

445
324
Ю. О. ГУРВИЦ и Р. В. ГАНГНУС

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

УЧЕБНИК
ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ПЯТЫЙ ГОД ОБУЧЕНИЯ

Утверждено Коллегией Наркомпроса РСФСР



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1933

СПИСОК НЕОБХОДИМЫХ ПОСОБИЙ.

1. Набор циркульных ножек;
" масштабных линеек;
" чертежных треугольников (30° и 45°);
" транспортиров (и процентных транспортиров).
2. Классные: циркуль, угольник, линейка и транспортир.
3. Модели: 1) куб, развертка куба, кубический дециметр, деленный на кубические сантиметры;
2) прямоугольный параллелепипед или брус, брус с диагональным сечением;
3) прямая треугольная призма, рассеченная по высотам оснований, многоугольная призма с диагональными сечениями;
4) прямой, круговой цилиндр, развертка его;
5) шар и конус;
6) шарнирный угол;
7) смежные углы (шарнирные);
8) противоположные углы (шарнирные);
9) круг, разделенный на 12 или 24 равных сектора.
4. Миллиметровая бумага.



2022607269



Отв. редактор *С. Калецкий.*

Техн. редактор *И. Кутин.*

Книга сдана в набор 10/III 1933 г. Подписана к печати 4/IV 1933 г. Форм. бум. 82×110 см $1/32$. Уполномоченный Главлита № Б-27759. Учгиз № 4757. У-24. Заказ № 973. Тираж 500 000 экз.
В бум. л. 157 696 тип. зн. 4 печ. л.

1-я Образцовая типография Огиза РСФСР треста "Полиграфкнига". Москва, Валовая, 28.

1. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ.

§ 1. Физическое и геометрическое тело.

1. Нас окружает множество разнообразных предметов, или тел; каждое из них занимает определенную часть пространства. Тела отличаются друг от друга признаками, зависящими от материала, из которого тела сделаны: весом, твердостью, цветом, непроницаемостью, упругостью и т. д. Но тела обладают еще признаками, не зависящими от материала, из которого они сделаны, — это их величина и форма; последние два признака зависят исключительно от того, какую часть пространства занимают тела.

2. Тело со всеми его признаками, зависящими от материала, из которого оно сделано, называется физическим телом; изучением физического тела занимаются естественные науки: физика, химия и др. Геометрия же занимается изучением формы и размера тела независимо от того, из какого материала оно сделано. С точки зрения геометрии безразлично, будет ли тело, имеющее, скажем, форму куба, выпилено из дерева, высечено из камня, слеплено из глины или сделано из какого-нибудь иного материала; для нее важны только форма и размеры тела, а поэтому, занимаясь геометрией, необходимо научиться и уметь по ряду внешних признаков тела судить о его форме.

3. Форма есть неотъемлемое качество всякого тела. Нет в природе тела без формы. Если иногда пользуются выражением „бесформенное тело“, то этим хотят отметить, что форма тела такова, что нет возможности определить, на какое известное по своей форме тело оно похоже.

4. В геометрии мы будем рассматривать тела, не обращая внимания на их физические свойства, а потому мы будем

иметь дело не с каким-нибудь физическим телом, а с телом, как бы лишенным всех своих физических свойств, но вместе с тем, — что особенно важно, — сохранившим свою форму; такое тело называется геометрическим телом; оно есть ограниченная со всех сторон часть пространства, занимаемая физическим телом. Итак,

геометрическое тело есть ограниченная со всех сторон часть пространства, независимо от вещества, его заполняющего.

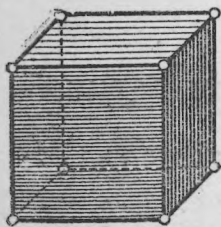


Рис. 1.

5. Во всяком теле различают три главных направления или измерения: длину, ширину и высоту. Некоторые из этих измерений носят иногда и другие названия; так, говорят о глубине колодца, о толщине доски, а не об их высоте.

Всякое тело можно делить на части. Рассматривая каждую часть тела отдельно, мы видим, что и она занимает определенную часть пространства, а поэтому является также телом.

Часть геометрического тела есть также геометрическое тело.

6. Рассмотрим одно из простейших геометрических тел — куб (рис. 1).

Куб, как и всякое тело, отделяется от всего остального пространства своими границами, своей поверхностью. Граница тела есть поверхность.

Поверхность куба состоит из шести отдельных частей, или граней, а потому куб может быть назван шестигранником; каждая грань куба представляет собою плоскую поверхность, или просто плоскость. Плоскость мы можем себе мыслить простирающейся безгранично во все стороны; грань куба есть только часть плоскости. Свойство плоскости состоит в том, что с нею всегда полностью

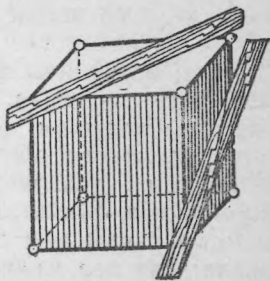


Рис. 2.

совпадает прямая линия — ребро линейки, в каком бы направлении ни передвигать ее по плоскости (рис. 2). Иной вид имеет поверхность шара (рис. 3). Его поверхность есть кривая поверхность; с кривой поверхностью прямая линия — ребро линейки — не совпадает.

7. Поверхность имеет два измерения: длину и ширину. Поверхность, как и тело, можно делить на части;

часть поверхности есть также поверхность и имеет те же два измерения: длину и ширину.

Каждая грань куба пересекается со всеми остальными гранями, кроме противоположащей. Так, верхняя грань куба (рис. 1) пересекается с четырьмя боковыми гранями и не пересекается только с одной — с нижней гранью.

8. Каждые две грани пересекаются по прямой линии; она называется стороной грани, или ребром куба. Сторона грани служит границей, отделяющей одну грань от другой, одну поверхность от другой поверхности. Границей поверхности является линия.

Линии бывают прямые и кривые. Ребро куба есть прямая линия; любая линия, проведенная на поверхности шара, может служить примером кривой линии. Линия имеет только одно измерение — длину.

9. Место пересечения ребер куба есть точка; эта точка называется вершиной куба. Граница линии есть точка; точка не имеет ни одного измерения.

Граница тела — поверхность, граница поверхности — линия, граница линии — точка.

Точки, линии и поверхности принадлежат только телам. Однако мы можем представить себе точки, линии и поверхности как бы снятыми с тел и рассматривать их отдельно от тел, независимо от них.

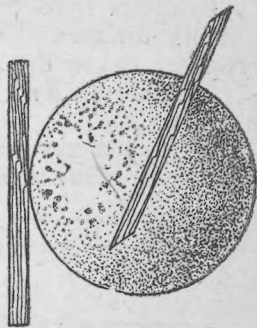


Рис. 3.

Вопросы и упражнения.

1. Что называется физическим телом?
2. Что называется геометрическим телом?
3. Что называется поверхностью, линией, точкой?
4. Какими свойствами тела занимается геометрия?
5. Чем отличается кривая поверхность от плоской поверхности?

§ 2. Куб, прямоугольный параллелепипед, прямая призма.

1. Куб. Признаки куба. У куба (рис. 1) следующие признаки, выделяющие его среди тел другой формы:

1) он отделен от всего остального пространства с шести сторон шестью гранями;

2) любые две его противоположащие грани не сходятся;

3) все грани куба равны между собою, и каждая грань есть плоская поверхность, или просто плоскость;

4) линия пересечения двух граней есть прямая линия — ребро куба, или сторона грани; у куба 12 ребер; у грани 4 стороны;

5) грань куба ограничена замкнутой линией, составленной из четырех разных сторон; каждые две пересекающиеся стороны грани образуют прямой угол; такая замкнутая линия есть геометрическая фигура и называется квадратом;

6) у куба восемь вершин; в каждой вершине пересекаются три грани куба, а также три ребра куба.

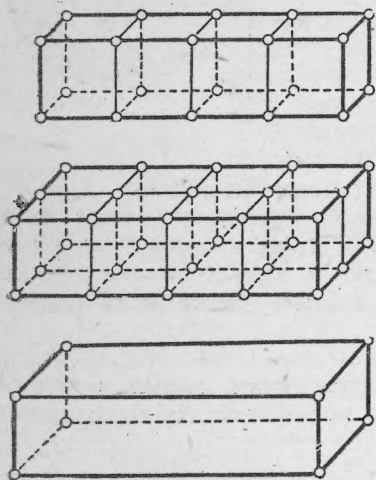


Рис. 4.

Нижняя грань куба, которая совпадает с плоскостью, на которую куб поставлен, называется нижним основанием куба, а противолежащая ей грань — верхним основанием; остальные четыре грани куба называются боковыми гранями; они составляют боковую поверхность куба. Если к боковой поверхности куба прибавить поверхность его верхнего и нижнего оснований, то получится полная поверхность куба.

В кубе все три его измерения — длина, ширина и высота — равны между собою. Длина = ширине = высоте.

Форма куба встречается у многих предметов; сооружения всякого рода, их части, ящики, игральные кости и т. п. имеют форму куба.

2. Прямоугольный параллелепипед. Поставим в ряд несколько одинаковых кубов вплотную друг к другу, затем приставим вплотную к этому ряду еще один ряд таких же по величине кубов (рис. 4), тогда получим тело, форма которого будет отличаться от куба.

Оно также ограничено шестью гранями, но грани его не квадраты, а прямоугольники; такое тело называется прямоугольным параллелепипедом, или брусом.

Прямоугольник есть геометрическая фигура, которая ограничена замкнутой линией, состоящей из четырех

сторон; стороны прямоугольника пересекаются под прямым углом, и противоположные стороны равны между собой.

Не все боковые грани прямоугольного параллелепипеда равны между собою; попарно равны противоположные боковые грани; равны также его верхнее и нижнее основания. Что касается ребер прямоугольного параллелепипеда, то попарно равны между собою все противоположные ребра обоих оснований и все боковые ребра.

У прямоугольного параллелепипеда три его измерения различны.

Сооружения всякого рода и их части, детали машин, вагоны железных дорог, ящики, комнаты, балки и т. п. имеют форму прямоугольного параллелепипеда.

3. Прямая правильная четырехугольная призма. Тело, ограниченное шестью гранями, из которых два основания — квадраты, а боковые грани — равные между собою прямоугольники, называется прямой правильной четырехугольной призмой (рис. 5).

Прямоугольный параллелепипед, две противоположные грани которого квадраты, есть прямая правильная призма.



Рис. 5.

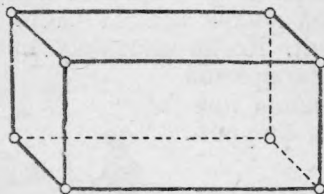


Рис. 6.

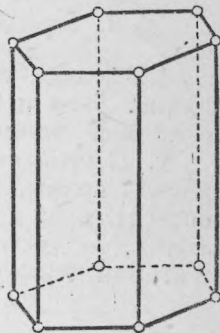


Рис. 7.

У прямой правильной призмы из трех ее измерений два измерения равны. Если поставить призму так, чтобы в ее основании лежал квадрат, то длина и ширина ее будут одинаковы, а высота иная (рис. 5); если же призму поставить так, что ее основанием будет боковая грань — прямоугольник, то равными будут у нее ширина и высота, длина же — иная (рис. 6).

4. Если основание призмы не квадрат, а геометрическая фигура, состоящая из трех, пяти, шести или большего числа сторон, боковые же грани — прямоугольники, то такая призма, в зависимости от числа сторон основания, называется

прямой треугольной, пятиугольной, шестиугольной (рис. 7) или многоугольной призмой.

Примерами многоугольной призмы служат граненый карандаш, ячейки пчелиных сотов и т. п.

Вопросы и упражнения.

1. Сколько ребер и сколько граней пересекаются в вершине куба?
2. Какую фигуру представляет собою грань куба?
3. Перечислить все внешние признаки куба.
4. Какое тело называется прямоугольным параллелепипедом? В чем его сходство и в чем его различие с кубом?
5. В чем отличие прямоугольника от квадрата?
6. Какое тело называется прямой правильной четырехугольной призмой? Какую фигуру представляют собой ее боковые грани, ее основания?
7. Можно ли куб и брус назвать призмами?
8. Какая призма называется прямой многоугольной призмой?
9. Сколько граней, ребер и вершин у прямой шестиугольной призмы?

II. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ.

§ 1. Прямая линия. Луч. Отрезок. Ломаная.

1. Из всех линий наиболее часто встречается прямая линия. Туго натянутая нить дает наглядное представление о прямой линии. Ребра куба — прямые линии.

2. В практической жизни весьма часто приходится проводить прямые линии. Когда плотнику или столяру нужно обтесать край доски по прямой линии, то для получения прямой они пользуются шнуром.



Рис. 8.

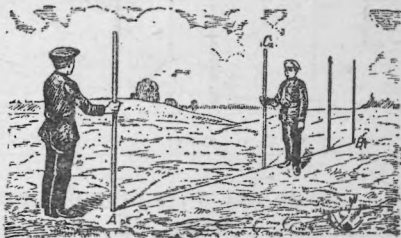


Рис. 9.

Применение шнура показано на рисунке 8. При землемерных работах приходится прокладывать, или, как говорят, провешивать на местности прямые линии. Как это делается, поясняет рисунок 9. Работу выполняют двое. Сперва отмечают вехами те две точки *А* и *В*, между которыми надо проложить прямую; затем один из участников работы стано-

вится у вехи *A*, другой же с набором вех идет по направлению к вехе *B* и втыкает по указанию первого между точками *A* и *B* веху *C* так, чтобы она находилась на прямой *AB*. Это достигается тем, что веха *C* покрывает веху *B*, когда из точки *A* смотрят на веху *B*. Так же устанавливаются затем и другие промежуточные вехи.

3. В чертежных работах прямые линии проводятся при помощи чертежной линейки. При выполнении чертежей приходится проводить линии, прямые и кривые, и отмечать ряд точек.

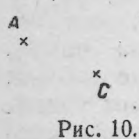


Рис. 10.



Рис. 11.

Чтобы знать, о какой линии или точке идет речь, их обозначают большими буквами латинского алфавита. Точка отмечается одной буквой, которая проставляется около нее. На рисунке 10 отмечены точки *A*, *B* и *C*. Прямая линия обозначается двумя буквами, которые ставятся на некотором расстоянии друг от друга (рис. 11).

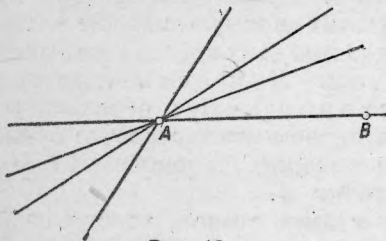


Рис. 12.

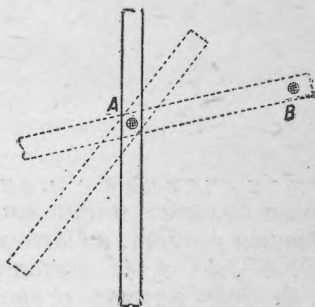


Рис. 13.

4. Прямая обладает рядом свойств.

Через одну точку, положим *A*, можно провести бесконечное множество прямых (рис. 12); все они имеют различное направление. Если дана еще одна точка, положим точка *B*, то из всех прямых, проходящих через точку *A*, только одна пройдет через точку *B*, а именно — прямая *AB*.

Если прибить деревянную планку гвоздем *A* к стене, то планке можно дать любое направление (рис. 13). Однако стоит только закрепить планку на стене еще в одном месте гвоздем *B*, как уже нельзя будет изменить положение планки. Два гвоздя *A* и *B*, которыми на стене прибита планка, определяют ее положение. Итак, опыт показывает, что

через две точки *A* и *B* можно провести только одну прямую.

Это — основное свойство прямой; из него вытекают другие:
1) Если две прямые проходят через одни и те же две точки, то они совпадают всеми своими точками.

2) Если две прямые имеют только одну общую точку, то они пересекаются.

Действительно, если бы две прямые пересекались не в одной точке, а в двух точках, то это означало бы, что через две точки проходят две различные прямые, что невозможно, так как из опыта, проверенного в течение многих веков человечеством, мы знаем, что через две точки нельзя провести две различные прямые и можно провести только одну прямую. Точка, в которой пересекаются две прямые, называется их точкой пересечения.

3) Прямую можно неограниченно продолжить в обе стороны.

5. Если на прямой линии взять где-либо точку, то она разделит прямую на две части; каждая из этих частей называется лучом. Луч есть прямая,

ограниченная с одной стороны. Луч обозначается двумя буквами, и при записи на первом месте ставится буква, стоящая у точки, из которой луч выходит. На рисунке 14 лучи AB , AC , AE и AF выходят из точки A .

6. Если прямая ограничена с двух сторон, то она называется отрезком. AB — отрезок прямой MN (рис. 15). Отрезок есть часть прямой, ограниченная с двух сторон.

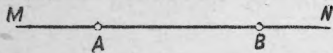


Рис. 15.

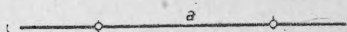


Рис. 16.

Отрезок прямой обозначается двумя большими буквами, которые ставятся у его концов, например отрезок AB . Часто отрезок прямой обозначается одной малой буквой (рис. 16), которая вместе с тем обозначает его длину, измеренную в определенных единицах мер длины; малая буква обычно ставится над отрезком или под ним, примерно, на середине.

7. Линия, составленная из отрезков прямой, которые не составляют одной прямой, называется ломаной. Квадрат и прямоугольник являются примерами замкнутой ломаной линии. На рисунке 17 AB — отрезок прямой MN ; $ACDEFB$ — ломаная; отдельные отрезки ломаной: AC , CD , DE и т. д., из которых она составлена, называются ее частями, или звеньями. Так, ломаная $ACDEFB$ состоит из пяти частей, или звеньев.

