x = \frac{7}{3}.$$

Из двучлена $x^2 + 5x$ можно сделать квадрат суммы, если добавим к нему третий член $\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Приложив этот член к обеим частям уравнения, получим:

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{3},$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{7}{3} = \frac{75 + 28}{12} = \frac{103}{12}.$$

Отсюда видно, что $x+\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{103}{12}}$, следовательно:

$$x_1=-\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{103}{12}};\qquad x_2=-\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{103}{12}}.$$

Вычислим $\frac{103}{12}$ с точностью, положим, до $\frac{1}{10}$:

$$\sqrt{\frac{103}{12}}=\sqrt{8{,}58\ldots}=2{,}9\ldots.$$

Следовательно:

$$x_1=-2{,}5+2{,}9\ldots=0{,}4\ldots;\quad x_2=-2{,}5-2{,}9\ldots=-5{,}4\ldots.$$

123. Формула корней приведенного квадратного уравнения. Квадратное уравнение, у которого первый коэфициент есть $+1$, называется приведенным уравнением. К такому виду, как мы видели сейчас на примерах, уравнение может быть приведено и в том случае, когда первый коэфициент не 1; стоит только все члены уравнения разделить на этот коэфициент. В общем виде приведенное уравнение обыкновенно изображается так:

$$x^2+px+q=0.$$

Решим это буквенное уравнение, проделав над ним те же преобразования, которые были указаны на частных примерах.

Перенесем свободный член в правую часть

$$x^2+px=-q.$$

Так как $px=2x\cdot\frac{p}{2}$, то, желая обратить двучлен $x+px$ в полный квадрат, прибавим к обеим частям уравнения по $\left(\frac{p}{2}\right)^2$:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Теперь уравнение можно представить так:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q,$$

откуда находим:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\quad\text{и}\quad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Формулу эту можно высказать так:

Неизвестное приведенного квадратного уравнения равно половине второго коэфициента, взятого с противоположным знаком, плюс-минус корень квадратный из квадрата этой половины без свободного члена.

Формулу эту надо запомнить и в буквенном выражении и в словесном.

Примеры.

1. $x^2-x-6=0$. Чтобы уравнение это уподобить буквенному $x^2+px+q=0$, представим его так:

$$x^2+(-1)x+(-6)=0.$$

Теперь видно, что в этом примере $p=-1$ и $q=-6$; поэтому:

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2};$$

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3; \qquad x_2=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2.$$

Поверка: $3^2-3-6=0$; $(-2)^2-(-2)-6=0$.

2. $x^2-18x+81=0$; здесь $p=-18$, $q=+81$; поэтому:

$$x=9\pm\sqrt{81-81}=9\pm 0=9.$$

Уравнение имеет только один корень.

3. $x^2-2x+5=0$; $x=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm\sqrt{-4}$. Корни мнимые.

Упражнения.

216. $x^2+10x+5=2x^2-6x+53$.

217. $x^2+6x=27$.

218. $x^2-5\frac{3}{4}x=18$.

219. $12x-\frac{6}{x}=21$.

220. $\frac{x}{7}+\frac{21}{x+5}=6\frac{5}{7}$.

221. $x+2=\frac{9}{x+2}$.

222. $\frac{x-5}{4}-\frac{4}{5-x}=\frac{3x-1}{4}$.

223. $x+\frac{1}{x-3}=5$.

224. $\frac{2x}{x-d}=\frac{x-d}{d}$.

225. При каком значении t произведение $2t-5$ на $t-4$ равно сумме $t+8$?

226. $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$.

124. Общая формула корней квадратного уравнения. Уравнение $ax^2+bx+c=0$ по разделении его членов на a приводится к приведенному уравнению:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Решив это уравнение по формуле приведенного уравнения, найдем:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}.$$

Выражение это можно упростить так:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

В этом упрощенном виде формулу полезно запомнить; ее можно высказать так:

Неизвестное полного квадратного уравнения равно дроби, у которой числитель есть второй коэфициент, взятый с противоположным знаком, плюс-минус корень квадратный из квадрата этого коэфициента без учетверенного произведения первого коэфициента на свободный член, а знаменатель есть удвоенный первый коэфициент.

Эту формулу можно назвать *общею*, так как она годится и для приведенного уравнения (если положим $a=1$) и для неполных квадратных уравнений (если положим $b=0$ или $c=0$).

125. Упрощение общей формулы, когда коэфициент b есть четное число. Общая формула упрощается, если b четное число. Так, положив $b = 2k$, найдем

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} =$$

$$= \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Эта формула отличается от общей отсутствием цифровых множителей 4 и 2.

126. Число корней квадратного уравнения. Мы видели, что квадратное уравнение имеет иногда два корня, иногда один, иногда ни одного (случай мнимых корней). Однако согласились приписывать квадратным уравнениям во всех случаях два корня, разумея при этом, что корни могут быть иногда равными, иногда мнимыми. Причина такого соглашения состоит в том, что формулы, выражающие мнимые корни, обладают теми же свойствами, какие принадлежат вещественным корням, стоит только, совершая действия над мнимыми числами, руководиться правилами, выведенными для вещественных чисел, принимая притом, что $(\sqrt{-a})^2 = -a$. Точно так же, когда уравнение имеет один корень, мы можем, рассматривая этот корень как два одинаковых, приписать им те же свойства, какие принадлежат разным корням уравнения.

Упражнения.

227. $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

228. $(2x - 3)^2 = 8x$.

229. $5x^2 - 8x + 0{,}24 = 0$.

230. $65x^2 + 118x - 55 = 0$.

231. $(x - 3)(x - 4) = 12$.

232. $\frac{x}{x + 60} = \frac{7}{3x - 5}$.

233. $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$.

234. Найти три последовательных четных числа, чтобы сумма их квадратов равнялась 776.

235. Площадь прямоугольника равна 48 *кв. см*, а периметр его 28 *см*. Найти стороны.

236. Найти стороны прямоугольного треугольника, зная, что они выражаются тремя последовательными целыми числами.

237. Если многоугольник имеет n сторон, то число всех его диагоналей равно $\frac{1}{2}n(n - 3)$. Определить, сколько сторон должен иметь многоугольник, чтобы всех диагоналей у него оказалось 54.

238. Аэроплан пролетел по прямой линии 150 *км*, тотчас же повернул назад и по прямой линии вернулся к начальному месту через 4 часа после начала полета. Туда он летел против ветра, оттуда по ветру. Какова была скорость этого ветра, если скорость движения самого аэроплана при безветрии равна 80 *км* в час?

239. Куплено несколько платков за 60 руб. Если бы за эту же сумму платков было куплено тремя больше, то каждый платок стоил бы на 1 руб. дешевле. Сколько куплено платков?

240. В первой группе школы было роздано 180 листов бумаги, каждому ученику поровну. Во второй группе было роздано такое же число листов бумаги и также поровну. Каждый ученик этой группы получил на 6 листов более, чем в первой группе. По скольку листов получил каждый ученик первой группы, если во второй группе было на 40 учеников меньше, чем в первой?

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ.