8. Отрезок прямой есть кратчайшее расстояние между двумя точками прямой.

Чтобы определить расстояние между какими-либо двумя точками, надо провести через них прямую и измерить отрезок, концами которого являются данные точки.

9. Проверка линейки. Проверить линейку — значит выяснить, является ли ее ребро прямой линией. Проверяют линейку так: проводят через две точки A и B по ребру линейки линию, а затем, не сдвигая линейки, поворачивают ее вокруг ребра AB на другую сторону и снова проводят через те же точки A и B линию. Если при этом обе линии совпадают, то линейка правильна.

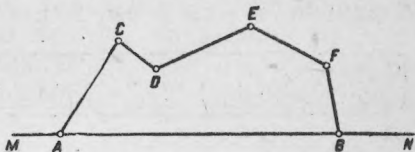


Рис. 17.

Вопросы и упражнения.

1. Как отбить прямую линию на стене?
2. Почему две прямые не могут пересечься в двух точках?
3. Какое различие между прямой и отрезком; между отрезком и лучом, между прямой и лучом?
4. Что называется ломаной? Чем являются ее части?
5. Как провести три взаимно пересекающиеся прямые, чтобы получить: 1) шесть лучей и 2) замкнутую ломаную линию?

§ 2. Измерение отрезков. Масштабная линейка.

1. Измерить отрезок — значит узнать, сколько раз взятая единица меры длины укладывается в данном отрезке.

При измерении небольших отрезков пользуются масштабной линейкой; масштабная линейка разделена на сантиметры и миллиметры. Длину отрезка можно измерить двумя способами: 1) одной только масштабной линейкой или 2) используя сперва циркуль, а затем масштабную линейку.

2. *Первый способ.* Чтобы измерить отрезок AB (рис. 18), прикладывают к нему масштабную линейку так, чтобы левый его конец приходился против нулевого деления, и отмечают, против какого деления линейки находится второй, правый конец отрезка; тогда проставленная на линейке метка указывает, скольким сантиметрам и миллиметрам равна длина измеряемого отрезка AB ; на рисунке 18 изображен отрезок AB длиной в 6 см 3 мм, или 63 мм.

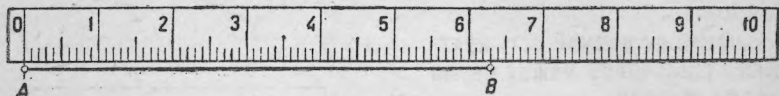


Рис. 18.

3. *Второй способ.* Чтобы измерить отрезок AB при помощи циркуля, поступают так: ставят острия ножек циркуля в точки A и B отрезка (рис. 19), и, не сдвигая ножек циркуля, переносят его на масштабную линейку; отсчет на линейке даст длину отрезка AB .

При измерении длины мы непосредственно сравниваем измеряемый отрезок с единицей меры длины; такое измерение называется непосредственным измерением.

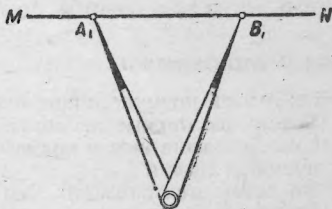
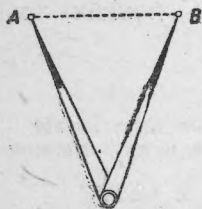


Рис. 19.

Вопросы и упражнения.

1. Что значит измерить длину отрезка?
2. Как устроена масштабная линейка? Какие доли единицы длины нанесены на нее? Как проверить, правильна ли масштабная линейка?
3. Измерить при помощи циркуля и масштабной линейки длину, ширину и высоту спичечной коробки, размер заглавных букв наименования книги, расстояние между строчками в тетради.
4. Измерить масштабной линейкой длину целого карандаша, длину и ширину тетради.
5. Изготовить самому масштабную линейку в 10 см, нанеся на нее сантиметры и разделив длину 1 см на миллиметры.
6. Провести в тетради прямую, отложить на ней на-глаз отрезок AB длиной в 4 см, а затем при помощи циркуля выяснить, на сколько отрезок AB меньше или больше 4 см.

§ 3. Сравнение отрезков.

1. Сравнить два отрезка — значит узнать, равны ли они, или узнать, который из них больше.

Два отрезка равны, если при наложении одного из них на другой концы их совпадают. При сравнении отрезков между собою приходится переносить их с одной прямой на другую. Это делается при помощи циркуля.

2. Дан отрезок AB ; требуется перенести его, или, как говорят, отложить на прямой MN (рис. 19). Для этого берут в циркуль отрезок AB и, не меняя расстояния между ножками циркуля, откладывают на прямой MN от некоторой точки A_1 отрезок A_1B_1 , равный данному отрезку AB . Записывается это так: $A_1B_1 = AB$.

3. Даны два отрезка AB и CD ; требуется сравнить их между собою (рис. 20). Для этого наложим отрезок AB на отрезок CD так, чтобы точка A упала в точку C и прямая AB пошла по прямой CD . Если точка B совпадет с точкой D , то отрезок AB равен отрезку CD . Запись: $AB = CD$.

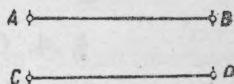


Рис. 20.

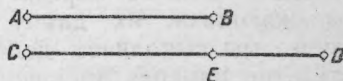


Рис. 21.

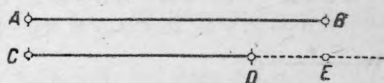


Рис. 22.

Если же при наложении AB на CD точка B упадет в некоторую точку E , лежащую между точками C и D (рис. 21), то AB меньше CD . Это записывается при помощи знака неравенства так: $AB < CD$; знак неравенства обращен своим острием к меньшей величине.

Наконец, возможен случай, когда при наложении AB на CD точка B упадет в точку E , которая лежит на продолжении CD за точкой D (рис. 22); тогда отрезок AB больше CD , что записывается так: $AB > CD$.

Вопросы и упражнения.

1. Что означает запись: 1) $a > c$, 2) $b < d$, 3) $m = n$, где a , b , c , d , m и n — отрезки?

2. Начертить в разных направлениях на-глаз два равных отрезка и проверить, действительно ли они равны.

3. Начертить отрезки длиной в 3,5 см; 6,6 см; 53 мм; 1 дм; 2 см 7 мм.

4. При рассмотрении рисунка 23 отрезок a кажется длиннее отрезка b и отрезок m кажется длиннее отрезка n . Проверить, действительно ли это так и нет ли здесь обмана зрения.

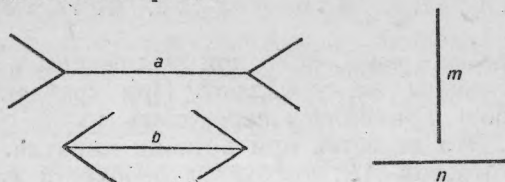


Рис. 23.

§ 4. Сложение отрезков.

1. Действия над отрезками можно выполнять двояко: арифметически или геометрически. В первом случае надо измерить данные отрезки, а затем выполнить над числами, выражающими их длину, указанные действия; во втором случае мы выполняем действия непосредственно над отрезками, не измеряя предварительно их длины.

2. Сложить несколько отрезков — значит найти такой новый отрезок, длина которого равнялась бы сумме длин данных отрезков.

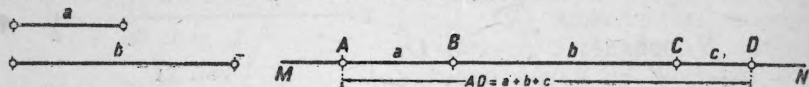


Рис. 24.

3. **Задача.** Сложить три отрезка a , b и c (рис. 24).

Решение. Проводим прямую MN и, начиная от некоторой точки A , откладываем на ней последовательно, один за другим, данные отрезки a , b и c так, что $AB = a$, $BC = b$ и $CD = c$; получим отрезок AD , который равен сумме данных трех отрезков. Следует заметить, что при сложении конец одного отрезка есть начало следующего отрезка.

Запись: $a + b + c = AB + BC + CD = AD$.

4. Длина отрезка AD не изменилась бы, если производить сложение данных отрезков в ином порядке, а именно — сложить сперва отрезки a и c и к отрезку, составляющему их сумму, прибавить отрезок b , или сперва сложить отрезки b и c и к их сумме прибавить отрезок a .

От изменения порядка слагаемых сумма не меняется.

§ 5. Вычитание отрезков.

1. Вычесть один отрезок из другого — значит найти такой новый отрезок, который указывал бы, на сколько один из данных отрезков больше или меньше другого.

2. **Задача.** Из отрезка $AB = a$ вычесть отрезок $CD = b$.

Решение. Наложим меньший отрезок $CD = b$ (рис. 25)

на больший отрезок $AB = a$ так, чтобы конец D первого отрезка совпал с концом B второго и отрезок CD пошел по отрезку AB в направлении от B к A ; конец C займет на отрезке AB положение точки C_1 , и оставшаяся на отрезке AB часть его AC_1 , равная отрезку m , есть разность данных отрезков $AB = a$ и $CD = b$.

Запись: $a - b = m$ или $AB - CD = AC_1$.

Мы выполнили геометрическое вычитание двух отрезков AB и CD и получили некоторый новый отрезок AC_1 , равный разности данных отрезков. Этот отрезок AC_1 показывает, на сколько отрезок AB больше отрезка CD .

Можно измерить длину отрезков AB , CD и AC_1 и проверить вычислением правильность ответа, полученного построением.

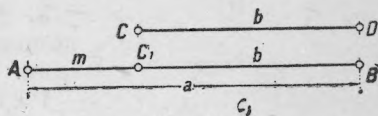


Рис. 25.

§ 6. Умножение отрезка на целое число.

1. Умножить отрезок на целое число — значит найти такой новый отрезок, который по длине равнялся бы данному отрезку, взятому слагаемым столько раз, сколько единиц в данном целом числе.

2. **Задача.** Умножить отрезок $AB = a$ на число 5 (рис. 26).

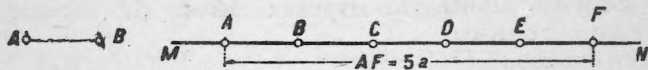


Рис. 26.

Решение. Умножение на целое число есть сложение одинаковых слагаемых, а потому $a \cdot 5 = a + a + a + a + a$; отсюда вытекает геометрическое решение задачи. На прямой MN от некоторой точки A откладывают последовательно 5 раз один и тот же отрезок $AB = a$; получается отрезок $AF = 5AB = 5a$.

§ 7. Деление отрезков.

1. Деление отрезка на 2, 4, 8 и т. д. равных частей. Разделить отрезок на 2, 4, 8 и т. д. равных частей—значит найти построением такой новый отрезок, длина которого равна половине, четверти, одной восьмой и т. д. данного отрезка.

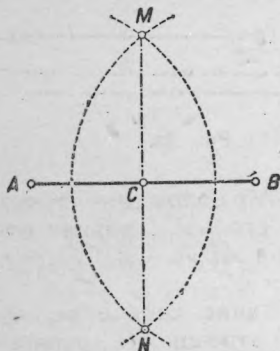


Рис. 27.

2. Задача. Разделить отрезок $AB=a$ пополам, т. е. на две равные части (рис. 27).

Решение. Раствором циркуля, немногим больше половины отрезка AB , проводим окружности, принимая за центры концы A и B отрезка AB . Эти окружности пересекутся в точках M и N . Затем эти точки соединяем прямою MN ; она пересечет данный отрезок AB в точке C . Точка C лежит на середине отрезка AB и, следовательно, $AC=CB$, в чем можно убедиться проверкой при помощи циркуля.

Разделив таким же построением пополам отрезки AC и CB , мы разделим отрезок AB на 4 равные части.

Продолжая деление каждого полученного отрезка пополам, можно разделить данный отрезок AB на 8, 16, 32 и т. д. равных частей.

3. Деление отрезка на отрезок. Разделить один отрезок на другой—значит узнать, сколько раз один отрезок содержится в другом или во сколько раз один отрезок больше или меньше другого.

4. Задача. Узнать, сколько раз отрезок CD содержится в отрезке AB (рис. 28).

Решение. Даны два отрезка AB и CD . Откладываем последовательно меньший отрезок CD на AB несколько раз; пусть он уложится на отрезке AB 4 раза, тогда резуль-

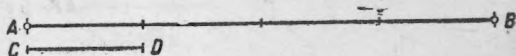


Рис. 28.

тат деления отрезка AB на CD , т. е. $\frac{AB}{CD}=4$. Значит, отрезок CD уложился в отрезке AB 4 раза, или AB в 4 раза больше CD , или CD в 4 раза меньше AB .

Рассмотрим случай, когда отрезок CD не укладывается целое число раз в отрезке AB .

Пусть отрезок CD укладывается на отрезке AB (рис. 29) 3 раза и получается остаток $AE = m$, т. е. $AB = 3 \cdot CD + AE$. Затем делим отрезок CD на мелкие доли, положим, — на восьмые доли, и узнаем, сколько раз восьмая часть отрезка CD уложится в остатке AE ; пусть она содержится в отрезке AE 5 раз, тогда

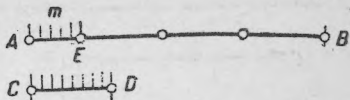


Рис. 29.

$$AB = 3CD + AE = 3CD + \frac{5}{8}CD = 3\frac{5}{8}CD.$$

Получается, что отрезок AB равен $3\frac{5}{8}CD$, а это значит, что отрезок AB больше отрезка CD в $3\frac{5}{8}$ раза или, что то же самое, отрезок CD в отрезке AB содержится $3\frac{5}{8}$ раза.

Сравнение двух отрезков AB и CD делением есть деление по содержанию; при этом деление сводится к последовательному вычитанию отрезка CD из отрезка AB .

Вопросы и упражнения к §§ 4—8.

1. Провести отрезок $a = 4,7$ см, отрезок $b = 52$ мм и найти построением их сумму.
2. Провести отрезок $a = 3,5$ см и продолжить его с каждой стороны на $b = 2,7$ см; результат записать в виде суммы трех отрезков.
3. Начертить ломаную, состоящую из 4 звеньев и найти ее длину (спрямить ломаную).
4. Начертить отрезки a и b . Найти построением отрезок $x = 3a + 2b$.
5. Измерить высоту a спичечной коробки, а затем найти построением $5a$.
6. Начертить два отрезка a и b и найти их разность. Результат записать.
7. Проверить построением, сколько раз уложится в отрезке $a = 11$ см отрезок $b = 2,5$ см.
8. Начертить отрезки a , b и c . Найти построением: 1) $a + b - c$; 2) $a + c - b$.
9. Начертить отрезки a и b . Найти построением отрезок $3b - 4a$.
10. Разделить построением пополам отрезок $a = 5$ см.
11. Начертить отрезок a произвольной длины, разделить его на 8 равных частей и отложить на чертеже отрезки, равные $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{4}$ данного отрезка.

$$12. \text{ Даны отрезки } m \text{ и } n. \text{ Найти отрезки } x = \frac{m}{2} + \frac{n}{2}; y = \frac{3m}{4} + \frac{n}{2}.$$

13. Отрезок $AB = n$ (рис. 30) равен сумме двух неизвестных отрезков a и b ; отрезок $CD = m$ равен разности тех же отрезков a и b . Найти сперва вычислением, а затем построением отрезки a и b .

14. Найти построением, сколько раз отрезок $CD = b$ содержится в отрезке $AB = a$ (рис. 31).

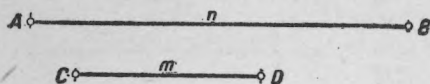


Рис. 30.

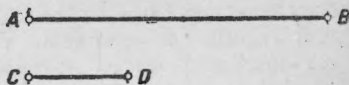


Рис. 31.

III. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДИ КВАДРАТА И ПРЯМОУГОЛЬНИКА.

§ 1. Измерение площадей.

1. Измерить площадь — значит сравнить ее с другой известной площадью, принятой за единицу. За единицу меры площади принимается площадь квадрата, сторона которого равна какой-либо линейной единице, например — миллиметру, сантиметру, метру и т. д.; такая единица меры называется квадратной мерой.

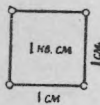


Рис. 32.

В зависимости от длины стороны квад-

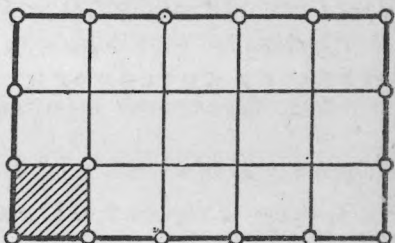


Рис. 33.

рата, принятой за единицу, квадратная единица меры площади называется квадратным миллиметром, квадратным сантиметром и т. д. (рис. 32).

Выбрав единицу меры площади, измеряют площадь фигуры, т. е. узнают, сколько квадратных единиц содержит измеряемая площадь.

2. При непосредственном измерении площади фигуры надо измеряемую площадь заполнить площадками, принятыми за единицу, как это показано на рисунке 33. Такой способ измерения можно применить при измерении небольших прямоугольных площадок; при измерении больших прямоугольных площадей, а также площадей других фигур способ непосредственного измерения неудобен.

Обычно пользуются иным способом — косвенным измерением, который сводится к измерению длины

отдельных отрезков фигуры, ее сторон и некоторых вспомогательных линий, проводимых в фигуре; измерив длину отдельных линий фигуры, находят величину ее площади вычислением.

§ 2. Площадь прямоугольника и квадрата.

1. Дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=6$ см и $AD=4$ см; требуется вычислить его площадь (рис. 34). Если разделить прямоугольник на поперечные полосы шириною в 1 см, то таких полос получится 6. Если затем разделить прямоугольник на продольные полосы шириною в 1 см, то получится таких полос 4, причем каждая поперечная полоса рассечется на 6 квадратов, весь же прямоугольник на $6 \cdot 4 = 24$ квадрата, каждый со стороною в 1 см и площадью в 1 кв. см; площадь прямоугольника $ABCD$ равна 24 кв. см.