1. $4a$; a^3. **2.** $6m^2$; m^3. **3.** $x(x-d)$. **4.** $10x+y$. **5.** $100a+10b+c$. **6.** $\frac{ma+nb}{a+b}$. **7.** x^3+y^3; $(x+y)^2$; x^2y^2; $(xy)^2$; $(x+y)(x-y)$; $\frac{m+n}{m-n}$ или $(m+n):(m-n)$. **8.** 84; 44; 552; 336; $9\frac{1}{3}$; $5\frac{3}{5}$. **9.** $3(x+y)(x-y)$. **10.** $3a+2b$; $13+12=25$. **11.** $5+ab-5a+a$; $a+2x$. **12.** n; $5a^3b^2x^3$. **13.** $6xyz$. **14.** $5x+15$; $7x+7y+7z$. **15.** $\frac{a}{2}+2b-c$; $5a^3b$. **16.** $8x-2y$; $4ax$. **17.** $\frac{a}{b}$; $3x$. **18.** $+10$; -10; $+3$. **19.** -3; $+8$; -2. **20.** 0; -3; $+1$. **21.** -1; -2; $+2$. **22.** $+2$. **23.** 0. **24.** $b-a$; -5 (убыток). **25.** $m-n$; -10 (долг). **26.** 14; 10; 18; 2. **27.** $a+b$; $m+n$; $5x$. **28.** 12. **29.** $-1\frac{3}{4}$. **30.** $+5$. **31.** $10+(-2)+(-3)+7$. **32.** $10-(-8)$. **33.** $+6$; -14; $+80$. **34.** $-23\frac{3}{8}$; 0,054. **35.** $+1$; -1; $+1$; -1. **36.** 27. **37.** -27. **38.** 0; 0; 0; 0; 0. **39.** $3\frac{1}{16}$. **40.** $+5$; -5; -5; $+5$. **41.** $-a$; -5; x^2. **42.** 0; 0; 0; 0. **43, 44, 45** не требуют ответа. **46.** $10a^2x^3$; $-10a^2bx^2$; $-\frac{3}{8}a^2bx^2$; $-20m^2x^2y^3$. **47.** $a+a$; $ax+ax+ax$; $a^2b+a^2b+a^2b+a^2b+a^2b$; $(a+1)+(a+1)+(a+1)+(a+1)$. **48.** 90; $\frac{13}{15}$; $2\frac{25}{48}$; -343; -936. **49.** 0; 31; -4. **50.** $+1$ и -1. **51.** $a^3x^2+4\frac{1}{2}a^2x^3$. **52.** $2x-16{,}3xy$. **53.** $a+3\frac{1}{2}mxy^2$. **54.** $a-3\frac{1}{2}mxy^2$. **55.** $4a^3-3a^2b-13ab^2$. **56.** $x^5-7a^2x^3$. **57.** $2z$. **58.** $4x^3+x^2+3x+1$. **59.** $8a^3-11a^2b+14ab^2-3b^3$. **60.** p^2+p+15. **61.** $4x^2+3y^2-y-1$. **62.** $\frac{1}{4}x^2-x+\frac{4}{5}$. **63.** $4a^2+4b^2-c^2$. **64.** $x+y$; $2m-2n$. **65.** $b-2c$. **66.** $4x^2+4xy$. **67.** $a-(b+c-d)$; $a-b+(-c+d)$; $a-(b+c)+d$. **68.** $15a^3b^7c$; $\frac{5}{8}a^3x^6$. **69.** $0{,}81a^3b^2x^3$; $a^6b^8c^3$. **70.** $\frac{9}{49}m^2x^4y^6$; $8a^9b^3x^6$. **71.** $0{,}01x^{2m}y^6$; $\frac{1}{8}m^6n^3y^9$. **72.** $6a^3b-4ab^4+2abc$. **73.** $25a^3b-20a^4b^2+15a^5b^3-35a^6b^4$. **74.** $am+bm-cm-an-bn+cn$; $6a^2-3ab+2ab^2-b^3$. **75.** $2a^2-\frac{1}{2}b^2$; x^3-y^3. **76.** x^3+y^3. **77.** $6x^2+5xy-6y^2$; y^4-1. **78.** $x^6+1008x+720$. **79.** $x^9-x^5-x^4+2x^3-x^2-x+1$. **80.** x^6-a^6. **81.** a^2+2a+1; $1+4a+4a^2$; $x^2+x+\frac{1}{4}$. **82.** $9a^4+6a^2+1$; $0{,}01m^2x^2+mx^2+25x^4$. **83.** $25a^2-20a+4$; $9x^2-12ax+4a^2$; $9a^4-3a^2+\frac{1}{4}$. **84.** $101^2=(100+1)^2=100^2+2\cdot100\cdot1+1^2=10\,201$; $997^2=(1000-3)^2=\ldots=994\,009$ и т. д. **85.** $4m^2-12mn+9n^2$; $9a^4x-24a^3xy+16a^2y^2$; $0{,}04x^6-0{,}15x^3+\frac{9}{64}$. **86.** $\frac{1}{4}x^4-$