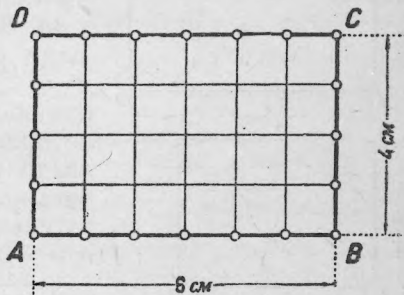


Рис. 34.

Выполнять такого рода построение каждый раз, когда надо измерить площадь какого-либо прямоугольника, излишне; поэтому поступают так: измеряют в одноименных линейных единицах меры обе смежные стороны прямоугольника $ABCD$, из которых одна — AB — называется основанием, а другая — AD — высотой прямоугольника, а затем перемножают полученные при измерении числа; произведение этих чисел и определяет размер площади прямоугольника в квадратных единицах того же наименования.

Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину или произведению его основания на высоту.

2. Если обозначить основание прямоугольника буквою a , его высоту — буквою h , а площадь — буквою S , то полученное правило для вычисления площади прямоугольника запишется сокращенно в виде формулы так

$$S_{\square} = ah \quad \text{квadrатных единиц,}$$

т. е. площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту.

3. Пример. Найти площадь двух прямоугольников — одного со сторонами 6 см и 8 см, другого со сторонами 10 см и 4,8 см (рис. 35).

$$S_1 = 6 \cdot 8 = 48 \text{ кв. см}; \quad S_2 = 10 \cdot 4,8 = 48 \text{ кв. см.}$$

У обоих прямоугольников $ABCD$ и $KLMN$ оказались равные площади, хотя сами прямоугольники и не равны, так как при наложении одного на другой они не совпадут.

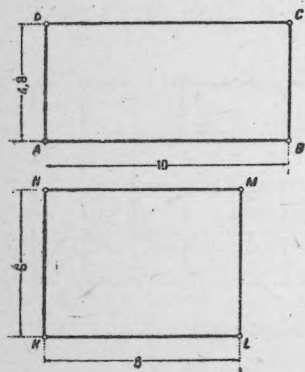


Рис. 35.

Фигуры, имеющие одинаковую площадь, называются равновеликими.

4. Формула для вычисления площади квадрата получается из формулы площади прямоугольника, так как квадрат есть прямоугольник, у которого все стороны равны. Ширина квадрата равна его длине или высота равна его основанию, следовательно, площадь S квадрата равна $a \cdot a = a^2$, где a — основание. Итак,

$$S_{\square} = a^2 \text{ квадратных единиц.}$$

Эта формула читается так:

площадь квадрата равна квадрату его стороны.

5. Задача 1. Вычислить площадь прямоугольного участка земли со сторонами в 375 м и 280 м.

Решение. $S = ah = 375 \cdot 280 = 10\,500 \text{ кв. м} = 105 \text{ а.}$

Задача 2. Определить площадь квадрата, периметр которого, т. е. сумма всех его сторон, составляет 22 м.

Решение. Обозначим искомую сторону квадрата через x . По условию задачи периметр $P = 4x = 22 \text{ м}$, отсюда $x = \frac{22}{4} = 5,5 \text{ м}$. Зная сторону квадрата, определяем его площадь:

$$S = x^2 = 5,5^2 = 30,25 \text{ м}^2.$$

Вопросы и упражнения.

1. Что значит измерить площадь фигуры?
2. Какова длина стороны квадрата, площадь которого равна: 1) 1 а и 2) 1 га?
3. В чем заключается непосредственное и косвенное измерение площади фигуры?

4. Как изменится площадь прямоугольника, если его основание a оставить без изменения, высоту же h : 1) увеличить в 2 раза, 2) уменьшить в 3 раза?

5. От скольких величин зависит площадь прямоугольника? квадрата?

6. Почему равные фигуры также равновелики?

7. Вычислить площадь прямоугольника, если даны:

№	1	2	3	4	5	6
a	4,5 см	2 м 12 см	1 см 6 мм	0,48 м	100 м	2 км 75 м
h	3 см	1 м 5 см	0,70 см	35 см	250 м	1 км 40 м

8. Участок земли имеет форму прямоугольника. Вычислить его площадь в арах, если известно, что его стороны равны 280 м и 360 м.

9. Какой длины должен быть прямоугольный участок земли при ширине в 160 м, если им заменить участок квадратной формы со стороной в 200 м?

10. Два равновеликих участка земли надо обнести забором; один из участков имеет форму квадрата со стороной в 150 м, другой — форму прямоугольника, одна сторона которого равна 100 м. Вычислить, на каком участке забор будет длиннее и на сколько?

11. Вычислить отдельные величины, входящие в формулу площади прямоугольника $S = ah$, если дано:

№	1	2	3	4	5
a	8 см	1 м 25 см	?	18 см 5 мм	74 м
h	7 см	?	2,5 мм	10 см 4 мм	?
s	?	3725 см ²	10 мм ²	?	37 а

12. Найти сторону квадрата, площадь которого равна: 1) 36 кв. м; 2) 225 кв. см; 3) 1,44 кв. м.

13. Вычислить световую площадь окна прямоугольной формы, размеры которого 0,8 м и 1,6 м, причем оконный переплет составляет 4,2% всей площади окна.

14. Площадь окон классной комнаты должна составлять одну пятую площади пола. Проверить, соответствует ли указанной норме световая площадь окон вашего класса. Если нет нормы или она превышена, то как велико отклонение от нормы?

§ 3. Прямоугольные диаграммы.

Для наглядного изображения числовых зависимостей между величинами и явлениями общественной жизни пользуются различного рода диаграммами.

1. Основная задача диаграммы состоит в том, чтобы при помощи чертежа сравнить несколько числовых данных. Рассмотрим столбчатые или прямоугольные диаграммы. Для изображения величин при помощи прямоугольных диаграмм берутся прямоугольники с одинаковыми основаниями, но разными высотами; высота отдельных прямоугольников будет тем больше, чем больше изображаемая ею величина.

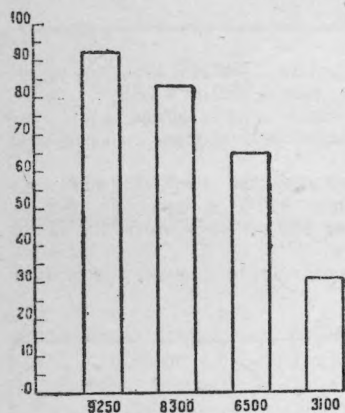


Рис. 36.

Лист, на котором вычерчивается диаграмма, ограничен в своих размерах, поэтому высоту прямоугольника откладывают в таком масштабе, чтобы наибольшая из величин, которые надо изобразить на диаграмме, могла уложиться на взятом листе.

Числовые данные откладываются на диаграмме обычно в каком-либо масштабе, поэтому для удобства пользования диаграммой нередко изображают на ней также и масштаб. Прямая, на которой расположены основания всех прямоугольников, называется осью диаграммы.

2 Часто на диаграммах изображают не самые числа, характеризующие то или иное явление, а процентные отношения между ними.

3. На рисунке 36 дана диаграмма численности книг библиотеки по отдельным вопросам. Так, число книг по вопросам общественно-политическим равно 9250, по технике равно 8300, по вопросам естественно-научным равно 6500, по сельскому хозяйству равно 3100. Для удобства пользования диаграммой около каждого прямоугольника проставляют числа, с указанием единиц, в которых они выражены.

4. Задача. На заводе работает 825 рабочих мужчин, 350 женщин и 75 подростков. Показать на диаграмме процентное соотношение числа мужчин, женщин и подростков на данном заводе.

	Число	Процент к итогу
Мужчины	825	66
Женщины	350	28
Подростки	75	6
Итого	1250	100%

Берут прямоугольник произвольной ширины и высоту в 100 каких-либо единиц, положим 100 мм; тогда 66% соответствуют 66 мм, 28% — 28 мм и 6% — 6 мм.

Эти размеры и откладывают по высоте прямоугольника. Получается диаграмма-рисунок.

Вопросы и упражнения.

1. Почему изображаемые на диаграмме величины откладываются в определенном масштабе?

2. Изобразить в виде прямоугольной диаграммы состав класса по полу (мальчики и девочки) и по социальному происхождению (дети рабочих, крестьян, служащих, прочих).

3. Построить диаграмму для иллюстрации среднего числа дней в году, когда возможны в отдельных районах полевые работы, по следующим данным: Крым — 335 дней; Кавказ — 280 дней; Киевский район — 240 дней; Московский район — 220 дней; Архангельский район — 185 дней.

4. Изобразить в виде диаграммы успеваемость учащихся вашей группы, всей школы в целом, по отдельным предметам.

5. Использовать цифровые данные, публикуемые в газетах, о ходе посевной кампании и сборе урожая по отдельным районам, добыче угля и нефти, выплавке чугуна, выпуске машин и т. п. и изобразить в виде диаграмм данные за определенный промежуток времени.

IV. ПОВЕРХНОСТЬ И ОБЪЕМ КУБА И ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА.

§ 1. Развертка и поверхность куба и прямоугольного параллелепипеда.

1. Развертка куба получается, если расположить все грани куба в одной плоскости, как это показано на рисунке 37.

Развертка куба есть фигура, составленная из шести одинаковых квадратов, которые можно различным образом расположить на плоскости, как это видно из рисунка 38.

2. Развертка куба дает наглядное представление как о боковой поверхности куба, так и о его полной поверхности. Боковая поверхность куба есть сумма площадей четырех боковых его граней, из которых каждая есть квадрат. Если ребро куба равно a сантиметрам, то площадь одной грани составит a^2 , и боковая поверхность куба S_6 будет равна $4a^2$:

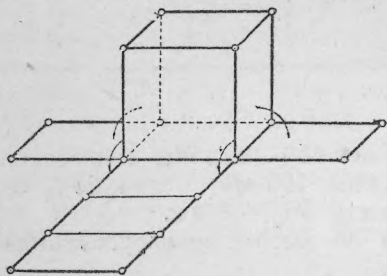


Рис. 37.

$$S_6 = 4a^2 \text{ кв. см.}$$

Чтобы найти полную поверхность куба, нужно к его боковой поверхности прибавить величину площади верхнего и нижнего оснований; площадь каждого основания равна a^2 , а потому полная поверхность куба S_n будет равна $4a^2 + 2a^2 = 6a^2$:

$$S_n = 6a^2 \text{ кв. см.}$$

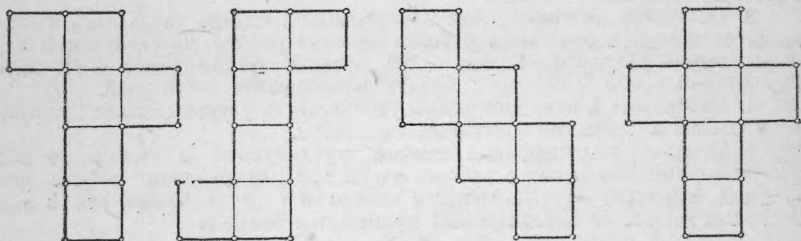


Рис. 38.

3. Числовой пример. Дан куб, ребро которого равно 5 см. Вычислить его боковую и полную поверхность.

Решение.

1) Площадь одной грани $= 5 \cdot 5 = 25$ кв. см.

2) Боковая поверхность куба $= 4 \cdot 25$ кв. см $= 100$ кв. см.

3) Полная поверхность куба $= 6 \cdot 25$ кв. см $= 150$ кв. см.

4. На рисунке 39 начерчен прямоугольный параллелепипед и его развертка; она состоит из шести прямоугольников, попарно одинаковых; у четырех прямоугольников одна и та же длина, равная длине AB параллелепипеда.

Чтобы вычислить боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, надо найти сумму площадей четырех его боковых граней, каждая из которых есть прямоугольник.

Площадь одной боковой грани равна произведению ее основания на высоту, которая одновременно является также и высотой параллелепипеда. Обозначив эту высоту буквою h , определим площадь каждой грани отдельно:

- 1) площадь грани $AA_1B_1B = AB \cdot h$;
- 2) " " $BB_1CC_1 = BC \cdot h$;
- 3) " " $CC_1D_1D = CD \cdot h$;
- 4) " " $DD_1A_1A = DA \cdot h$.

Сумма площадей всех четырех боковых граней равна:

$$AB \cdot h + BC \cdot h + CD \cdot h + DA \cdot h = \\ = (AB + BC + CD + DA) \cdot h = P \cdot h,$$

где буквою P обозначена сумма сторон, т. е. периметр основания $ABCD$ параллелепипеда. Итак,

$$S_6 = P \cdot h \quad \text{кв. ед.}$$

Формула эта читается так:

боковая поверхность прямоугольного параллелепипеда равна произведению периметра его основания на высоту.

Точно так же находят боковую поверхность любой прямой призмы.

5. Чтобы определить полную поверхность прямоугольного параллелепипеда, необходимо к боковой его поверхности прибавить площади нижнего и верхнего оснований;

площади оснований равны между собой, поэтому достаточно к боковой поверхности прибавить удвоенную площадь одного из оснований.

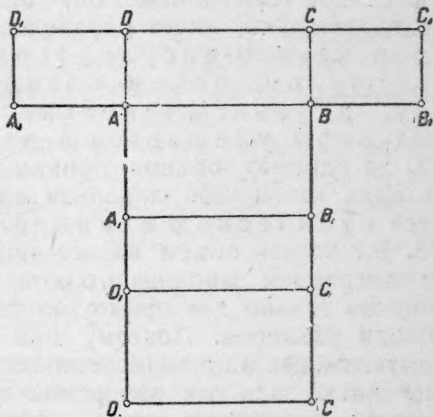
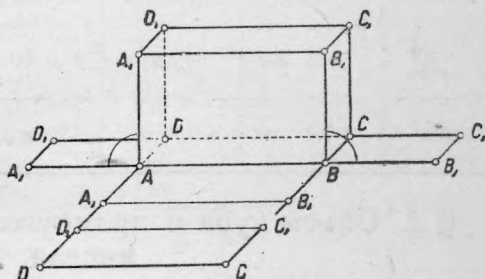


Рис. 39.

Вопросы и упражнения.

1. Чему равны боковая и полная поверхности куба со стороной 3 см? 10 см? и сантиметров?
2. Начертить развертку куба со стороной в 6 см, наклеить ее на картон и сделать модель куба, надрезав слегка ножом стороны квадратов развертки.
3. Найти боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, измерения которого 8 см, 5 см и 3 см.
4. Определить боковую и полную поверхности прямоугольного параллелепипеда по следующим данным:

№	1	2	3	4	5
Длина a	12 см	0,80 м	2 м 25 см	2,5 см	$3\frac{1}{2}$ м
Ширина b	6,5 см	52 см	1 м 80 см	1,2 см	$2\frac{1}{4}$ м
Высота h	7,2 см	0,55 м	0,90 м	80 мм	$1\frac{3}{4}$ м

§ 2. Объем куба и прямоугольного параллелепипеда.

1. Всякое тело занимает определенную часть пространства и, следовательно, имеет определенный объем. Измерить объем какого-нибудь тела — значит сравнить его с телом, объем которого принят за единицу, и узнать, сколько раз принятая единица меры уместается в данном объеме.

2. За единицу объема принимают куб, ребро которого есть одна какая-либо линейная единица. Такой куб называется кубической единицей.

3. Вычислять объем какого-нибудь тела непосредственным измерением, заполняя его объем кубическими единицами, возможно только для прямоугольных параллелепипедов небольших размеров. Поэтому при вычислении объема тел пользуются, как и при измерении площадей фигур, косвенным измерением; зная три измерения тела — его длину, ширину и высоту, производят затем необходимые расчеты.

4. Требуется определить объем прямоугольного параллелепипеда, у которого длина $a=3$ см, ширина $b=2$ см и высота $c=4$ см (рис. 40). За единицу измерения принимается 1 куб. см.

Надо узнать, сколько кубических сантиметров укладывается в один ряд по длине параллелепипеда. Число кубических сантиметров, которые уложатся в один ряд по длине параллелепипеда, равно числу сантиметров его длины, а потому один ряд будет содержать по длине 3 куб. см. Таких рядов можно уложить по основанию параллелепипеда два, что соответствует числу сантиметров ширины данного параллелепипеда. Итак, один слой кубических сантиметров, которыми покрылось основание параллелепипеда, составляет $3 \cdot 2 = 6$ куб. см. Необходимо еще узнать, сколько слоев содержит весь объем тела. Каждый слой имеет толщину в 1 см, и число слоев равно числу сантиметров высоты параллелепипеда, т. е. четырем. Общее число кубических сантиметров в объеме данного прямоугольного параллелепипеда равно $6 \text{ куб. см} \times 4 = 24 \text{ куб. см}$. Очевидно, что это число

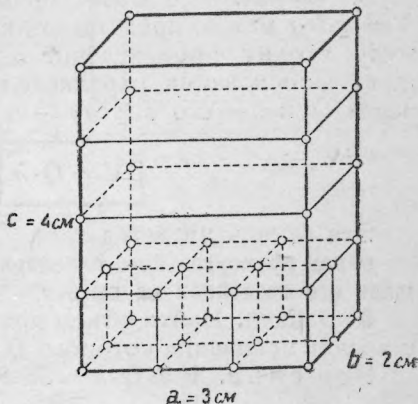


Рис. 40.

получилось от умножения чисел 3, 2 и 4, выражающих длину, ширину и высоту параллелепипеда. Отсюда:

объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений: длины, ширины и высоты.