$-3\frac{1}{2}x^3+\frac{49}{4}x^2$; $0{,}0625p^2-0{,}1pq+0{,}04q^2$. **87.** a^2-1; $4a^2-25$. **88.** $4x^2-9$; $1-a^4$. **89.** $(x^2+1)(x^2-1)=x^4-1$; $(4x^2+y^2)(4x^2-y^2)=16x^4-y^4$. **90.** $[(m+n)-p][(m+n)+p]=(m+n)^2-p^2$; $a^2-(b+c)^2=a^2-b^2-2bc-c^2$. **91.** a^3+3a^2+3a+1; a^3-3a^2+3a-1; $8x^3+36x^2+54x+27$; $125-225x+135x^2-27x^3$. **92.** $\frac{1}{8}m^3-\frac{3}{2}m^2+6m-8$; $\frac{27}{64}p^3+\frac{9}{16}p^2q+\frac{1}{4}pq^2+\frac{1}{27}q^3$; $125-225x+135x^2-27x^3$. **93.** $2a^2xy$; $-\frac{3}{5}x^2$. **94.** $-\frac{6}{5}a^3$; $3a^{m-1}b^2$. **95.** $\frac{16}{3}a+8b-16a^2b^4$. **96.** $9x^3-6ax+a^2$. **97.** $1-2y+y^2-y^3$. **98.** $x-4$; $y+1$. **99.** $3x^2-2$. **100.** $3ax^3$. **101.** $x-a$. **102.** $2(a+x)$; $a(x+y)$; $2y(2y-3x)$. **103.** $2a(2x-y)$; $3xy(2x+3y)$. **104.** $3ab(4a-3ab+2b^2)$; $xy(y-7+4x)$. **105.** $(m+n)(m-n)$; $(a+1)(a-1)$; $(1+a)(1-a)$. **106.** $(x+2)(x-2)$; $(m+3)(m-3)$; $(2x+y)(2x-y)$. **107.** $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3\right)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^3\right)$; $(0{,}1a^3+3)(0{,}1a^3-3)$; $3a(a^2+4b^4)(a^2-4b^4)$. **108.** $(x-y+a)(x-y-a)$; $[3(a+2b)+1][3(a+2b)-1]$; $(a-b+c)(a-b-c)$. **109.** $(x+y+x-y)(x+y-x+y)=2x\cdot 2y=4xy$. **110.** $(x-y)^2$; $(m+n)^2$. **111.** $(a+b)^2(a-2b)^2$. **112.** $(x+4)^2$; $(x+1)^2$. **113.** $5a(a-2b)^2$. **114.** $(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c)$; $a^2-(b^2+2bc+c^2)=a^2-(b+c)^2=(a+b+c)(a-b-c)$. **115.** $(a+b)x+(a+b)y=(a+b)(x+y)$; $a(c-d)+b(d-c)=a(c-d)-b(c-d)=(c-d)(a-b)$. **116.** $a(a+b)-(a+b)=(a+b)(a-1)$; $xz+xy-3y-3z=x(y+z)-3(y+z)=(y+z)(x-3)$; $(2a-3)(2a-3)(2a+3)$. **117.** $4mn-2nx+xy-2my=2n(2m-x)+y(x-2m)=2n(2m-x)-y(2m-x)=(2m-x)(2n-y)$. **118.** $\frac{5x}{7y}$; $\frac{3ab}{10m}$; $\frac{8a^2}{11b}$; $\frac{100m}{23bn}$. **119.** $\frac{9ab}{10x^2}$; $\frac{14a^3}{15b}$; $\frac{12x-1}{4a-4b}$. **120.** $\frac{17(a+b)}{34}=\frac{a+b}{2}$; $\frac{18a-14}{6-a}$. **121.** $\frac{ax^2+bx+c}{ax^2+x}$; $\frac{x^2+ax-b}{x^2-x}$. **122.** $\frac{x-1}{x}$; $\frac{3a^2}{b-a}$; $\frac{a-1}{b-2}$. **123.