5. Обозначив объем прямоугольного параллелепипеда буквою V , длину — через a , ширину — через b и высоту — через c , получим формулу, выражающую объем прямоугольного параллелепипеда в кубических единицах:

$$V = a \cdot b \cdot c \text{ кубических единиц.}$$

6. Из формулы объема прямоугольного параллелепипеда получаем формулу для вычисления объема куба любых размеров. В кубе все три измерения одинаковы, а потому формула объема куба будет: $V = a \cdot a \cdot a$, где a — ребро куба, или

$$V = a^3 \text{ кубических единиц.}$$

7. Задача 1. Вычислить объем комнаты, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда длиной в 6 м, шириною в 2,5 м и высоту в 4 м.

Решение. $V = 6 \cdot 2,5 \cdot 4 = 60$ куб. м.

Задача 2. Вычислить объем куба, ребро которого равно 7 см.

Решение. $V = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ куб. см.

8. Формулу объема прямоугольного параллелепипеда $V = a \cdot b \cdot c$ можно представить в несколько ином виде. В формулу входит произведение $a \cdot b$, что выражает собою площадь Q основания параллелепипеда, а потому, заменяя ab через Q и c — его высоту — через h , можно записать:

$$V = Q \cdot h \quad \text{кубических единиц.}$$

Эта запись читается так:

объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.

9. Задача. Найти объем прямоугольного параллелепипеда, площадь основания которого $Q = 35$ кв. см, а высота $h = 8$ см.

Решение. $V = Q \cdot h = 35 \cdot 8 = 280$ куб. см.

Вопросы и упражнения.

1. Как найти объем бруса непосредственным измерением? косвенным измерением?

2. Чему равен объем правильной прямой четырехугольной призмы?

3. Чему равен объем прямой правильной призмы, в основании которой лежит квадрат со стороною в 12 см, а высота ее равна 15 см?

4. Во сколько раз увеличится объем куба, если увеличить ребро куба в 2 раза? уменьшить в 3 раза? Проверить ответы на вопросы задачи на кубе с ребром в 6 см.

5. При уменьшении (увеличении) ребра куба его объем уменьшился (увеличился) в 64 раза; как изменятся при этих условиях его боковая и полная поверхности?

6. Площадь основания куба равна 81 кв. см. Чему равен объем куба?

7. Объем куба равен 64 куб. см. Чему равны его боковая и полная поверхности?

8. Комната имеет форму прямой правильной четырехугольной призмы; чему равна сторона основания комнаты, если известно, что объем ее равен 25,2 куб. м, а высота равна 2,8 м?

9. Из листа жести, имеющего форму прямоугольника (рис. 41) со сторонами в 50 см и 30 см, сделан открытый сверху ящик следующим образом: по углам листа вырезали 4 равные квадрата со стороною в 6 см, а края листа согнули так, что они образовали боковые стороны ящика. Найти емкость этого ящика.

10. Деревянный ящик изготовлен из досок толщиной в 1,5 см. По наружному обмеру длина его составляет 1,6 м, ширина равна 95 см и высота 50 см. Найти емкость этого ящика.

11. Вычислить вес воздуха в классе длиною в 8,0 м, шириною в 6,0 м и высотой в 4,5 м, если известно, что 1 куб. м воздуха весит 1,3 кг.

12. Измерения картонной коробки составляют $20\text{ см} \times 8\text{ см} \times 10\text{ см}$. Сколько таких коробок можно уложить в ящике с квадратным основанием со стороною 1,6 м при глубине ящика 1,4 м?

13. Сколько литров воды вмещает сосуд длиною в 30 см при ширине в 20 см и высоте в 50 см? 1 л воды занимает объем, равный 1 куб. дм.

14. Сколько кубических сантиметров в 1 куб. дм? Какой объем занимают 4 л воды? Сколько литров воды содержится в 1 куб. м?

15. Сколько гектолитров воды вмещает бассейн длиною в 3 м, шириною в 1,5 м при глубине в 2 м? 1 гектолитр (г.л.) = 100 литрам (л).

16. При составлении проекта школьного здания на 300 учащихся наметили школьный зал шириною в 15 м. Вычислить, какова должна быть длина и высота этого зала, если известно, что на одного учащегося надо предусмотреть 2,5 кв. м пола и 12,5 куб. м воздуха.

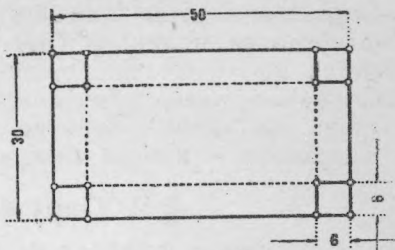


Рис. 41.

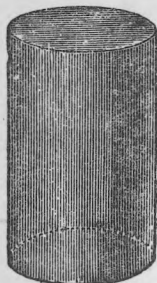


Рис. 42.

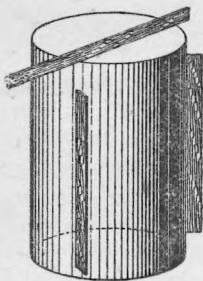


Рис. 43.

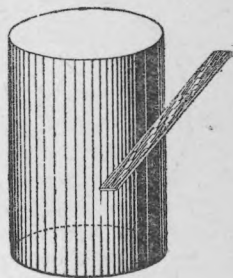


Рис. 44.

V. ЦИЛИНДР. ОКРУЖНОСТЬ. КРУГ.

§ 1. Цилиндр.

1. На рисунке 42 изображено тело, которое называется цилиндром. Такую форму имеют очень многие предметы и в окружающей нас обстановке и в технике. Примером служат: стаканы, трубы, колонны, валы, котлы и т. п.

2. Приложим к поверхности модели цилиндра ребро линейки, как показано на рисунке 43. Мы видим, что ребро линейки к основаниям цилиндра прилегает вплотную

в любом направлении. Значит, цилиндр с обоих концов ограничен плоскостями. Если же мы приложим ребро линейки сбоку, то только в одном направлении (рис. 43) не будет просветов между поверхностью и ребром. Во всяком другом направлении ребро линейки коснется только в одной точке поверхности цилиндра (рис. 44). Такая поверхность называется кривой. Следовательно, боковая поверхность цилиндра — кривая, поверхность цилиндрическая. Итак, основания цилиндра — плоские поверхности, а боковая его поверхность — кривая поверхность.

§ 2. Окружность и круг.

1. Поставим цилиндр на лист бумаги и обведем по краю его основания карандашом. Мы получим кривую замкнутую линию ABC , которая называется окружностью (рис. 45).

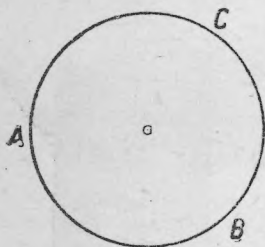


Рис. 45.

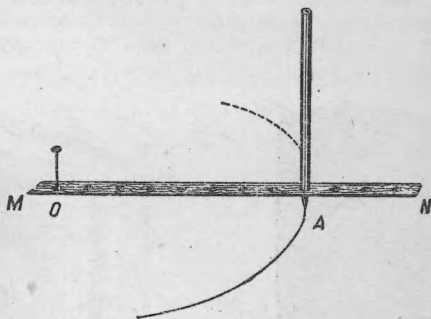


Рис. 46.

2. Для вычерчивания окружности бондарь поступает так: вырезав из толстой бумаги (картона) или из фанеры планочку MN (рис. 46), он просверливает в ней, примерно, на расстоянии 1 см друг от друга ряд отверстий; воткнув через одно из этих отверстий (O) в доску гвоздь, он вдевает в другое отверстие (A) острие карандаша; вращая планочку около неподвижной точки (O) по плоскости доски, он получает окружность, вычерчиваемую острием карандаша. При этом острие карандаша (A) находится все время на одном и том же расстоянии от точки O . Точка O называется центром окружности, а отрезок OA — радиусом окружности. Значит,

окружностью называется замкнутая кривая линия на плоскости, все точки которой отстоят на одном и том же расстоянии от одной точки, называемой центром окружности.

Из самого определения и вычерчивания окружности следует, что в окружности можно провести бесчисленное множество радиусов; все они равны между собою (рис. 47). (Сравнить со спицами колеса).

3. Садовник, чтобы вычертить окружность, пользуется веревкой с петлями на концах (рис. 48). В одну петлю он вставляет колышек и вбивает его в землю, а в другую вставляет острую палку и водит ею по земле, все время натягивая веревку (рис. 48).

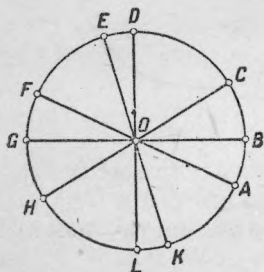


Рис. 47.

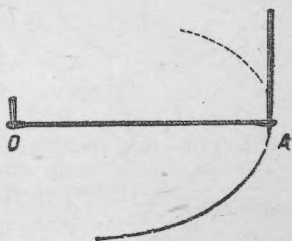


Рис. 48.

4. Чертежник для вычерчивания окружности пользуется циркулем, одна ножка которого вставная для карандаша или рейсфедера. Этим же прибором и мы будем пользоваться при вычерчивании окружности.

5. Если увеличить расстояние между двумя отверстиями на планочке (рис. 46) или увеличить длину веревки (рис. 48), или расстояние между остриями ножек циркуля, то тем самым увеличится и сама окружность. Отсюда заключаем:

с увеличением радиуса окружности увеличивается и сама окружность.

6. Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется кругом.

Таким образом основаниями цилиндра служат круги. Бондарь сначала вычерчивает на доске окружность и затем по ней выпиливает круг.

7. Начертим на бумаге одним из указанных выше способов, например с помощью циркуля, две окружности одного и того же радиуса (рис. 49), т. е. так, чтобы $O_1A_1 = O_2A_2$. Вырежем затем аккуратно по окружности из бумаги два круга. Наложим круг с центром O_2 на круг с центром O_1 так, чтобы их центры совпали, тогда круги совпадут, совпадут и их окружности.

Две окружности, или два круга, одинакового радиуса при наложении совпадают, т. е. они равны.

Основания цилиндра — два равных круга.

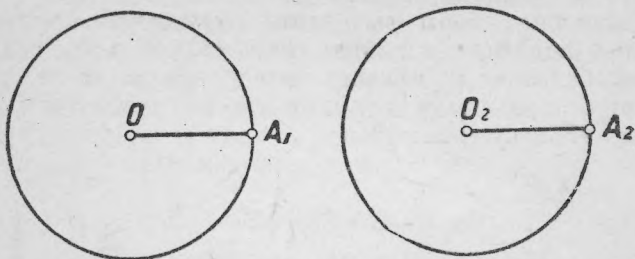


Рис. 49.

8. Начертим две окружности с одним и тем же центром O , но разного радиуса OA и OB (рис. 50). Такие две окружности называются концентрическими.

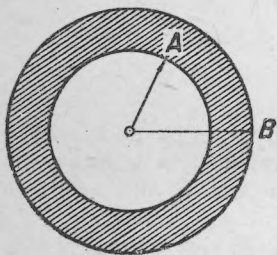


Рис. 50.

Концентрическими являются внешний и внутренний края обода колеса; концентрическими будут также внешняя и внутренняя окружности поперечного сечения трубы.

Часть плоскости между двумя концентрическими окружностями называется кольцом (заштрихованная часть на рис. 50). Кольцом является поперечный разрез трубы.

Вопросы и упражнения.

1. Где лежат на плоскости точки, равноудаленные от одной данной точки?
2. Диаметр внешней окружности кольца равен 12,3 см, диаметр внутренней окружности равен 5,7 см. Найти ширину кольца.
3. Начертить окружность с центром в точке O радиусом, равным 4 см. Где лежат точки, расстояние которых от центра равно 6 см? 3 см? 4 см?

§ 3. Дуга. Хорда. Диаметр. Сектор.

1. На рисунке 51 дана окружность с центром O . Часть окружности AB называется дугой. Слово дуга принято обозначать знаком $\frown$. Так например, пишут: $\frown AB$ и говорят: дуга AB .

2. Отрезок AB (рис. 51), концами которого служат концы дуги AB , называется хордой.

Хордой называется всякий отрезок, концами которого служат две точки окружности.

Так например отрезок MN (рис. 51) — хорда окружности с центром в точке O . Принято говорить: хорда MN „стягивает“ дугу MKN , или: $\frown MKN$ стягивается хордой MN .

3. В окружности с центром O проведен радиус OA (рис. 52) и продолжен за O в противоположном направлении до пересечения с окружностью в точке B . Прямая AB , т. е. хорда, проходящая через центр окружности, называется диаметром.

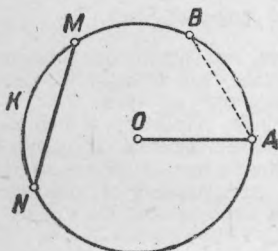


Рис. 51.

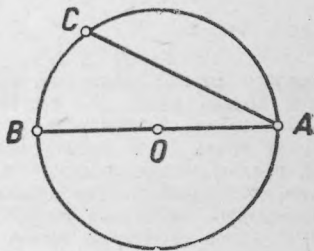


Рис. 52.

Обозначив длину диаметра через D , а длину радиуса — через R , получим: $D = 2R$, или $R = \frac{1}{2}D$, т. е.

диаметр равен двум радиусам; радиус равен половине диаметра.

Если из точки A провести еще какую-нибудь хорду AC , то непосредственным измерением можно убедиться, что хорда AC короче диаметра.

Диаметр — наибольшая из хорд окружности.

4. Начертим на листе бумаги окружность и аккуратно вырежем по ней круг. Проведем диаметр круга и перегнем круг по диаметру, тогда обе части круга совпадут; следовательно,

диаметр делит круг и окружность пополам, а именно — на два полукруга и две полуокружности.

Хорда также делит круг и окружность на две части, но эти части не равны между собою — одна меньше полуокружности, а другая больше полуокружности. Когда говорят, что хорда стягивает дугу, то имеют в виду меньшую дугу, если нет каких-либо особых оговорок.

5. Если в круге проведены два радиуса OA и OB (рис. 53), то часть круга, ограниченная ими (OA и OB) и дугой AMB называется сектором (на рисунке сектор заштрихован).

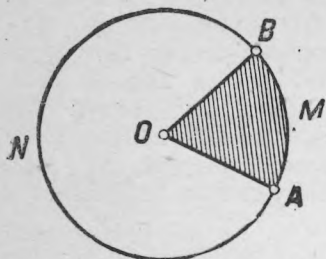


Рис. 53.

Понятно, что не заштрихованная часть круга является также сектором, дуга которого больше полуокружности. И в данном случае, когда нет особой оговорки, имеется в виду сектор с меньшей дугой.

Вопросы и упражнения.

1. Начертить две концентрические окружности разных радиусов. Радиусы окружностей относятся, как 2:5, ширина кольца равна 11,7 см. Найти радиусы окружностей.

2. Начертить окружность радиуса $R = 2$ см. Провести в ней радиус OA и от точки A в последовательном порядке вписать в окружность хорды, равные каждой радиусу, т. е. 2 см. Конец последней хорды должен совпасть с точкой A . На сколько равных дуг разделится окружность? Как называется замкнутая фигура, сторонами которой служат хорды?

3. Сколько диаметров можно провести в окружности? Будут ли они равны?

4. Провести в окружности два диаметра. На какие части они делят друг друга?

5. Пользуясь задачей 2, показать, как разделить круг на 6 равных секторов.

6. Радиус окружности равен 10,5 см. Найти длину наибольшей ее хорды.

7. Диаметр данной окружности равен 12 см. Радиус концентрической окружности вдвое меньше радиуса данной. Определить диаметр ее.

VI. УГЛЫ.

§ 1. Окружность и угол. Прямой угол.

1. Из точки M проведены два луча MA и MB (рис. 54). Они образуют угол. Точка M называется вершиной угла, а лучи MA и MB — сторонами угла. Угол обозначается тремя буквами: одна проставляется у вершины угла, а две другие — на его сторонах. При записи угла тремя буквами та буква, которая обозначает вершину, всегда пишется посередине. Слово „угол“ заменяется обычно знаком $\angle$. Таким образом, пишут: $\angle AMB$ или $\angle BMA$ и читают угол AMB или угол BMA .

Иногда угол, когда его нельзя смешать с другим углом, обозначают и одной только буквой у вершины, например: $\angle M$; иногда угол обозначается буквой (малой) между сторонами у вершины или цифрой: $\angle a$ или $\angle 1$.

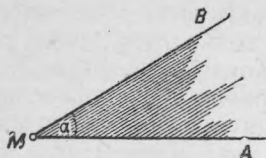


Рис. 54

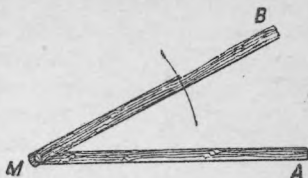


Рис. 55.

2. Пусть две планочки MA и MB скреплены концами своими (M) шарниром (рис. 55). Если планочку MA оставить неподвижной, а планочку MB вращать по направлению, указанному стрелкой, то угол будет увеличиваться. Если же вращать MB в противоположном направлении, то угол уменьшается. О величине угла мы судим по степени наклона одной его стороны к другой. На рисунке 56 угол 1 больше угла 2, или угол 2 меньше угла 1.

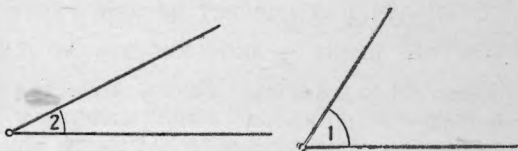


Рис. 56.

Записывается это так: $\angle 1 > \angle 2$, или $\angle 2 < \angle 1$.

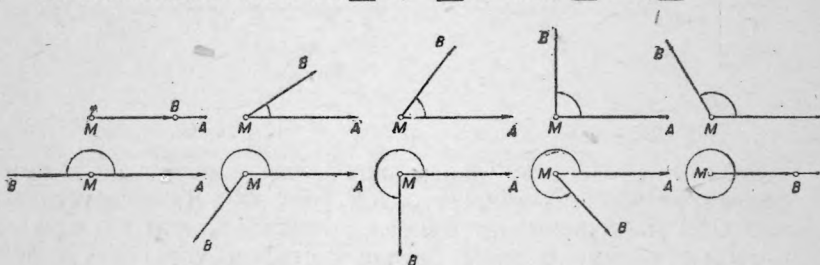


Рис. 57.

На рисунке 57 показано постепенное увеличение угла при повороте его стороны MB . В начальном положении обе стороны угла MA и MB совпадают. В этом случае говорят, что мы имеем нулевой угол.

3. Возьмем на стороне MB угла AMB произвольную точку K и проследим за ее движением при повороте стороны MB по направлению, указанному стрелкой (рис. 58). При повороте стороны MB точка K все время будет находиться на одном и том же расстоянии от M , т. е. она будет описывать дугу окружности с центром в точке M радиуса, равного MK . Когда MB , при полном повороте около M , снова совпадет с MA , точка K опишет окружность. Значит, с увеличением угла увеличивается и дуга KK_1 , и чем больше дуга KK_1 , тем больше и $\angle AMB$ и, наоборот, чем больше $\angle AMB$, тем больше дуга KK_1 .

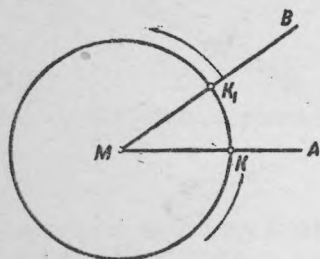


Рис. 58.

4. Рассмотрим некоторые особые углы.

Если луч MB сделает четверть поворота (рис. 59), т. е. KK_2 будет равна $\frac{1}{4}$ окружности, то соответствующий угол называется прямым. Таким является угол между горизонтальным и вертикальным направлением двух прямых. Такими являются и углы прямоугольника и квадрата.

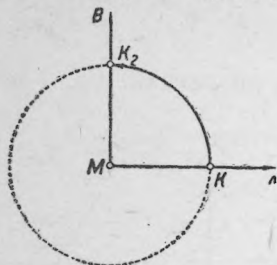


Рис. 59.

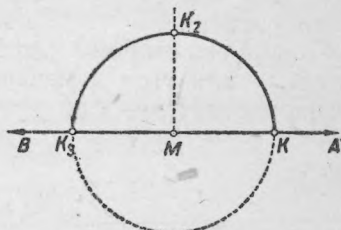


Рис. 60.

Если луч MB при своем вращении сделает половину оборота, то точка K опишет $\smile KK_3$ (рис. 60), и соответствующий угол AMB называется развернутым, или выпрямленным углом. В этом случае у сторон угла MA и MB направления противоположные и они составляют одну прямую (диаметр KK_3).

Развернутый угол равен двум прямым углам.

Каждый прямой угол соответствует $\frac{1}{4}$ поворота, а потому все прямые углы равны; также равны все развернутые углы.

Повернув MB еще на $\frac{1}{4}$ поворота, мы получим угол больший развернутого угла и равный трем прямым углам (рис. 61).

Наконец, повернув MB еще на $\frac{1}{4}$ поворота, мы увидим, что MB совпадет с MA . В этом случае получается полный угол, соответствующий одному полному повороту луча и, следовательно, равный 4 прямым углам (рис. 62).

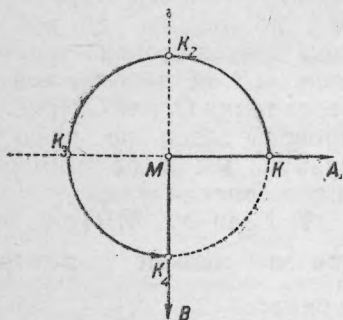


Рис. 61.

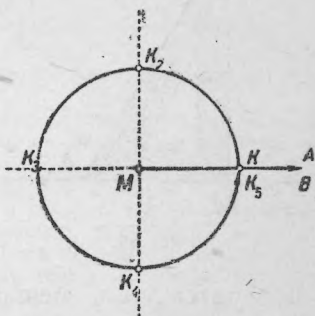


Рис. 62.

5. Две прямые MA и MB (рис. 59), образующие при своем пересечении прямой угол, называются взаимно перпендикулярными: MB перпендикулярна к MA и, наоборот, MA перпендикулярна к MB . Точно так же MK_2 (рис. 60) перпендикулярна к KK_3 и KK_3 перпендикулярна к MK_2 . Слово „перпендикуляр“ заменяют значком $\perp$, а поэтому пишут (рис. 61): $KK_3 \perp K_2K_4$ или $K_2K_4 \perp KK_3$, и читают: KK_3 перпендикулярна к K_2K_4 или K_2K_4 перпендикулярна к KK_3 .

6. Для проведения перпендикуляров на бумаге пользуются чертежным треугольником (рис. 63). В нем $\angle AMK$ — прямой, т. е. $AM \perp MK$ или $MK \perp AM$.

Задача. Дана прямая CD и требуется провести к ней перпендикулярную прямую (рис. 64).

Решение. Наложим треугольник на рисунок так, чтобы сторона MA совпала с CD , и проведем по стороне MB прямую MK . Тогда $MK \perp CD$.

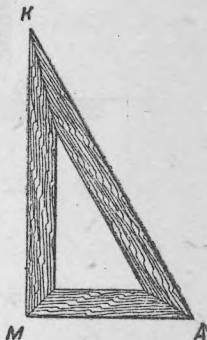


Рис. 63.

Точно так же поступают, когда требуется провести прямую, перпендикулярную к данной прямой CD , через какую-нибудь точку, лежащую на ней (O_1) или вне ее (O_2). Мы прикладываем к прямой линейку, к линейке прикладываем треугольник так, чтобы край его MA совпал с линейкой; двигаем треугольник стороной его MA по линейке до тех пор, пока другая сторона треугольника MB не пройдет как раз через точку O_1 или O_2 (рис. 65); проведя затем по краю MB прямую, мы и получим искомым перпендикуляр.

Рис. 64.

7. Если луч MB (рис. 66, 1) сделал меньше $\frac{1}{4}$ поворота,

то получится угол, меньший прямого.

Угол меньший прямого называется острым.

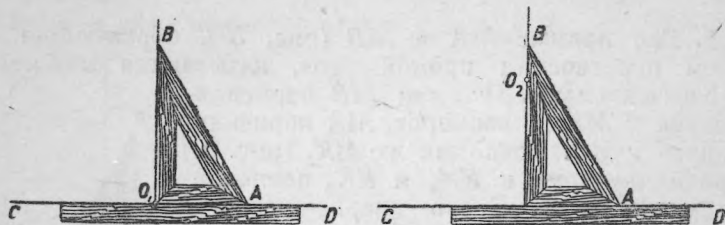


Рис. 65.

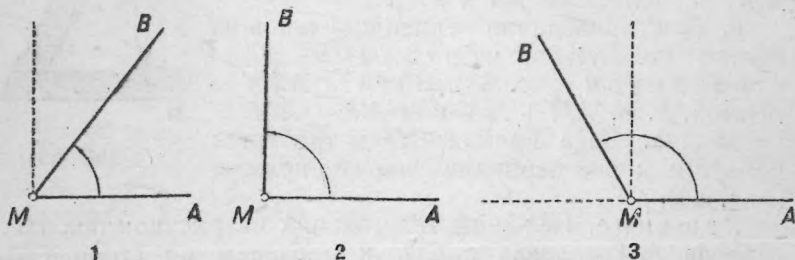


Рис. 66.

Если луч MB сделал больше четверти, но меньше половины поворота (рис. 66, 3), то мы получаем угол, больший прямого, но меньший развернутого.

Угол, больший прямого, но меньший развернутого называется тупым.

Вопросы и упражнения.

1. Какой угол образуют стрелки часов в 2 часа? в 3 часа? в 5 часов? в 6 часов?

2. Начертить прямую и две точки на ней. Провести через эти точки прямые, перпендикулярные к данной прямой.

3. Начертить прямую и две точки по разные стороны от нее. Провести через эти точки прямые, перпендикулярные к данной прямой.

4. Начертить окружность и провести в ней два взаимноперпендикулярных диаметра.

5. Начертить окружность и из произвольной точки ее провести две взаимноперпендикулярные хорды. Провести из центра два радиуса, перпендикулярные к этим хордам.

6. В данной окружности провести хорду AB . В конце B хорды провести к ней перпендикулярную хорду BC ; в конце C хорды BC провести к ней перпендикулярную хорду CD и, наконец, в конце D хорды CD провести хорду, перпендикулярную к CD . Если чертеж сделан аккуратно, то последняя хорда должна пройти через точку A . Какая получится фигура?

§ 2. Измерение угла. Транспортир.

1. Окружность принято делить на 360 равных частей (дуг); каждая $\frac{1}{360}$ окружности называется дуговым градусом.

Если соединить точки деления окружности с центром O , то весь круг разделится на 360 равных секторов. Угол каждого из этих секторов имеет вершину в центре, и сторонами его являются радиусы. Каждый из 360 углов называется угловым градусом. Слово „градус“ заменяется нуликом, который ставится сверху справа от числа градусов ($^{\circ}$); так, пишут: $\angle 20^{\circ}$ и читают: дуга в 20 градусов и $\angle 20^{\circ}$ —угол в 20 градусов.

Угол с вершиной в центре окружности называется центральным. Следовательно,

сколько в дуге дуговых градусов, столько в соответствующем центральном угле угловых градусов.

Итак, окружность	содержит	360°	дуговых
и полный угол	„	360°	угловых;
четверть окружности	„	90°	дуговых
и прямой угол	„	90°	угловых;
половина окружности	„	180°	дуговых
и развернутый угол	„	180°	угловых.

2. 1° дуговой (угловой) делится на 60 равных частей — 60 дуговых (угловых) минут. Слово „минута“ обозначается черточкой сверху справа от числа минут ('). Так, пишут: $14^\circ 15'$ и читают: 14 градусов 15 минут.

$1'$ дуговая (угловая) в свою очередь делится на 60 равных частей — 60 дуговых (угловых) секунд. Слово „секунда“ обозначается двумя черточками сверху справа от числа секунд ("). Так, пишут: $23^\circ 21' 34''$ и читают: 23 градуса 21 минута и 34 секунды.

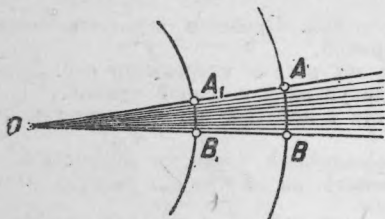


Рис. 67.

3. На рисунке 67 мы имеем угол AOB , разделенный на 10 градусов. Точка O принята за центр, и проведены 2 concentрические окружности, пересекающие стороны угла. Каждая из дуг AB и A_1B_1 содержит по 10° дуговых, но

каждая дуга в 1° окружности радиуса OB больше дуги в 1° окружности радиуса OB_1 . Таким образом, разные по длине дуги ($\widehat{AB} > \widehat{A_1B_1}$) разных окружностей, соответствующие одному и тому же углу, содержат одинаковое число градусов (минут и секунд); но чем больше радиус окружности, тем больше длина дуги в 1 градус.

Величина дугового градуса зависит от длины радиуса.

Если дуговой градус зависит от длины радиуса, то угловой градус не зависит от длины радиуса окружности. Отсюда мы заключаем, что величина угла не зависит от длины его сторон.

4. В то же время мы видим, что число дуговых градусов (минут и секунд)

равно числу угловых градусов (минут и секунд) центрального угла. Поэтому говорят, что центральный угол измеряется соответствующей ему дугой.

Это свойство относится ко всяким углам, ибо всякий угол мы можем рассматривать как центральный.

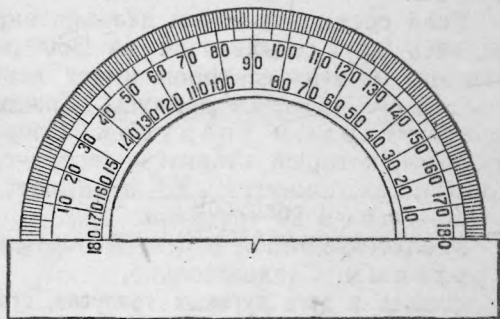


Рис. 68.

Зависимостью между углом и дугой и пользуются для измерения и построения углов с помощью так называемого переносного круга, или транспортира. Это — полукруг или, вернее, полукольцо (рис. 68) из картона, металла или целлулоида с нанесенными на нем делениями в 1° каждое. Деления эти для удобства отсчета нанесены на полукруг в одном и в другом направлении. Заканчивается полукруг обычно масштабной линейкой с делениями на сантиметры и миллиметры; один край линейки совпадает с диаметром полукруга; на линейке имеется метка, совпадающая с центром круга. Линейка и полукруг составляют одно целое.

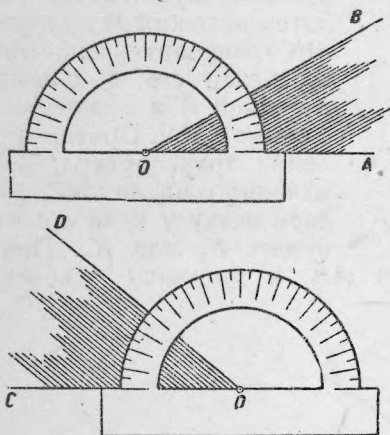


Рис. 69.

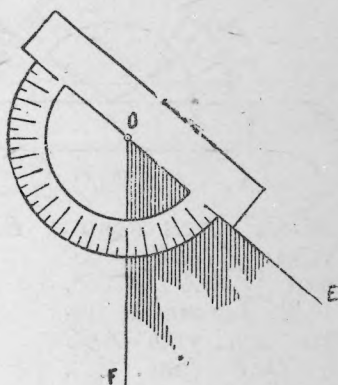


Рис. 70.

5. Измерение углов с помощью транспортира. Имеем углы AOB , COD и EOF (рис. 69 и 70). Чтобы измерить величину их, наложим транспортир на угол AOB так, чтобы центр транспортира O совпал с вершиной угла O и чтобы диаметр транспортира совпал с направлением одной из сторон угла, например, с OA . В первом случае мы имеем дугу в 30° , во втором — дугу в 40° и в третьем — дугу в 50° . Следовательно, $\angle AOB = 30^\circ$, $\angle COD = 40^\circ$ и $\angle EOF = 50^\circ$. Иногда на транспортире имеются еще деления на полуградусы; четверти градуса определяются на-глаз.

Вопросы и упражнения.

1. Что называется дуговым градусом?
2. Что называется угловым градусом?
3. Какой угол называется центральным?



4. Как называется $\frac{1}{90}$ прямого угла?
5. Изменится ли величина угла, если продолжить его стороны?
6. Какую дугу описывает конец часовой стрелки в 1 час? в 5 часов?
7. Что такое транспортир?
8. Начертить острый и тупой углы и измерить их с помощью транспортира.

§ 3. Построение угла. Сравнение углов.

1. Задача 1. Построить угол в 35° .

Решение. Чтобы построить угол в 35° , мы поступаем так: берем произвольную прямую MN (рис. 71) и на ней произвольную точку A . Затем наложим на прямую MN транспортир так, чтобы центр его O совпал с точкой A и диаметр — с прямой MN . Против деления транспортира, отмеченного числом 35° , делаем метку у края его на бумаге K_1 или K_2 . Про-

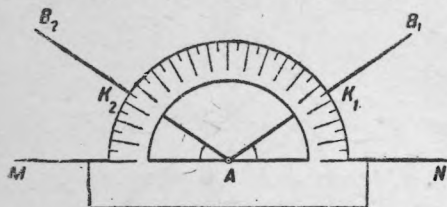


Рис. 71.

водим затем прямые BA_1 или AB_2 и получаем искомые углы: $\angle NAB_1 = 35^\circ$ или $\angle MAB_2 = 35^\circ$.

2. Задача 2. Даны два угла ABC и DEF (рис. 72). Который из них больше?

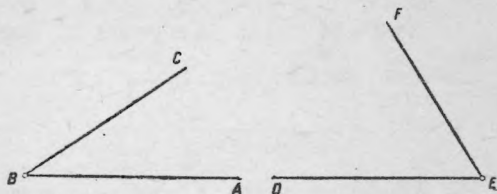


Рис. 72.

Решение. Измерив каждый из них транспортиром, мы найдем, что $\angle ABC = 34^\circ$, а $\angle DEF = 58^\circ$. Следовательно, $\angle DEF > \angle ABC$.

3. Задача 3. Дан угол ABC (рис. 73). Построить угол, равный ему.

Решение. Измерим $\angle ABC$ транспортиром (40°); перенесим затем транспортир на произвольную прямую MN и строим при произвольной точке ее B_1 угол в 40° . Получаем $\angle A_1B_1C_1$, равный данному $\angle ABC$.

Запись: $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

4. Обе предыдущие задачи можно решить и без транспортира, с помощью циркуля и линейки. Даны углы ABC и

DEF (рис. 74). Проведем радиусом $BA = ED$ две окружности: одну с центром в B , а другую с центром в E . Дуги AC и DF заменяют собою дуги транспортира. Измерив затем циркулем или взяв в циркуль расстояние DE , проведем дугу (пересекающую дугу AC) с центром в A радиусом, равным DF . Тут могут представиться 3 случая: 1) дуга эта пересечет дугу AC в точке C , тогда $\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC$ и углы равны; 2) дуга эта пересечет дугу AC в точке K_2 (внутри $\sphericalangle ABC$), тогда $\sphericalangle DEF < \sphericalangle ABC$; 3) дуга пересечет дугу AC в точке K_3 вне угла ABC , тогда $\sphericalangle DEF > \sphericalangle ABC$.