** $\frac{a^2+b^2-2ab}{a-b}$; $\frac{m^2-1}{m-1}$. **124.** $-\frac{3a}{6}$; $-\frac{5x^2}{3}$; $-\frac{a-1}{b}$; $-\frac{a}{x-2}$; $-\frac{m^2-n^2}{m-n}$. **125.** $\frac{1}{x}$; $\frac{2}{3m}$; $\frac{2a}{3b}$; $\frac{3xy}{8}$. **126.** $\frac{3b}{2x}$; $\frac{ac}{4b}$; $\frac{16axy^3}{15}$. **127.** $\frac{b}{a+b}$; $\frac{3y}{x-y}$; $\frac{a+2}{a-2}$. **128.** $\frac{a+1}{a-1}$; $\frac{1}{x+3}$; $\frac{a}{a-1}$. **129.** $\frac{x-1}{2x(x+1)}$; $\frac{a+x}{3b-cx}$; $\frac{5a}{a-x}$. **130.** $(a+b)(a-b)$; $\frac{1}{y^2-1}$. **131.** $\frac{18,4a}{6a}$; $\frac{4x^2,3y}{12xy}$; $\frac{x^2,16}{4x}$. **132.** $\frac{4bc,\ 6ac,\ ab}{2abc}$; $\frac{105b^2x^2,\ 40a^2x,\ 48a^2b^2}{60a^2b^2x}$. **133.** $\frac{20mx^3y^2,\ 9a^2b^2c}{12a^2bcmx^2y}$; $\frac{2a^2bx,\ y}{8a^3b^2}$. **134.** $\frac{15x^3,\ 120aby^4,\ 8a^2b}{40abx^4}$. **135.** $\frac{3(x+y)^2,\ 2(x-y)^2}{6(x^2-y^2)}$; $\frac{m-1,\ 2,\ 3(m-1)}{m^2-1}$. **136.** $\frac{2,\ 3a(x-1),}{(x-1)^2}$ $\frac{2x-1,\ 2(x-1),\ 1}{(x-1)(2x-1)}$. **137.** $\frac{3x,\ 4aby}{84a^3b^2}$; $\frac{(a-b)(a^2-b^2),2ab(a+b),\ b}{b(a^2-b^2)}$. **138.** $\frac{6bc+3ac+2ab}{6abc}$; $\frac{6+5x}{3x^2}$; $\frac{2a-2x-5}{4}$. **139.** $\frac{x^2-5x+2}{x^2}$. **140.** $\frac{1+x}{2}$; $\frac{5x-6}{3}$; $\frac{5-2x}{3}$. **141.** $\frac{1}{1-4x^2}$. **142.** $\frac{2a^2b-ab-2b^2}{a(a+b)(a-b)}$; $\frac{a^2}{a(a+b)(a-b)}$. **143.** $\frac{m^2}{(m+n)(n-1)}$. **144.** $-\frac{6b}{7x^2}$; $\frac{1}{5(1+a)x}$. **145.** $\frac{12x^2y^2}{n^4a^3}$; $2a(x-1)$. **146.** $\frac{a+2b}{b}$; $\frac{9b^2x^2y}{16a^2z}$. **147.** $\frac{3n^3}{5mp}$; $15a^2x^2y$. **148.** $\frac{1}{5(a-b)}$; $\frac{x+y}{x-y}$. **149.** Равенство 3-е, 4-е и 6-е — уравнения, остальные — тождества. **150.** 17,5; 5. **151.** 27; 9; 12. **152.** 3; 2; $\frac{13}{20}$. **153.** 2,7; 50. **154.** 9; -3; -4. **155.** 1; $5\frac{3}{7}$. **156.** $5\frac{1}{7}$. **157.** $7\frac{1}{13}$. **158.** 2. **159.** $-17\frac{25}{27}$. **160.** 1348 и 1200. **161.** 20, 30, 50. **162.** $2\frac{1}{2}$. **163.** 12,8 *кг* и 19,2 *кг*. **164.** 15 *км* и 18 *км*. **165.** 0. **166.** $\frac{c}{2(a-b)}$. **167.** $\frac{4-4a}{b-3}$.