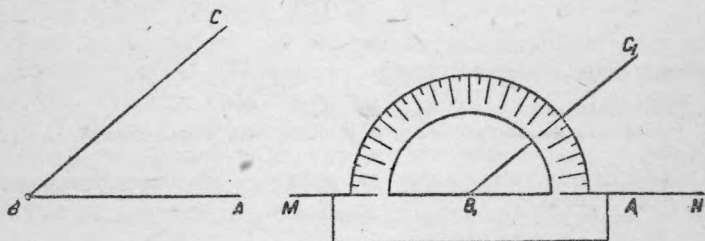


Рис. 73.

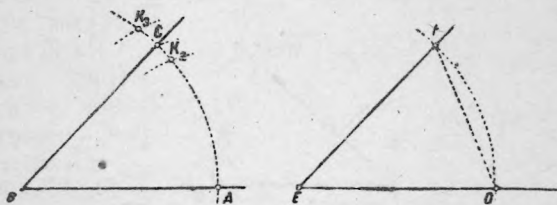


Рис. 74.

Таким же образом можно построить угол, равный данному, не прибегая к его измерению.

Пусть требуется построить угол, равный данному углу ABC (рис. 75). Возьмем произвольную прямую MN и на ней произвольную точку B_1 . Проведем две окружности одинакового радиуса (произвольного) с центрами в точках B и B_1 : первая пересекает стороны данного угла в точках A и C , вторая пересекает MN в точке A_1 . Взяв в циркуль расстояние AC , проводим две дуги одного и того же радиуса AC — одну с центром в A , другую — с центром в A_1 . Первая пересечет

дугу AC в точке C , вторая — дугу A_1C_1 , в точке C_1 . Проведя затем из B_1 прямую B_1C_1 , мы получим $\angle A_1B_1C_1$, равный данному $\angle ABC$: дуги AC и A_1C_1 соответствуют дугам транспортира, а так как они равны, то равны и углы, т. е. $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

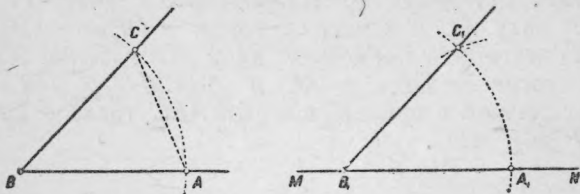


Рис. 75.

Вопросы и упражнения.

1. Построить углы в 45° , 65° , 80° , 110° , 150° .
2. Начертить какой-нибудь угол и построить угол, равный ему (двумя способами).
3. Как сравнить между собою два угла: 1) с помощью транспортира и 2) с помощью циркуля?

§ 4. Действия с углами.

1. Задача. Даны два угла: $\angle ABC$ и $\angle DEF$ (рис. 76). Найти сумму этих углов.

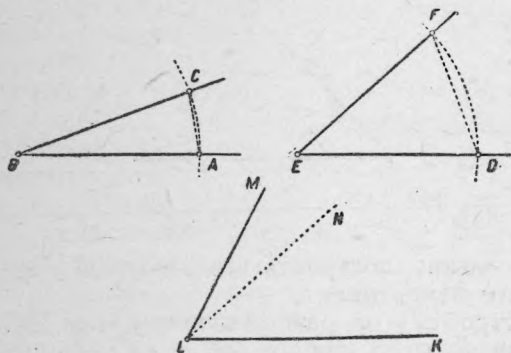


Рис. 76.

Решение. Измерив каждый из углов транспортиром, находим, что $\angle ABC = 20^\circ$ и $\angle DEF = 42^\circ$. Значит, $\angle ABC + \angle DEF = 20^\circ + 42^\circ = 62^\circ$.

Строим затем с помощью транспортира угол $\angle KLM = 62^\circ$. Последний и будет суммой углов $\angle ABC$ и $\angle DEF$.

Можно было бы сначала построить угол равный 20° и затем на стороне последнего построить угол равный 42° , тогда мы получили бы тот же $\angle KLM = 62^\circ$.

Мы решили эту задачу измерением и вычислением.

2. С помощью циркуля и линейки задача эта решается так. Берем произвольную прямую OO_1 (рис. 77) и на ней произвольную точку L . Проводим затем одним и тем же произвольным радиусом три окружности с центрами в точках B, E и L (рис. 76 и 77). Одна из окружностей пересекает стороны $\angle ABC$ в точках A и C , другая — стороны $\angle DEF$ в точках D и F и третья — прямую OO_1 в точке K . Радиусом, равным расстоянию AC , „засаекаем“ последнюю дугу дугою с центром в K ; пусть точка пересечения дуг N ; затем радиусом, равным FD и с центром в N , проводим дугу, пересекающую в точке M последнюю дугу. Проведя прямую LM , мы получаем искомую сумму углов, т. е. $\angle KLM = \angle KLN + \angle NLM$ или $\angle KLM = \angle ABC + \angle DEF$.

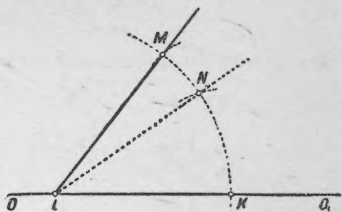


Рис. 77.

Теперь мы решили задачу построением.

Когда построение циркулем и линейкой выполнено, можно решение проверить с помощью транспортира измерением и вычислением.

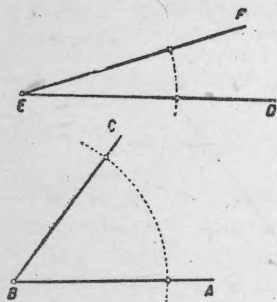


Рис. 78.

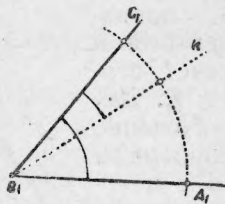


Рис. 79.

3. Задача. Найти разность двух углов: $\angle ABC$ и $\angle DEF$ (рис. 78).

Решение. Измерив с помощью транспортира $\angle ABC$ (53°) и $\angle DEF$ (18°), мы найдем разность этих углов вычислением. $53^\circ - 18^\circ = 35^\circ$.

Решим эту задачу еще построением.

Построив сначала $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$ (рис. 79), строим затем на B_1C_1 $\angle C_1B_1K_1$ (внутри угла $A_1B_1C_1$), равный углу DEF . Тогда $\angle KB_1A_1$ и будет разностью углов ABC и DEF .

4. Задача. Умножить $\angle ABC$ на 3 (рис. 80).

Решение. Умножить $\angle ABC$ на целое число, например на 3, значит взять угол ABC слагаемым 3 раза, иначе — сложить 3 одинаковых угла. Угол $A_1B_1C_3$ и будет искомым произведением, так как $\angle ABC \cdot 3 = \angle A_1B_1C_3$.

5. Задача. Разделить данный угол ABC пополам, т. е. на два равных угла (рис. 81).

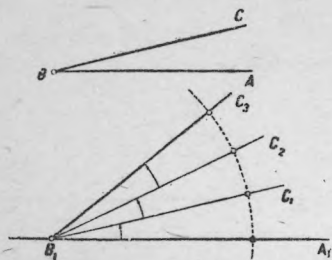


Рис. 80.

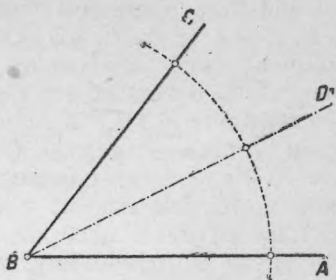


Рис. 81.

Решение. С помощью транспортира измеряем сперва угол (52°); затем получаем $52^\circ : 2 = 26^\circ$ и строим на стороне BA (или BC) $\angle ABD = 26^\circ$. Таким же образом можно разделить угол на 3, 4, 5 и т. д. равных углов.

С помощью циркуля и линейки угол делится пополам подобно тому, как мы это делали при делении отрезка пополам. Вся задача сводится к делению дуги пополам.

Пусть дан угол ABC (рис. 82). Проведем окружность произвольного радиуса с центром в вершине B . Она пересечет стороны угла в точках K и L . Дав циркулю растворение, большее половины хорды KL , проводим две равных окружности с центрами в K и L , которые пересекутся в двух точках M и N . Проведя прямую MN , мы разделим и хорду и дугу пополам. Соединив затем эту середину дуги с вершиной B , мы и получим прямую, которою угол ABC разделится пополам. Прямая эта пройдет через точки M и N и вершину B угла. Она называется равноделящей угла или биссектрисой.

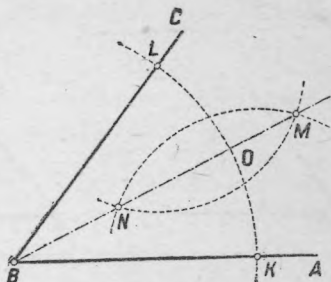


Рис. 82.

Для проверки берем в циркуль расстояния между концами дуг OK и OL . Если $OK = OL$, то построение сделано верно: $\sphericalangle OK = \sphericalangle OL$, следовательно, и $\angle ABO = \angle CBO$.

Можно разделить каждую половину угла пополам, т. е. весь угол ABC на 4 равные части; точно так же — и на 8, 16 и т. д. равных частей.

Вопросы и упражнения.

1. Начертить два угла. Найти их сумму и разность (двумя способами).
2. Дан острый угол ABC ; умножить его на 4 (двумя способами).
3. Разделить данный круг пополам; на 4 равных части; на 8 равных частей; на 16 равных частей.
4. Сколько градусов и минут содержит центральный угол сектора, составляющего $\frac{1}{16}$ круга?
5. Разность двух углов равна $12^\circ 20'$, а сумма их равна $78^\circ 30'$. Чему равен каждый из них?
6. Прямой угол разделен на два угла, из которых один на $10^\circ 10'$ больше другого. Найти каждый из них.
7. Два угла в сумме дают 180° . Один из них в 3,5 раза больше другого. Чему равен каждый из них?
8. Дан угол в $30^\circ 40'$. В вершине его к одной из сторон проведен перпендикуляр. Определить угол между перпендикуляром и другою стороною.
9. Дан угол в 140° . Через вершину его проведены две прямые, одна — перпендикулярная к одной из сторон угла, другая — перпендикулярная к другой стороне угла. Определить угол между этими перпендикулярными прямыми.
10. Что называется биссектрисой угла?
11. Дан угол в $40^\circ 50'$. Через вершину его проведена прямая, перпендикулярная к одной из его сторон. Определить угол между этой прямой и биссектрисой данного угла.

§ 5. Секторные диаграммы.

Мы уже рассмотрели столбчатые или прямоугольные диаграммы, рассмотрим теперь секторные диаграммы.

Задача. Изобразить наглядно социальный состав учащихся данной группы в 40 учащихся, из которых детей рабочих 22, детей крестьян 14 и детей служащих 4.

Решение.

Дети рабочих составляют	$\frac{22}{40}$	$= 0,55$	всего состава, или	55%
„ крестьян	„ $\frac{14}{40}$	$= 0,35$	„ „ „	35%
„ служащих	„ $\frac{4}{40}$	$= 0,10$	„ „ „	10%

Возьмем круг произвольного радиуса, например, в 5 см. Разделим круг на 100 равных секторов по транспортиру. Угол каждого сектора будет содержать $360^\circ : 100 = 3,6^\circ$,

затем строим один сектор в $3,6^\circ \cdot 55 = 198^\circ$, второй в $3,6^\circ \cdot 35 = 126^\circ$, третий в $3,6^\circ \cdot 10 = 36^\circ$ (рис. 83).

Отдельные секторы можно заштриховать разной штриховкой или выкрасить в разные цвета. Такая диаграмма дает наглядную картину социального состава данной группы.

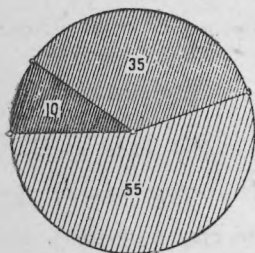


Рис. 83.

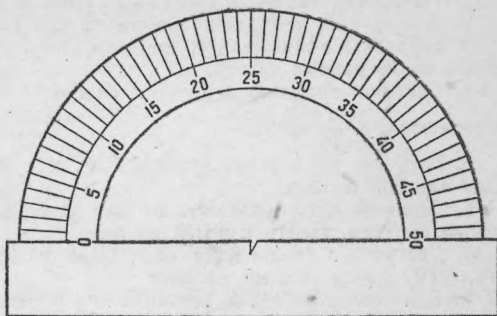


Рис. 84.

Для вычерчивания секторных диаграмм удобнее всего пользоваться кругом, предварительно разделенным на 100 равных секторов. Такой круг называется процентным кругом. Вместо процентного круга можно пользоваться и процентным транспортиром (рис. 84). В таком случае дуга транспортира (полукруга) делится на 50 равных частей.

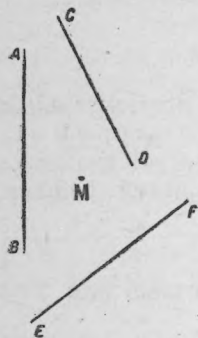


Рис. 85.

Вопросы и упражнения.

1. Начертить прямые AB , CD , EF и точку M (рис. 85). Провести через точку M прямые, перпендикулярные к первой, ко второй и к третьей прямой (с помощью треугольника).

2. Один из двух углов составляет 50% другого. Разность этих углов равна 30° . Чему равен каждый из них и чему равна их сумма? Построить эти углы и их сумму.

3. Построить произвольный угол и разделить его на 4 равные части: 1) транспортиром и 2) циркулем и линейкой.

4. Разделить развернутый угол пополам с помощью циркуля и линейки.

5. Из 35 учеников группы работу по математике написали хорошо 14 человек, удовлетворительно написали 14 человек и неудовлетворительно 7 человек. Составить секторную диаграмму.

6. В колхозе 1250 га земли; из них 240 га леса, 600 га пахотной земли, 400 га лугов, остальное занято под постройки и негодной землей. Составить диаграмму.

VII. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И МНОГОУГОЛЬНИКОВ.

§ 1. Треугольник.

1. Треугольником называется часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной, состоящей из трех отрезков (рис. 86).

Отрезки AB , BC и CA называются сторонами треугольника, а углы A , B и C — углами треугольника. Вершины углов называются и вершинами треугольника. У треугольника 3 стороны и 3 угла. Слово треугольник принято обозначать знаком $\triangle$.

Одну из сторон треугольника обычно называют основанием треугольника, например, CA ; тогда другие две стороны называются боковыми сторонами его (AB и BC).

2. Треугольник, в котором все углы острые, как на рисунке 86, называется остроугольным.

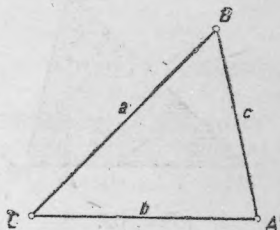


Рис. 86.

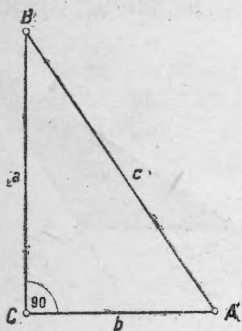


Рис. 87.

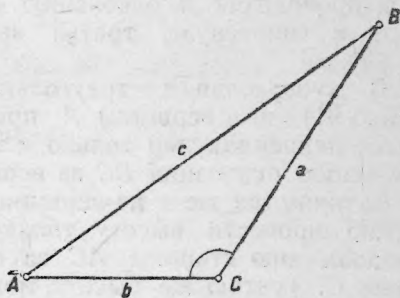


Рис. 88.

Треугольник, в котором один из углов прямой, называется прямоугольным (рис. 87). Стороны, заключающие прямой угол, а именно CB и CA , называются катетами, а сторона, лежащая против прямого угла, называется гипотенузой.

Треугольник, в котором один из углов тупой, называется тупоугольным (рис. 88).

3. Принято обозначать длину стороны AB буквой c , так что $AB=c$; точно так же $BC=a$ и $CA=b$ (рис. 86). Значит, в прямоугольном треугольнике (рис. 87) длина катетов будет обозначаться буквами a и b , а длина гипотенузы буквой c .

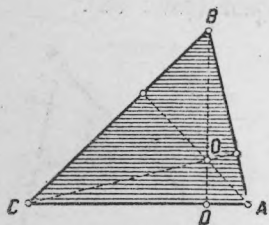


Рис. 89.

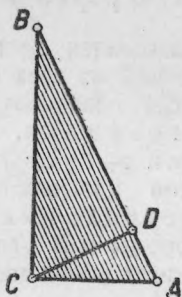


Рис. 90.

Следует заметить, что против стороны c лежит $\angle C$, против стороны a лежит $\angle A$ и против стороны b лежит $\angle B$.

4. Проведем в треугольнике ABC из вершины B к его основанию перпендикуляр BD (рис. 89). Перпендикуляр BD является высотой треугольника. Таким

же образом можно провести высоты и из вершин A и C . В треугольнике могут быть проведены 3 высоты.

В прямоугольном треугольнике катеты являются его высотами (рис. 90); катет BC — высота к основанию CA и катет CA — высота к основанию BC ; из вершины прямого угла проводится к основанию AB , т. е. к гипотенузе, третья высота CD .

В тупоугольном треугольнике (рис. 91) из вершины A проводится перпендикуляр только к продолжению основания BC за вершину C ; точно так же и из вершины B можно провести высоту только к продолжению стороны AC за вершину C . Третью же высоту можно провести из вершины C непосредственно к стороне AB .

Следует обратить внимание на то, что все три высоты пересекаются в одной точке. В остроугольном треугольнике (рис. 89) точка пересечения высот лежит внутри треугольника (точка O). В прямоугольном треугольнике она совпадает с вершиной C прямого угла (рис. 90), а в тупоугольном треугольнике (рис. 91) она лежит вне треугольника.

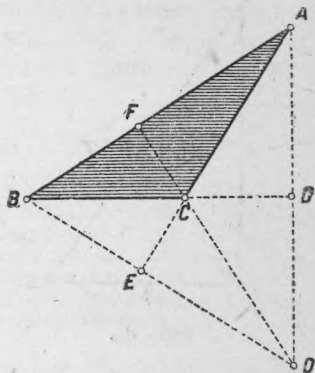


Рис. 91.

1. Что называется треугольником?
2. Сколько у треугольника сторон? углов?
3. Какой треугольник называется прямоугольным? тупоугольным?
4. Как называются стороны прямоугольного треугольника?
5. Что называется высотой треугольника?
6. Сколько высот можно провести в треугольнике?
7. Построить тупоугольный треугольник и провести все три высоты его. Продолжить высоты до их взаимного пересечения.

§ 2. Площадь треугольника и многоугольника.

1. На рисунке 92 дан прямоугольник $ABCD$ и квадрат $A_1B_1C_1D_1$. В каждом из них проведена прямая, соединяющая вершины двух противоположащих углов: AC и A_1C_1 . Прямые эти называются диагоналями. Если вырезать прямоугольник (или квадрат) и разрезать его по диагонали, то получим два равных треугольника: они при наложении совпадают.

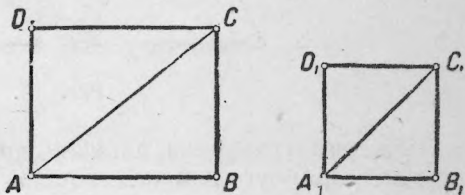


Рис. 92.

Диагональ прямоугольника (или квадрата) делит его на два равных треугольника. Следовательно,

$$\text{площадь } \triangle ABC = \text{площади } \triangle ADC = \frac{\text{пл. } \square ABCD}{2}.$$

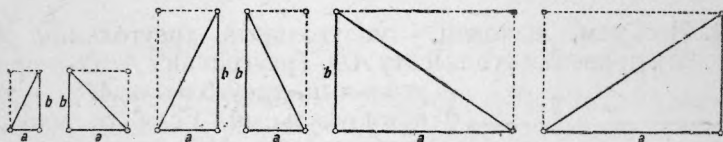


Рис. 93.

2. На рисунке 93 изображены 6 прямоугольных треугольников. Все они дополнены до прямоугольников, и каждый из прямоугольников таким образом состоит из двух равных треугольников. Если площадь прямоугольника равна $a \cdot b$, то площадь прямоугольного треугольника равна $\frac{1}{2} ab$, т. е.

половине произведения основания на высоту (или половине произведения катетов).

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} ab.$$

3. На рисунке 94 мы имеем три остроугольных треугольника, в каждом из которых проведено по одной высоте. Этой высотой треугольник делится на два прямоугольных треугольника, каждый из которых дополнен до прямоугольника. Площадь одного из них составляет половину площади

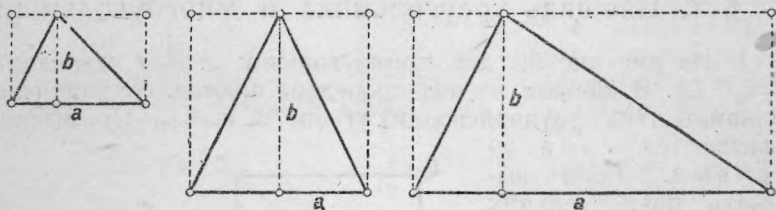


Рис. 94.

одного прямоугольника, площадь другого — половину площади другого прямоугольника; площадь треугольника составляет половину площади прямоугольника с основанием, равным основанию треугольника, и высотой, равной высоте треугольника. Итак:

площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} ab.$$

4. Возьмем, наконец, тупоугольный треугольник ABC (рис. 95), проведем его высоту AD . Треугольник ABD — прямоугольный, треугольник ACD — тоже прямоугольный. Если от площади треугольника ABD отнять площадь треугольника ACD , то останется площадь треугольника ABC .

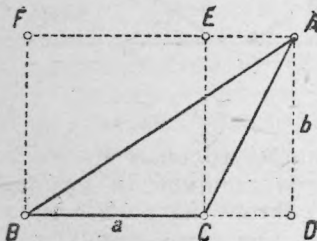


Рис. 95.

$$S_{ABC} = S_{ABD} - S_{ACD}.$$

Но площадь треугольника ABD равна половине площади прямоугольника $AFBD$ и площадь треугольника ACD равна половине пло-

щади прямоугольника $AECD$. Значит, площадь треугольника ABC равна полуразности площадей прямоугольников $AFBD$ и $AECD$, иначе — половине площади прямоугольника $BCEF$, стороны которого a и b . Запишем это так:

$$\begin{array}{r} S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{AFBD} \\ - \\ S_{ACD} = \frac{1}{2} S_{AECD} \\ \hline S_{ABD} - S_{ACD} = \frac{1}{2} (S_{AFBD} - S_{AECD}) \end{array}$$

или:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{BCEF} = \frac{1}{2} ab.$$

Во всех трех случаях площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot b \text{ (кв. единиц).}$$

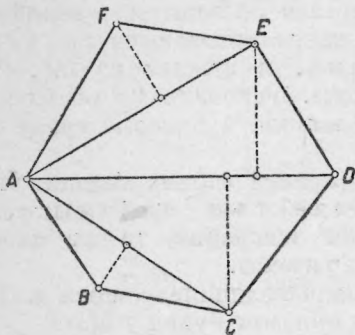


Рис. 96.

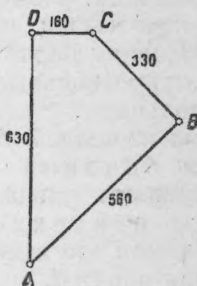


Рис. 97.

5. Всякий многоугольник, например $ABCDEF$, можно разбить диагоналями, как показано на рисунке 96, на треугольники. Следовательно, измерив диагонали и соответствующие высоты треугольников, мы можем вычислить площади всех треугольников и, взяв сумму их площадей, мы найдем площадь многоугольника.

Вопросы и упражнения.

1. Чему равна площадь треугольника?
2. Участок земли имеет форму четырехугольника $ABCD$ (рис. 97), углы которого B и D — прямые. Стороны его: $AB = 560$ м, $BC = 330$ м, $CD = 160$ м и $AD = 630$ м. Вычислить площадь этого участка.

3. Начертить какой-нибудь треугольник; измерить его стороны. Провести его высоту; измерить их и найти затем площадь треугольника, принимая последовательно одну из сторон его за основание, затем другую и третью. Сравнить между собою результаты вычислений.

4. Найти площадь треугольника, основание которого равно 3,5 м и высота равна 3,5 м.

5. Площадь треугольника равна 16,5 м². Высота его равна 4,4 м. Найти его основание.

6. Треугольник и квадрат равновелики (т. е. площади их одинаковы); сторона квадрата равна 4,8 м, сторона треугольника равна 6,4 м. Найти высоту треугольника, соответствующую данной его стороне.

VIII. ПОВЕРХНОСТЬ И ОБЪЕМ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ.

§ 1. Поверхность прямой треугольной призмы.

На рисунке 98 дан прямоугольный параллелепипед, или брус, т. е. шестигранник, боковые грани которого — прямоугольники, а основания ($A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$) — равные прямоугольники.

Проведем диагонали оснований D_1B_1 и D_2B_2 и представим себе, что параллелепипед разрезан по заштрихованной плоскости пополам. Полученные части называются треугольными прямыми призмами, и каждая из них составляет половину параллелепипеда. Основаниями обеих призм служат прямоугольные треугольники, а боковые грани их — прямоугольники.

Сумма площадей боковых граней (прямоугольников) называется боковой поверхностью призмы; если к ней прибавить площади обоих оснований, то мы получим полную поверхность призмы.

Обозначив три измерения параллелепипеда через a , b и c , диагональ через d , мы таким образом будем иметь:

боковая поверхность призмы равна:

$$ac + bc + dc = (a + b + d)c = P \cdot H,$$

где P — периметр основания призмы, а H — высота призмы; полная поверхность призмы равна:

$$(a + b + d)c + 2ab.$$

Основанием прямой треугольной призмы может быть и любой треугольник, не только прямоугольный. Поверхность ее вычисляется так же, как в предыдущем случае.

Основанием прямой призмы может быть любой четырехугольник или вообще многоугольник. Итак:

боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания призмы на ее высоту.

§ 2. Объем треугольной призмы.

Объем прямоугольного параллелепипеда $V = a \cdot b \cdot c$, где a , b и c — три измерения параллелепипеда, или же $V = Q \cdot h$, где Q — площадь основания и h — высота параллелепипеда.

Прямая треугольная призма, основание которой — прямоугольный треугольник (рис. 99), составляет половину объема прямоугольного параллелепипеда. Значит, объем

$$V = \frac{1}{2}abc = \left(\frac{1}{2}ab\right) \cdot c,$$

т. е.

объем треугольной призмы, основание которой прямоугольный треугольник (с катетами a и b) и высота которой h , равен произведению площади ее основания $\left(\frac{1}{2}ab\right)$ на высоту (h).

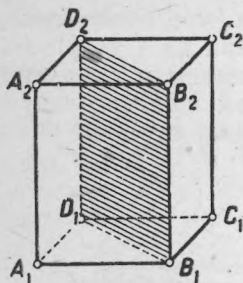


Рис. 98.

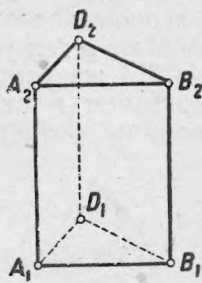


Рис. 99.

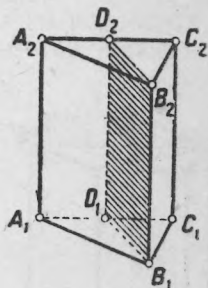


Рис. 100.

Итак, чтобы вычислить объем призмы, следует сначала вычислить площадь ее основания и полученное число умножить на высоту.

Рассмотрим треугольную призму, основанием которой служат произвольные (но одинаковые) треугольники (рис. 100). Проведем из вершины большего угла каждого треугольника по высоте C_1D_1 и C_2D_2 и соединим D_1 и D_2 прямою. Тогда данная призма плоскостью прямоугольника $C_1D_1D_2C_2$ пересекается на две треугольные призмы, основания которых — прямоугольные треугольники. Объем первой призмы

$$V_1 = Q_1 \cdot h,$$

и объем второй призмы

$$V_2 = Q_2 \cdot h.$$

Значит, объем всей призмы:

$$V = V_1 + V_2 = Q_1 h + Q_2 h = (Q_1 + Q_2) \cdot h.$$

$Q_1 + Q_2$ — площадь треугольника $A_1B_1C_1$. Обозначим ее через Q . Следовательно,

$$V = Q \cdot h \text{ (куб. единиц),}$$

т. е.

объем любой прямой треугольной призмы (в куб. единицах) равен произведению площади ее основания (в кв. единицах) на высоту (в линейных единицах).

Примечание. Все отрезки, служащие для определения объема, площади, должны быть одного наименования; тогда поверхность (площадь) выразится в квадратных единицах и объем — в кубических единицах того же наименования.

§ 3. Объем многоугольной прямой призмы.

Дана какая-нибудь многоугольная прямая призма, например шестиугольная (рис. 101).

Проведем из одной вершины основания (многоугольника) диагонали, которые разобьют шестиугольник на 4 треугольника. То же самое сделаем и с другим основанием и разобьем шестиугольную призму на 4 треугольных призмы. Обо-

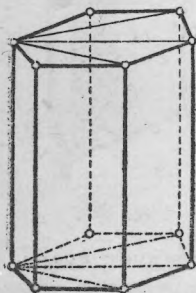


Рис. 101.

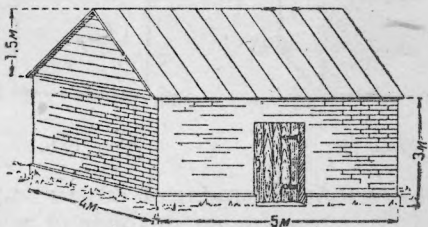


Рис. 102.

значим объемы призм через V_1, V_2, V_3, V_4 , площади их оснований — через Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , а их общую высоту — через H . Тогда объем всей призмы:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = Q_1H + Q_2H + Q_3H + Q_4H = \\ &= (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)H. \end{aligned}$$

Обозначив площадь основания шестиугольника через Q , получим:

$$V = QH \text{ (куб. единиц),}$$

т. е.

объем любой прямой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Вопросы и упражнения.

1. Начертить развертку боковой поверхности прямой треугольной призмы, основания которой — прямоугольные треугольники с катетами в 3 см и 4 см и гипотенузой в 5 см. Высота призмы $H = 6$ см.

2. Как вычислить боковую поверхность и объем прямой призмы?

3. Угол между скатами двускатной крыши (рис. 102) — прямой; ширина каждого ската равна 3,0 м, длина крыши равна 12 м. Найти объем чердака под крышей.

Указание. Чердак представляет собой прямую треугольную призму, высота которой равна 12 м, а основание — прямоугольный треугольник с катетами в 3 м и 3 м.

4. Высота двускатной крыши сарая $h = 4,0$ м, расстояние между стропильными ногами $a = 8,0$ м, длина каждого ската $b = 10$ м, высота сарая $c = 5,0$ м. Найти объем сарая.

IX. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА.

§ 1. Длина окружности.

Измерить длину окружности способом, которым мы измеряли длину отрезка, нельзя, так как окружность — кривая линия и не содержит ни одного отрезка прямой. Однако, если бы окружность была гибкой нитью, то, разрезав ее и выпрямив, мы могли бы измерить длину выпрямленной нити.

Для измерения длины окружности мы поступаем так: возьмем несколько деревянных цилиндров различных диаметров. Обернем каждый цилиндр плотную бумажной лентой так, чтобы один конец ленты приходился на другой, и сделаем прокол булавкой в месте перекрытия. Булавка наметит 2 точки на ленте. Если выпрямить ленту, то расстояние между уколами определит длину окружности.

Продедаем это с каждым из цилиндров. Затем измерим диаметр каждого цилиндра.

Вычислив, во сколько раз длина окружности больше своего диаметра, мы получим во всех случаях одно и то же число, приблизительно 3,14. Это значит, что

длина окружности больше своего диаметра в 3,14 раза.

Если длину окружности обозначим через C , а диаметр ее через D , то получим формулу:

$$C = 3,14 D.$$

Из этой формулы имеем:

$$D = \frac{C}{3,14}.$$

Последнюю формулу можно записать иначе:

$$D = C \cdot \frac{1}{3,14}.$$

Если выполнить деление $1:3,14$, то мы получим приблизительно $0,318$, или $0,32$; значит:

$$D = 0,32 C.$$

Пример 1. Диаметр дна бочки равен $0,60$ м. Найти длину окружности дна.

$$C = 3,14 \cdot 0,60 = 1,9 \text{ м.}$$

Пример 2. Окружность ствола дерева равна 150 см. Найти диаметр дерева.

$$D = 0,32 \cdot 150 = 48 \text{ см.}$$

Вопросы и упражнения.

1. Чему равна длина окружности, диаметр которой D ?
2. Как по данной длине окружности C найти ее диаметр? ее радиус?
3. Длина окружности $C = 28,6$ см. Найти длину ее дуги, содержащей 50° .
4. Даны две концентрические окружности; диаметр одной $D_1 = 15$ см, диаметр другой $D_2 = 25$ см. Определить длину дуги в 10° каждой окружности.
5. Сколько оборотов делает велосипедное колесо диаметром в 750 мм на протяжении 1 км?
6. Ведущее колесо паровоза сделало 290 оборотов на протяжении 1450 м. Найти диаметр колеса (скольжение в расчет не принимается).
7. Принимая длину экватора Земли равной $40\,000$ км, вычислить диаметр Земли.
8. Диаметр арены цирка равен 15 м. Найти окружность арены.

§ 2. Площадь круга.

Начертим круг (рис. 103) и разделим его на 4 равных сектора двумя взаимноперпендикулярными диаметрами. Разделим затем каждый сектор на 4 равные части. Таким образом, весь круг будет разделен на 16 равных секторов. Вырезав круг и разрезав его на секторы, разрежем еще один из них пополам и расположим их так, как показано на рисунке 103. Получается фигура, весьма похожая на прямоугольник. Основание этого прямоугольника равно половине

длины окружности, а высота равна радиусу. или половине диаметра. Если разделить круг на 32 равных сектора и расположить их так, как показано на рисунке 103, *а*, то снова получим фигуру, еще более близкую к прямоугольнику. По-

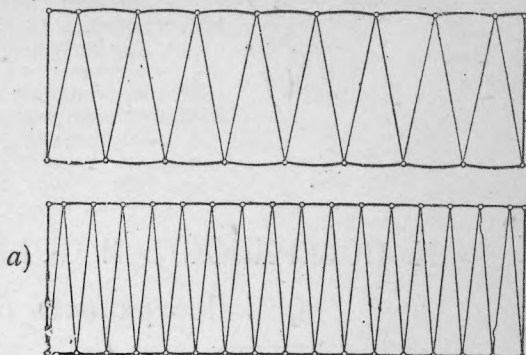
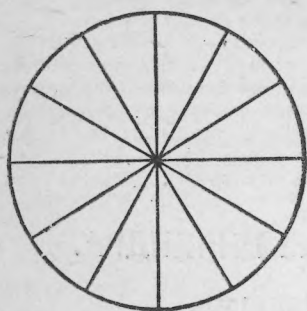


Рис. 103.