168. $h=\frac{2q}{b_1+b_2}$. 169. $x=2,\ y=1;\ x=1,\ y=-2;\ x=-3,\ y=-3.$ 170. $x=-\frac{1}{2},\ y=1;\ x=5,\ y=1;\ x=7,\ y=2.$ 171. $x=\frac{35}{13},\ y=-\frac{23}{13}.$ 172. $x=\frac{c}{a+bm},\ y=\frac{mc}{a+bm};\ x=\frac{a+bm}{mn-1},\ y=\frac{an+b}{mn-1}.$ 173. $a=3,\ b=-5.$ 174. 1 р. 10 к. и 40 к. 175. 40 и 25. 176. 200; 11 *км*. 177. $1\frac{2}{3}$ *м*, $13\frac{1}{3}$ *м* и $9\frac{2}{3}$ *м*, $9\frac{1}{3}$ *м*. 178. $x=2,\ y=3,\ z=5.$ 179. $x=3\frac{1}{2},\ y=2\frac{1}{4},\ z=4.$ 180. $x=4,\ y=0,\ z=5.$ 181. $x=51,\ y=76,\ z=1.$ 182. $x=8,\ y=10,\ z=5.$ 183. $x=36,\ y=6.$ 184. $x=2,\ y=4,\ z=1,\ u=5.$ 185. $x=6,\ y=12,\ z=8.$ 186. Сложив 2-е уравнение с 3-м, получим: $2x=32,\ x=16.$ Вычтя из 1-го уравнения 2-е, получим: $2z=11,\ z=5\frac{1}{2}.$ Наконец, вычтя из 1-го уравнения 3-е, найдем: $2y=15\frac{1}{2},\ y=7\frac{3}{4}.$ 187. $1\frac{7}{8}p;\ \frac{1}{2}p;\ 5p.$ 188. 133; 150; 76. 189. $\pm 10;\ \pm 0{,}1;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{4};\ \pm a;\ \pm x.$ 190. 5; 27; a; $1+x$. 191. $+3;\ -3;\ +\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ -0{,}1.$ 192. $\pm 2;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm 3$; мнимые числа. 193. $\pm 2\cdot 3;\ \pm\frac{1}{2}\cdot 0{,}1\cdot 5;\ \pm 2ab;\ \pm 3axy^2.$ 194. $-3ab;\ \pm\frac{1}{2}ax;\ \sqrt[5]{a}\ \sqrt[5]{b}\ \sqrt[5]{c}.$ 195. $\pm a^2;\ \pm 2^2;\ \pm x^3;\ \pm(a+b)^2.$ 196. $2^2;\ -a^2;\ x^3;\ (m+n)^2.$ 197. $\frac{a}{5};\ -\frac{3}{10};\ \frac{a^2}{b};\ \frac{\sqrt[3]{x}}{y};\ \pm\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$ 198. $\pm 5a^3bc^2;\ \pm 0{,}6x^2y;\ \pm(b+c)^3x^2.$ 199. 17; 65; 247; 763. 200. 368, 978, 7563. 201. 8276; 20 548. 202. 534 762. 203. Последняя цифра квадрата целого числа должна быть одною из тех цифр, на которые оканчиваются квадраты первых 10 чисел: 0, 1, 2, 3 ... 9. Но ни один из этих квадратов не оканчивается ни на 2, ни на 3, ни на 7, ни на 8. 204. 9; 3,6; 3,606. 205. 10,05; 0,89. 206 и 207 не требуют ответа. 208. 0,77; 0,65; 0,79; 0,64; 0,16. 209. $\frac{1}{5}\sqrt{15}=0{,}7746$ $\left(\text{до }\frac{1}{5}\text{ тысячной}\right);$ $\frac{1}{7}\sqrt{21}=0{,}6547$ $\left(\text{до }\frac{1}{7}\text{ тысячной}\right);$ $\frac{1}{11}\sqrt{77}=0{,}7977$ $\left(\text{до }\frac{1}{11}\text{ тысячной}\right);$ $\frac{1}{12}\sqrt{60}=0{,}6455$ $\left(\text{до }\frac{1}{12}\text{ тысячной}\right);$ $\frac{1}{250}\sqrt{1750}=0{,}1673$ $\left(\text{до }\frac{1}{250}\text{ тысячной}\right).$ 210. 0,5; 2,4; 1,52; 0,05. 211. $\pm 7;\ \pm 3,\ \pm\sqrt{-25}.$ 212. $\pm 9;\ \pm 9.$ 213. 0 и $3\frac{1}{2}$; 0 и $-2\frac{1}{3}$; 0 и 3,75. 214. 0 и 1; 0 и 16; 0; 0. 215. 2 и 5; 0 и -4; 2 и -3. 216. 12 и 4. 217. 3 и -9. 218. 8 и $-2\frac{1}{4}$. 219. 2 и $-\frac{1}{4}$. 220. 44 и -2. 221. 1 и -5. 222. 6 и -3. 223. 4. 224. $d(2\pm\sqrt{3})$. 226. $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$. 227. $2\frac{1}{2}$ и -1. 228. $4\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$. 229. 1,5694 и 0,0306. 230. $\frac{5}{13}$ и $\frac{11}{5}$. 231. 7 и 0. 232. a и $\frac{1}{a}$. 233. 14 и -10. 234. 14, 16, 18. 235. 6 и 8. 236. 3, 4, 5. 237. 12. 238. 20 *км* в час. 239. 12. 240. Каждый ученик группы, состоявшей из 60 человек, получил по 3 листа.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Стр.

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ.

I. Алгебраическое знакоположение.

1. Употребление букв 3
2. Алгебраическое выражение. . 4
3. Действия, рассматриваемые в алгебре 5
4. Знаки, употребляемые в алгебре . . . . . —
5. Порядок действий 6

II. Свойства первых четырех арифметических действий.

6. Сложение 8
7. Вычитание . . . . . —
8. Умножение 9
9. Деление 10
10. Применение свойств действий. 11

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ.

I. Понятие о величинах, которые можно понимать в двух противоположных смыслах.

11. Задачи 13
12. Другие величины, которые можно понимать в двух противоположных смыслах . . . 14
13. Относительные числа 15
14. Изображение чисел на числовой оси . . . . . —

II. Сложение относительных чисел.

15. Задача 17
16. Сложение двух чисел . . . . —
17. Другое выражение правил сложения 18
18. Сложение трех и более чисел . 19

Стр.

III. Вычитание относительных чисел.

19. Задача 19
20. Нахождение разности как одного из двух слагаемых . . . —
21. Правило вычитания 21
22. Формулы двойных знаков . . —
23. Алгебраическая сумма и разность 22
24. Сравнение относительных чисел по величине . . . . . —

IV. Главнейшие свойства сложения и вычитания относительных чисел (25).

V. Умножение относительных чисел.

26. Задача 24
27. Умножение на отрицательное число 25
28. Правило умножения 27
29. Произведение трех и более чисел. Знак произведения . . 28
30. Степень отрицательного числа —

VI. Деление относительных чисел.

31. Определение 29
32. Вывод правила деления . . . —
33. Случаи, когда делимое или делитель равны нулю 30

VII. Главные свойства умножения и деления (34).

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

ЦЕЛЫЕ ОДНОЧЛЕННЫЕ И МНОГОЧЛЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ.

I. Предварительные понятия.

35. Одночлен и многочлен . . . 33
36. Коэфициент . . . . . —
37. Свойства многочлена 34
38. Приведение подобных членов 35

Стр.

II. Алгебраическое сложение и вычитание.

39. Сложение одночленов . . . 36
40. Сложение многочленов . . . —
41. Вычитание одночленов . . . 37
42. Вычитание многочлена . . . —
43. Раскрытие скобок, перед которыми стоит знак + или — . . 38
44. Заключение в скобки части многочлена 39

III. Алгебраическое умножение.

45. Умножение одночленов . . . —
46. Квадрат и куб одночлена . . 40
47. Умножение многочлена на одночлен 41
48. Умножение многочлена на многочлен 42
49. Расположенный многочлен . 43
50. Умножение расположенных многочленов 44
51. Высший и низший члены произведения . . . . . —
52. Число членов произведения . —
53. Некоторые формулы умножения двучленов 45
54. Применение этих формул . . 46
55. Куб суммы и куб разности двух чисел . . . . . —

IV. Алгебраическое деление.

56. Деление одночленов 47
57. Нулевой показатель 48
58. Признаки невозможности деления одночленов . . . . . —
59. Деление многочлена на одночлен . . . . . —
60. Деление одночлена на многочлен 49
61. Деление многочлена на многочлен . . . . . —
62. Деление расположенных многочленов . . . . . —
63. Признаки невозможности деления многочленов 51

V. Разложение на множители.

64. Предварительное замечание . 52
65. Разложение целых одночленов —
66. Разложение многочленов . . —

VI. Алгебраические дроби.

67. Отличие алгебраической дроби от арифметической 55
68. Основное свойство дроби . . —
69. Приведение членов дроби к целому виду . . . . . —
70. Перемена знаков у членов дроби 56
71. Сокращение дробей 57
72. Приведение дробей к общему знаменателю . . . . . —
73. Сложение и вычитание дробей 59

Стр.