этому площадь круга принимается равной площади прямоугольника, основание которого полуокружность $\left(\frac{C}{2}\right)$, а высота — радиус $\left(\frac{D}{2}\right)$. Обозначив площадь круга через K , мы, таким образом, будем иметь:

$$K = \frac{C}{2} \cdot \frac{D}{2} = \frac{C \cdot D}{4} = \frac{1}{4} C \cdot D.$$

Но

$$C = 3,14 D,$$

значит

$$K = \frac{3,14 D^2}{4} = 0,785 D^2 \text{ (кв. единиц).}$$

Но

$$R = \frac{D}{2},$$

а потому

$$K = \frac{C}{2} \cdot \frac{D}{2} = 3,14 R \cdot R = 3,14 R^2 \text{ (кв. единиц),}$$

т. е.

площадь круга равна одной четверти длины окружности, умноженной на диаметр, или площадь круга равна квадрату радиуса, умноженному на 3,14.

1. Чему равна площадь круга?

2. Площадь круга $K = 240 \text{ см}^2$. Чему равна площадь его сектора, дуга которого содержит 80° ? 120° ?

3. Диаметр круглого железа равен 25 мм. Найти площадь поперечного сечения.

4. Дан круг и его диаметр $AB = 10 \text{ см}$. Внутри его построены на радиусах полуокружности (рис. 104) по разные стороны диаметра. Определить периметр заштрихованной фигуры и ее площадь.

5. Внутренний диаметр трубы равен 12 мм, наружный диаметр ее равен 16 мм. Найти площадь поперечного сечения трубы. Дать рисунок.

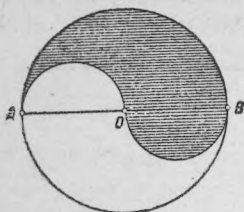


Рис. 104.

Х. ПОВЕРХНОСТЬ И ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА.

§ 1. Поверхность цилиндра.

Возьмем цилиндр (рис. 105) и обернем его бумагой, плотно прилегающей к его поверхности. Разрежем затем острием ножа по линейке бумагу (линейка должна вплотную прилегать к поверхности) и развернем ее на плоскости. Она представляет собою прямоугольник, площадь которого равна боковой поверхности цилиндра. Основание прямоугольника равно длине окружности C основания цилиндра, а высота равна высоте H цилиндра. Следовательно,

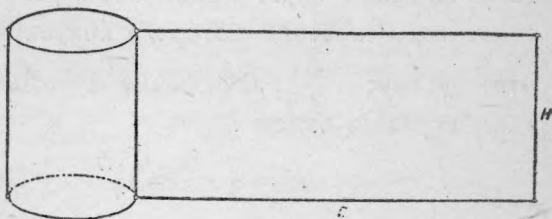


Рис. 105

боковая поверхность цилиндра равна окружности его основания, умноженной на высоту цилиндра.

$$S_{\text{бок.}} = C \cdot H = 3,14 \cdot D \cdot H = 6,28 RH \text{ (кв. единиц).}$$

Для вычисления полной поверхности цилиндра надо к боковой поверхности его прибавить площади обоих оснований.

Пример. Диаметр основания цилиндра равен 20,0 см, а высота его равна 55,0 см. Вычислить его поверхность.

Боковая поверхность равна $3,14 \cdot 20 \cdot 55 = 3450 = 3450 \text{ см}^2$.

Площадь основания (круга) равна $3,14 \cdot 10^2 = 314 \text{ см}^2$.

Значит полная поверхность цилиндра

$$S_{\text{полн.}} = 3450 + 2 \cdot 314 = 3450 + 628 = 4078 = 4080 \text{ см}^2.$$

§ 2. Объем цилиндра.

Дан цилиндр (рис. 106). Выделим внутри его небольшую призму, основание которой — треугольник или четырехугольник, а высота равна высоте цилиндра. Объем призмы равен площади ее основания, умноженной на высоту. Вообразим себе, что весь цилиндр заполнен такими призмами, и тогда объем цилиндра равен сумме объемов всех этих призм. У всех этих призм одна и та же высота. Итак, нужно сложить площади оснований всех призм, их сумма равна площади основания цилиндра, и умножить эту площадь на высоту. Значит,

объем цилиндра равен площади его основания, умноженной на его высоту.

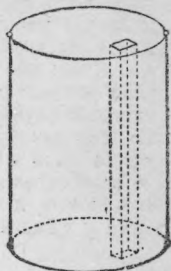


Рис. 106.

Вопросы и упражнения.

1. Что представляет собою развертка боковой поверхности цилиндра?
2. Чему равна боковая поверхность цилиндра?
3. Чему равен объем цилиндра?
4. Диаметр основания цилиндра $D = 20$ см. Высота цилиндра $H = 40$ см. Найти полную поверхность цилиндра.
5. Размеры цилиндра: $D = 1,2$ м и $H = 1,5$ м. Вычислить объем цилиндра.
6. Прямоугольник со сторонами в 3,0 дм и 4,5 дм свернули в цилиндр. Вычислить объем цилиндра (два случая).

ТАБЛИЦА МЕР.

I. Меры длины	{	1 километр (к м) = 1 000 метрам (м)
		1 м = 10 дм = 100 см = 1 000 мм
II. Меры поверхности.	{	1 дм = 10 см = 100 мм
		1 см = 10 мм
		1 км ² = 1 000 000 м ² = 100 гектарам (га)
		1 га = 100 а = 10 000 м ²
III. Меры объема.	{	1 а = 100 м ²
		1 м ² = 100 дм ² = 10 000 см ²
		1 дм ² = 100 см ²
		1 см ² = 100 мм ²
IV. Меры веса.	{	1 м ³ = 1 000 дм ³ = 1 000 000 см ³
		1 дм ³ = 1 000 см ³ = 1 000 000 мм ³
		1 см ³ = 1 000 мм ³
		1 метрич. тонна (т) = 10 центнерам (ц) = 1 000 кг
V. Меры объема сыпучих и жидких тел.	{	1 ц = 100 кг
		1 кг = 1 000 г
		1 литр (л) — объем 1 дм ³ ; 1 гектолитр (г л) = 100 л

ОТВЕТЫ

К стр. 8.

- Сходство: 1) оба ограничены 6 гранями, 2) у обоих имеется 12 ребер и 8 вершин; различие: грани куба — квадраты и все равны, грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники и попарно равны; измерения куба все равны, измерения параллелепипеда разные. Куб — частный случай параллелепипеда.
- Сходство: оба четырехугольники и углы их все равны; различие: стороны квадрата все равны, стороны прямоугольника попарно равны. Квадрат — частный случай прямоугольника.
- Да, так как брус — частный случай призмы, а куб как частный случай бруса есть и частный случай призмы.
- У шестиугольной призмы 8 граней: 6 боковых и 2 основания; 18 ребер: 6 боковых и по 6 ребер у каждого основания, и 12 вершин: по 6 вершин у каждого основания.

К стр. 17.

- $a + b = 9,9 \text{ см} = 99 \text{ мм}$.
- $a + b + b = 8,9 \text{ см}$.
- Если $a > b$, то разность будет $a - b$; если $a < b$, то разность будет $b - a$.
- Отрезок b содержится в отрезке a 4,4 раза.
- $a = \frac{n + m}{2}$; $b = \frac{n - m}{2}$.

К стр. 20.

- 1) $a = 100 \text{ кв. м}$, а потому сторона соответствующего квадрата равна 10 м.
2) $ga = 10\,000 \text{ кв. м}$, а потому сторона соответствующего квадрата равна 100 м.
- При увеличении h в 2 раза, площадь увеличится в 2 раза; при уменьшении h в 3 раза, площадь уменьшится в 3 раза.
- 1) 13,5 кв. см; 2) 2,23 кв. м; 3) 112 кв. мм = 110 кв. мм; 4) 0,17 кв. м; 5) 25 000 кв. м = 250 га; 6) 2,158 кв. км.
- 10) 8 а. 9) 250 м.
- Периметр квадрата = 600 м, периметр прямоугольника равен 650 м, следовательно он на 50 м больше периметра квадрата, значит и забор для прямоугольного участка длиннее на 50 м.
- 1) 56 кв. см; 2) 29,8 см; 3) 4 мм; 4) 192 кв. см; 5) 50 м.
- 1) 6 м; 2) 15 см; 3) 1,2 м. 13. 1,2 кв. м.

К стр. 26.

- 1) $S_b = 36 \text{ кв. см}$; $S_n = 54 \text{ кв. см}$;
2) $S_b = 400 \text{ кв. см}$; $S_n = 600 \text{ кв. см}$;
3) $S_b = 4^2 \text{ кв. см}$; $S_n = 6n^2 \text{ кв. см}$.
- 2) $(8 + 5) \cdot 3 = 78 \text{ кв. см}$, или $2 \cdot (8 + 3) \cdot 5 = 110 \text{ кв. см}$; или $2 \cdot (5 + 3) \cdot 8 = 128 \text{ кв. см}$.
- 1) $\approx 70 \text{ кв. см}$; $\approx 420 \text{ кв. см}$; 2) $\approx 1,5 \text{ кв. м}$; $\approx 2,2 \text{ кв. м}$;
3) $\approx 7,3 \text{ кв. м}$; $\approx 15,4 \text{ кв. м}$; 4) $\approx 50 \text{ кв. см}$; $\approx 65 \text{ кв. см}$;
5) $\approx 20 \text{ кв. м}$; $\approx 36 \text{ кв. м}$.

К стр. 28.

- 2160 куб. см; $\approx 2,2 \text{ куб. дм}$.
- Уменьшатся (увеличатся) в 16 раз.
- 729 куб. см
- 64 кв. см; 96 кв. см; 8. 3 м.
- 4104 куб. см; $\approx 4100 \text{ куб. см}$.

10. 0,70 куб. м.
13. 30 л.
15. 90 гл.

11. ≈ 280 кг. 12. ≈ 2200 коробок.
14. 1) 1000 куб. см; 2) 4 куб. дм; 3) 1000 л.
16. Длина зала 50 м; высота 5 м.

К стр. 32.

2. 3,3 см.
3. Точки, расстояние которых от центра равно 6 см, лежат вне окружности; точки, расстояние которых от центра равно 3 см, лежат внутри окружности, и точки, расстояние которых от центра равно 4 см, лежат на окружности.

К стр. 34.

1. 7,8 см; 19,5 см.
2. На шесть равных дуг. Шестиугольник.
3. Бесчисленное множество диаметров. Все диаметры равны между собой.
4. Два диаметра делят друг друга пополам.
6. Наибольшая хорда равна 21 см.
7. 6 см.

К стр. 39.

1. Острый угол; прямой угол; тупой угол; развернутый угол.
6. Прямоугольник или квадрат.

К стр. 42.

4. $\frac{1}{90}$ прямого угла называется угловым градусом.
6. 1) 30° ; 2) 150° .

К стр. 47.

4. $22^\circ 30'$. 5. $45^\circ 25'$ и $33^\circ 5'$. 6. $50^\circ 5'$ и $39^\circ 55'$.
7. 40° и 140° . 8. $59^\circ 20'$ и $120^\circ 40'$. 9. 40° или 140° .
11. $69^\circ 35'$ и $110^\circ 25'$.

К стр. 48.

2. 60° и 30° , 90° .

К стр. 53.

2. 1428 а. 4. $\approx 6,1$ кв. м. 6. 7,2 м.

К стр. 57.

3. 54 куб. м. 4. 560 куб. м.

К стр. 58.

3. $\approx 4,0$ см. 4. 1,3 см и 2,2 см. 5. 400 с лишним (425).
6. 1,6 м. 7. 12 720 км. 8. 47 м.

К стр. 60.

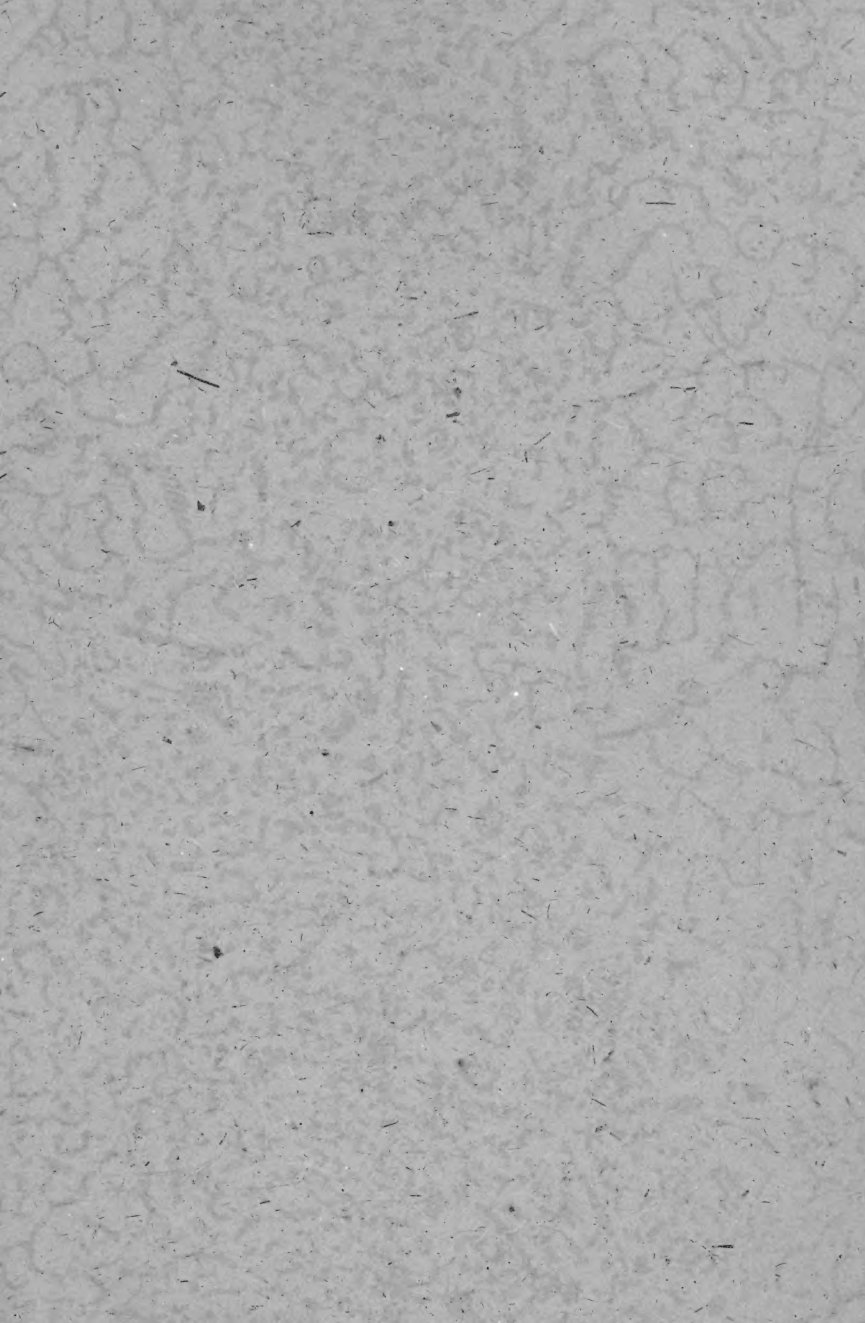
2. 53 кв. см; 80 кв. см. 3. 4,9 кв. см.
4. Периметр равен длине окружности 3,1 см; площадь — половине площади круга 3,9 кв. см.
5. 28π кв. мм.

К стр. 61.

4. 1000π кв. см. 5. 540π куб. дм. 6. 3,2 куб. дм; 4,9 куб. дм.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.		Стр.
I. Основные геометрические понятия.		VI. Углы.	
§ 1. Физическое и геометрическое тело	3	§ 1. Окружность и угол. Прямой угол	34
§ 2. Куб, прямоугольный параллелепипед, прямая призма.	5	§ 2. Измерение угла. Транспортир	39
II. Прямая линия.		§ 3. Построение угла. Сравнение углов	42
§ 1. Прямая линия. Луч. Отрезок Ломаная	8	§ 4. Действия с углами	44
§ 2. Измерение отрезков. Масштабная линейка	11	§ 5. Секторные диаграммы	47
§ 3. Сравнение отрезков	13	VII. Вычисление площадей треугольников и многоугольников.	
§ 4. Сложение отрезков	14	§ 1. Треугольник	49
§ 5. Вычитание отрезков	15	§ 2. Площадь треугольника и многоугольника	51
§ 6. Умножение отрезка на целое число	—	VIII. Поверхность и объем прямой призмы.	
§ 7. Деление отрезков	16	§ 1. Поверхность прямой треугольной призмы	54
III. Измерение площади квадрата и прямоугольника.		§ 2. Объем треугольной призмы.	55
§ 1. Измерение площадей	18	§ 3. Объем многоугольной прямой призмы.	56
§ 2. Площадь прямоугольника и квадрата	19	IX. Длина окружности и площадь круга.	
§ 3. Прямоугольные диаграммы	22	§ 1. Длина окружности	57
IV. Поверхность и объем куба и прямоугольного параллелепипеда.		§ 2. Площадь круга	58
§ 1. Развертка и поверхность куба и прямоугольного параллелепипеда	23	X. Поверхность и объем цилиндра.	
§ 2. Объем куба и прямоугольного параллелепипеда	26	§ 1. Поверхность цилиндра	60
V. Цилиндр. Окружность. Круг.		§ 2. Объем цилиндра	61
§ 1. Цилиндр	29	XI. Таблица мер	
§ 2. Окружность и круг	30	XII. Ответы	
§ 3. Дуга. Хорда. Диаметр Сектор.	32		



445

324