74. Умножение дробей 60
75. Квадрат и куб дроби 61
76. Деление дробей . . . . . —
77. Замечания . . . . . —

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

I. Общие свойства уравнений.

78. Равенства и их свойства . . 62
79. Тождество . . . . . —
80. Уравнение 63
81. Равносильные уравнения . . 64
82. Первое свойство уравнений . 65
83. Следствия . . . . . —
84. Второе свойство уравнений . 66
85. Следствия 67
86. Умножение или деление частей уравнения на одно и то же алгебраическое выражение —
87. Посторонние корни 68

II. Уравнение с одним неизвестным.

88. Решение уравнений первой степени с одним неизвестным 69
89. Понятие о составлении уравнений 71
90. Буквенные уравнения 72

III. Системы уравнений первой степени.

Система двух уравнений с двумя неизвестными.

91. Задача 73
92. Нормальный вид уравнения первой степени с двумя неизвестными 74
93. Неопределенность одного уравнения с двумя неизвестными 75
94. Система уравнений . . . . . —
95. Способ подстановки . . . . —
96. Способ алгебраического сложения 76
97. Система уравнений с буквенными коэфициентами 78

Система трех уравнений с тремя неизвестными.

98. Нормальный вид уравнения первой степени с тремя неизвестными 79
99. Неопределенность двух и одного уравнения с тремя неизвестными . . . . . —
100. Система трех уравнений с тремя неизвестными 80
101. Способ подстановки . . . . —

Стр.

102. Способ алгебраического сложения 81

Некоторые особые случаи систем уравнений.

103. Случай, когда не все неизвестные входят в каждое из данных уравнений 82
104. Случай, когда неизвестные входят только в виде дробей —
105. Случай, когда полезно все данные уравнения сложить . . 83

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ.

I. Основные свойства корней.

106. Определение корня 85
107. Арифметический корень . . —
108. Алгебраический корень . . . 86
109. Извлечение корня из произведения, из степени и из дроби 87

II. Извлечение квадратного корня из чисел.

110. Предварительные замечания 88
111. Извлечение корня из целого числа меньшего 10 000, но большего 100 89
112. Извлечение корня из целого числа, большего 10 000 . . . 91
113. Число цифр корня 93

Стр.

III. Извлечение приближенных квадратных корней.

114. Два случая когда нельзя извлечь точный корень 94
115. Приближенный корень с точностью до 1 . . . . . —
116. Приближенный корень с точностью до $\frac{1}{10}$ 95
117. Приближенный корень с точностью до $\frac{1}{100}$, до $\frac{1}{1000}$ и т. д. 97
118. Извлечение корня из обыкновенных дробей 98

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ.

119. Задача 100
120. Нормальный вид квадратного уравнения . . . . . —
121. Решение неполных квадратных уравнений 101
122. Примеры решения полных квадратных уравнений . . . 103
123. Формула корней приведенного квадратного уравнения . . . 104
124. Общая формула корней квадратного уравнения 105
125. Упрощение общей формулы, когда коэфициент b есть четное число 107
126. Число корней квадратного уравнения . . . . . —

Ответы к упражнениям . 107

Редактор *С. Лебедев.* Техн. редактор *И. Кутин.*

Уполн. Главлита № Б-35621. Учпедгиз № 5660. У-21. Заказ № 3659. Тир. 825000 экз. (1—200 т.)
Формат бумаги 62×94¹/₁₆. Изд. листов 7. Бум. листов 3¹/₂. В бум. листе 109 344 печ. зн.
Сдано в набор 7/XII 1933 г. Подписано к печати 5/I 1934 г.

1 я Образцовая типография Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига", Москва, Валовая. 23.


2022607994